



RÉGION ACADÉMIQUE
ÎLE-DE-FRANCE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION NATIONALE
MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION



Inria
INVENTEURS DU MONDE NUMÉRIQUE



Collège Jean-Philippe
RAMEAU Versailles



« Un de mes professeurs parlait de démonstration « âne-qui-trotte » pour désigner les démonstrations qu'on mène en appliquant les définitions de base et en opérant quelques calculs et déductions faciles, n'exigeant aucun effort d'imagination. À l'opposé, les situations que préfèrent les mathématiciens sont celles où les techniques usuelles échouent et où il faut contourner le problème, le prendre par surprise, introduire des éléments qui n'ont en apparence aucun rapport avec l'énoncé et qui brusquement dénouent les difficultés. »

(Jean-Paul DELAHAYE, revue Pour la Science, septembre 2017)

Stage « résolution de problèmes » proposé à des collégiens talentueux et motivés désignés par leurs établissements, les 23 et 24 octobre 2017

La Pépinière académique de mathématique organise, bénévolement, des regroupements d'élèves désignés par leurs établissements. Quatre niveaux sont concernés cette année : les collégiens de troisième en octobre, les lycéens de première en janvier, les lycéens de terminale présentés au concours général en février et les lycéens de seconde en avril. La Pépinière s'est assurée du concours de partenaires qui hébergent traditionnellement nos stages : l'université de Versailles Saint Quentin en Yvelines et le siège d'INRIA à Rocquencourt, le lycée Camille Pissarro de Pontoise, le collège Paul Fort de Montlhéry, le lycée Jean-Baptiste Corot de Savigny sur Orge, le collège Jean-Philippe Rameau de Versailles. Elle a reçu le soutien de l'Institut de hautes études scientifiques de Bures sur Yvette.

Les élèves sont désignés et recensés par leurs établissements, parce que l'éducation nationale est responsable des élèves qui lui sont confiés, et donc des projets et des actions auxquels ils sont invités à participer. Nos stages se déroulent pendant les congés scolaires, mais ils ne sont pas des stages « de vacances ». Une appétence et un répondant minimum sont attendus des élèves, sur lesquels les établissements veillent.

Philippe JULIEN,
professeur au lycée International de Saint Germain en Laye, animateur
du club de mathématiques du lycée, est décédé en juillet dernier.
Il aimait faire des mathématiques avec les élèves.
La Pépinière académique lui doit beaucoup.
Les stages 2017-2018 lui sont dédiés.

Le secrétariat opérationnel : Frédérique CHAUVIN, rectorat de Versailles

Les inspecteurs : Anne ALLARD, Joëlle DEAT, Xavier GABILLY, Anne MENANT, Pierre MICHALAK (IPR honoraire), Évelyne ROUDNEFF, Jean-François REMETTER, Christine WEILL, Joffrey ZOLNET

Les responsables des établissements d'accueil : Caroline TALLEC, Principale du collège Paul Fort, Jean-Paul JOUAN, Proviseur du lycée Camille Pissarro, Jean-Pierre GRATIEN, Principal du collège Jean-Philippe Rameau,

Les professeurs : Bruno BAUDIN (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Hubert BERGMANN (Collège Ariane, GUYANCOURT), Jérôme CERISIER (Lycée Mansart, SAINT CYR L'ÉCOLE), Christophe DEGUIL (Lycée Notre Dame, SAINT GERMAIN EN LAYE), Odile DELASSUS (Lycée Alfred Kastler, CERGY), Muriel DUGAST (Collège de Sainte Apolline, COURDIMANCHE), Marie ESCOT (Lycée Vallée de Chevreuse, GIF SUR YVETTE), Nicolas FIXOT (Lycée Vallée de Chevreuse, GIF SUR YVETTE), Thibault FOUCHÉ (Lycée Louis de Broglie, MARLY LE ROI), Catherine HOUARD (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Jérôme MORAND (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Konrad RENARD (Lycée René Cassin, GONESSE), Martine ZNATY (Collège Les Hauts Grillets, SAINT GERMAIN EN LAYE)

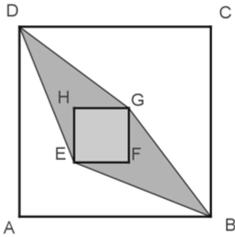
Et les professeurs qui accompagnent leurs élèves

Programme du stage des 23 et 24 octobre 2017

| Lundi 23 octobre | | | | | | |
|------------------------------|--|---|---|--|--|--|
| | Montlhéry | Pontoise 1 | Pontoise 2 | Versailles 1 | Versailles 2 | Versailles 3 |
| 10 | Équations N. Fixot /M. Escot | Probabilités Dénombrement O. Delassus | Aires et volumes T. Fouché | Aires et volumes C. Deguil /J.F. Remetter | Équations M. Znaty | Algorithmes Programmation J. Cerisier |
| 11.45 | Film ou repas (Dédoublement éventuel) | | | | | |
| 12.30 | Repas ou film (Dédoublement éventuel) | | | | | |
| 13.15 à 14.45 | Aires et Volumes N. Fixot /M. Escot | Algorithmes Programmation J. Morand | Probabilités Dénombrement O. Delassus | Algorithmes Programmation J. Cerisier | Aires et volumes C. Deguil /J.F. Remetter | Équations M. Znaty |
| 15 à 16.30 | Nombres C. Weill | Aires et volumes T. Fouché | Algorithmes Programmation J. Morand | Équations M. Znaty | Algorithmes Programmation J. Cerisier | Aires et volumes C. Deguil /J.F. Remetter |
| Mardi 24 octobre | | | | | | |
| | Montlhéry | Pontoise 1 | Pontoise 2 | Versailles 1 | Versailles 2 | Versailles 3 |
| 10 | Angles et distances C. Weill | Équations M. Dugast | Angles et distances C. Houard | Nombres H. Bergmann | Angles et distances J. Cerisier | Probabilités Dénombrement J.F. Remetter/C. Deguil |
| 11.45 | Film ou repas (Dédoublement éventuel) | | | | | |
| 12.30 | Repas ou film (Dédoublement éventuel) | | | | | |
| 12.45 à 14.30 | Probabilités Dénombrement X. Gabilly | Nombres K. Renard | Équations M. Dugast | Probabilités Dénombrement J.F. Remetter/C. Deguil | Nombres H. Bergmann | Angles et distances J. Cerisier |
| 14.45 à 16.30 | Algorithmes Programmation X. Gabilly | Angles et distances C. Houard | Nombres K. Renard | Angles et distances J. Cerisier | Probabilités Dénombrement J.F. Remetter/C. Deguil | Nombres H. Bergmann |

Thème : aires et volumes

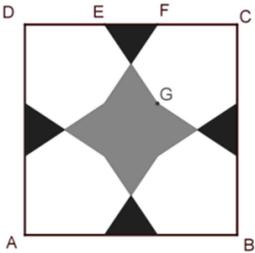
Exercice 1 Un carré dans un carré



Le carré EFGH a pour côté 2 cm. Ses côtés sont parallèles à ceux du carré ABCD, dont le côté est 7 cm.

Quelle est l'aire de la surface grisée (on peut compter ou non l'aire du petit carré, ce n'est pas là qu'est le problème)?

Exercice 2 Alhambra



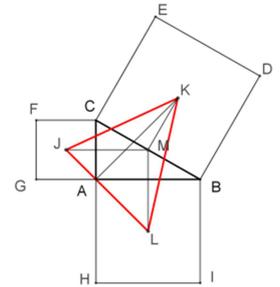
Les céramiques qui habillent le soubassement d'un édifice sont des tuiles carrées de côté 8 cm. La distance EF est 2 cm. Le point G appartient à la diagonale [CA] et la droite (FG) est parallèle à (CB).

Les diagonales du carré et les médiatrices des côtés sont axes de symétrie de la figure.

Quelle est l'aire de l'octogone gris ?

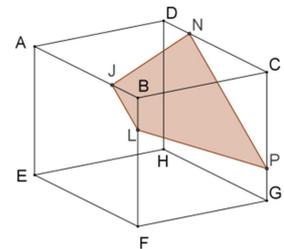
Exercice 3 Aire double

Sur les côtés du triangle rectangle ABC, on construit les carrés de centres J, K et L. Montrer que l'aire du triangle JKL est supérieure au double de celle de ABC.



Exercice 4 Trapèze volant

Sur les arêtes d'un cube (d'arête 8), on place les points J et L sur [AB] et [BF] à la distance 2 de B, les points N et P sur [DC] et [CG] à la distance 6 de C. Quelle est l'aire du trapèze JLPN ?



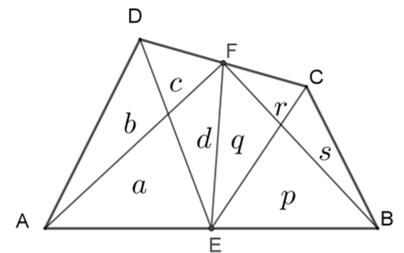
Exercice 5 Puzzle 8 pièces

On considère un quadrilatère ABCD et les milieux E et F des côtés [AB] et [CD]. Les segments tracés sur la figure découpent 8 triangles dont les aires sont notées a, b, c, d, p, q, r et s . Prouver que :

$$a + d = p + q$$

$$a + r = c + p$$

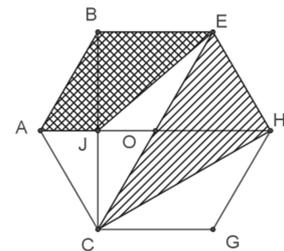
$$b + s = d + q$$



Exercice 6 Art hexagonal

On a colorié deux parties d'un hexagone régulier selon le schéma ci-contre :

La partie hachurée CHE a une aire de 420 cm². Quelle est l'aire de la partie quadrillée BEJA ?



Thème : équations

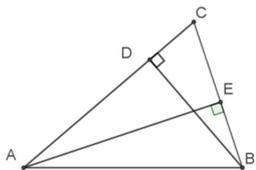
Exercice 1 L'exposant inconnu

Quels sont les nombres entiers x satisfaisant $(x - 5)^{x^2-4} = 1$?

Exercice 2 Le don paisible

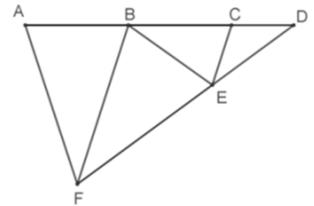
Ali, Ben et Caro possèdent chacun un peu d'argent. Les sommes possédées sont respectivement proportionnelles à 7, 6 et 5. L'un des trois donne 9€ à un des deux autres et les nouvelles sommes possédées sont maintenant proportionnelles à 6, 5 et 4, la somme totale restant inchangée. Quelles étaient les sommes possédées ?

Exercice 3 Des triangles d'Or



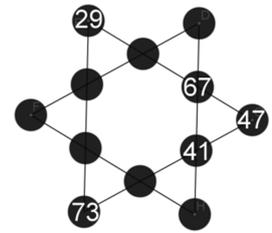
1. L'angle en C du triangle ABC a pour mesure le quadruple de l'angle en A du triangle ABE. L'angle en B du triangle ABC a pour mesure le double de son angle en A. Quelles sont les mesures des angles de ABC ?

2. On construit la figure ci-contre : les triangles ABF et BFE sont isocèles, de sommet principal F, le triangle BCE est isocèle, de sommet principal B. Le point D est l'intersection des droites (AC) et (FE).
a. Montrer que le triangle CED est isocèle si et seulement si le triangle ADF est isocèle. Combien mesurent les angles des triangles ABF et CED dans ce cas ?



Exercice 4 Première étoile

L'étoile ci-contre porte 12 nombres premiers distincts. Le plus grand et le plus petit de ces nombres sont déjà inscrits. Les six séries de quatre nombres ont la même somme. Trouver les nombres manquants.



Exercice 5 Petite université

Les départements de sciences d'une petite université comptent 30 Professeurs d'université (c'est un grade, il y a d'autres enseignants), des mathématiciens, des physiciens, des chimistes et des biologistes. Physiciens et biologistes ensemble atteignent la moitié de l'effectif des mathématiciens. Physiciens et chimistes ensemble forment le double de l'effectif des biologistes. Combien y a-t-il de mathématiciens ?

Exercice 6 Accord de sixte

On demande de trouver six entiers consécutifs et non multiples de 7, dont la somme soit un carré parfait

Exercice 7 Les randonneuses

Anna et Léna partent au même moment, Anna de la ville A vers la ville B, Léna de B vers A. Au moment où elles se croisent, Anna a parcouru 12 km de plus que Léna. Elles continuent leur chemin, Anna pendant 4,5 heures, Léna pendant 8 heures, avant d'atteindre leur but. Quelle distance sépare A de B ?

Thème : probabilités, logique, dénombrement

Exercice 1 Les jolies colonies de vacances

Trois activités sont proposées cette semaine : canoé, natation et pêche. Chaque colon pourra pratiquer au maximum deux de ces activités. 9 ont choisi de ne rien faire, 15 feront du canoé, 22 nageront et 12 pêcheront.

Quel est notre effectif (minimum) ?

Exercice 2 Art rotatif

On dessine sur un carré de 9 cases. Chacune des 9 cases peut être coloriée ou non. Deux motifs sont considérés comme semblables si l'un des deux peut être obtenu à partir du premier au moyen d'une rotation. C'est le cas des deux motifs centraux de la figure ci-contre. Combien de motifs semblables peut-on réaliser ?



On pourra utiliser la feuille annexe pour figurer les résultats.

Exercice 3 Prenez et multipliez

Ali et Dora s'opposent dans le jeu suivant : à chaque triplet de nombres différents choisis parmi {1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 32, 40, 80, 160} on associe le produit des trois nombres. Chaque produit supérieur à 2 017 donne un point à Ali. Lorsque le produit est inférieur à 2 017, le point va à Dora.

1. Combien peut-on composer de triplets ordonnés de nombres différents à partir des nombres proposés ?
2. Combien de ces triplets donnent un produit supérieur à 2 017 ? Qui gagne ?

Exercice 4 Voracité

Je travaille dans une start-up qui met ses employés en concurrence. On me propose de faire signer des contrats à 10 clients potentiels. J'ai réussi avec le premier, échoué avec le second. J'imagine que pour chacun des clients suivants, la probabilité de succès (il signe) sera égale au rapport $\frac{\text{nombre de contrats déjà signés}}{\text{nombre de clients déjà visités}}$. Puis-je espérer garder ma place (c'est-à-dire faire signer 5 contrats ou plus) ?

Exercice 5 Heroic Fantasy

En ce temps-là, notre héros devait, muni de son épée, affronter un dragon doté de trois têtes et trois queues également redoutables. D'un coup d'épée, il pouvait trancher une ou deux têtes ou une ou deux queues, avec les effets suivants :

- Il coupe une tête : il en repousse trois
- il coupe deux têtes : rien ne repousse
- il coupe une queue : il en repousse deux
- il coupe deux queues : il repousse une tête

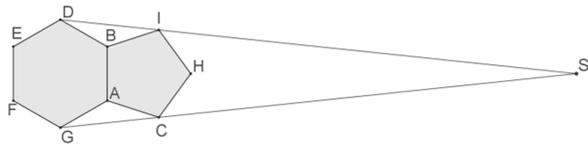
Combien de coups d'épée le héros devra-t-il donner au minimum pour que le dragon n'ait plus ni queue ni tête ?

Exercice 6 Stars du Disco

On forme des chaînes de 10 caractères avec les lettres A et B. Par exemple, ABBBABAABB en est une. Combien peut-on former de telles chaînes ne faisant pas apparaître ABBA ?

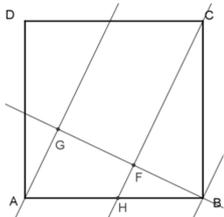
Thème : angles et distances

Exercice 1 Bijou de mathématicien



Pour se distinguer d'un éminent collègue arborant des araignées, un mathématicien pas (pas encore...) célèbre se fait confectionner une broche constituée d'un hexagone régulier et d'un pentagone régulier de même côté accolés, terminée par une épingle, comme sur la figure ci-contre. Quelle est la mesure de l'angle en S ?

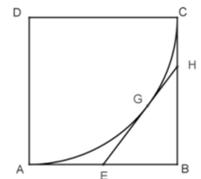
Exercice 2 Carré coupé



Trois droites parallèles passent par trois sommets d'un carré. La distance GF vaut 5, la distance GB vaut 7 (la figure n'est pas juste). Quel est le côté du carré ?

Exercice 3 Tangente dans un coin

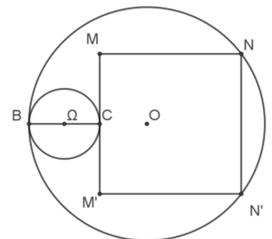
Le carré ABCD a pour côté 1. Le point E est le milieu du côté [AB]. Par E, on mène la tangente au quart de cercle de centre D d'extrémités A et C. Cette tangente touche le quart de cercle en G et coupe le côté [BC] en H. Quelle est la longueur du segment [EH] ?



Exercice 3 Un carré entre deux cercles

Le cercle de centre Ω et de rayon 3 est tangent intérieurement au cercle de centre O et de rayon 10. La droite (BC) passe par O. Un carré dont le côté [MM'] est tangent en C au cercle de centre Ω a pour autres sommets des points N et N' du cercle de centre O. Quelle est la longueur de [MM'] ?

Après raisonnement, on choisira la réponse parmi les nombres 4, 5, 6, 7 et 8.

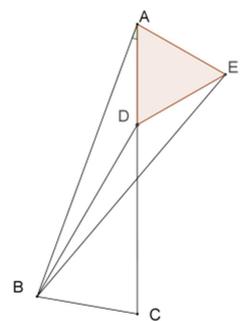


Exercice 5 20 degrés

Le triangle isocèle ABC, de sommet principal A, a un angle au sommet de mesure 20° . Sur la demi-droite [AC), on place le point D tel que $AD = BC$.

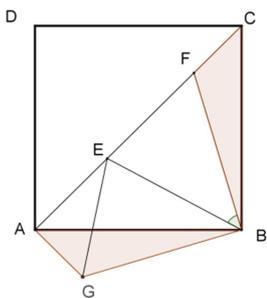
Quelle est la mesure de l'angle \widehat{BDC} ?

Indication : on pourra considérer le triangle équilatéral DAE (le point E étant de l'autre côté de (AC) que B).



Exercice 6 Un découpage pythagoricien

Sur la diagonale [AC] du carré ABCD, on place les points E et F tels que $\widehat{EBF} = 45^\circ$. Montrer que $EF^2 = AE^2 + FC^2$.



Cette figure peut aider.

Thème : nombres

Exercice 1 Développement illimité pour trois inconnues

Trouver trois entiers a, b et c tels que $\frac{a}{7} + \frac{b}{11} + \frac{c}{13} = 0,946\ 053\ 946\ 053\ 946\ 053\ \dots$

Le nombre figurant au second membre de l'égalité est un rationnel dont on a donné la période 946 053.

Exercice 2 Éloge du calcul littéral

On dispose de 10 000 cartes, marquées chacune d'un entier. Tous les entiers compris entre 1 et 10 000 sont utilisés.

On décide d'ôter du paquet toutes les cartes marquées d'un carré parfait. Cela fait, on renumérote les cartes, et on recommence. Combien de telles manœuvres faudra-t-il pour qu'il ne reste plus qu'une seule carte ?

Exercice 3 Olympiades nationales 2016 (très partiel)

À tout nombre entier x s'écrivant avec trois chiffres dans le système décimal, on associe la somme $A(x)$ des carrés de ses chiffres. On a ainsi $A(100) = 1$ et $A(999) = 343$. Quelle est la plus grande valeur de la différence $\Delta(x) = x - A(x)$?

Exercice 4 Beaucoup de bruit pour rien

Écrire de façon concise le nombre
$$N = \frac{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{6}\right)\dots\left(1+\frac{1}{2\ 014}\right)\left(1+\frac{1}{2\ 016}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\dots\left(1-\frac{1}{2\ 014}\right)\left(1-\frac{1}{2\ 016}\right)}$$

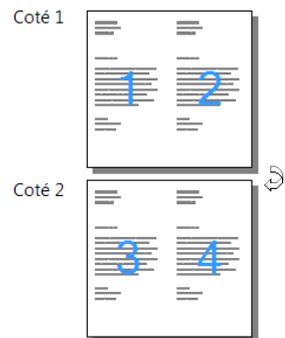
Exercice 5 Zéro papier (pas tout-à-fait)

Dans ma start-up, j'ai instauré un système draconien d'économie de papier. Jusque-là, j'avais limité la longueur des documents à imprimer à 10 pages A4. Aujourd'hui, je vais plus loin : les documents papier devront être imprimés en recto-verso, et chaque face A4 fera apparaître 2 pages en format réduit (voir figure).

On suppose que toutes les longueurs de document – entre une page et dix pages – sont également rencontrées.

Quelle est en pourcentage l'économie réalisée ? Que serait ce pourcentage si les effectifs de tirage selon la longueur suivaient la distribution :

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|----|---|---|---|---|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 8 | 7 | 4 | 3 | 2 |



Exercice 6 Quinte de carrés

1. Le nombre 1 815 est la somme des carrés de cinq entiers consécutifs. Lesquels ?
2. Montrer que la somme des carrés de cinq entiers consécutifs est un multiple de 5.
3. Quels sont les entiers à la fois somme des carrés de cinq entiers consécutifs et somme de cinq entiers consécutifs ?

Thème : algorithmes et programmation

Exercice 1 La machine à assembler

La machine à assembler peut réaliser deux opérations sur des chaînes de caractères :

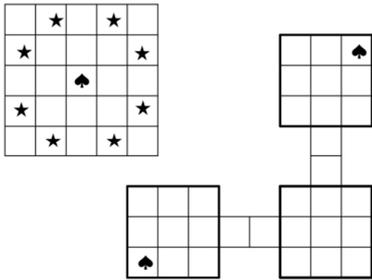
1. L'opération COLLER (notée +) qui consiste à faire une seule chaîne avec deux. Par exemple *mer+ci* donne *merci*
2. L'opération RETOURNER (notée R) qui consiste à intervertir l'ordre des caractères de la chaîne. Par exemple, R(*rein*) donne *nier*

Trois chaînes de caractères, notées 1, 2 et 3, ont été fournies à la machine, qui a exécuté le programme :

$$R(1+2)+3$$

En sortie, on a obtenu le mot VON NEUMANN. Quelles étaient ces chaînes de caractères (on précise que l'espace est un caractère et que chacune de ces trois chaînes était de longueur inférieure ou égale à 4) ?

Exercice 2 Un cavalier, deux ponts



La règle concernant le déplacement du cavalier est rappelée à gauche : de la case marquée d'un ♠, il peut atteindre chacune des huit cases marquées d'une étoile. Le cavalier doit effectuer le parcours de droite, comportant deux ponts, et aller d'un ♠ à l'autre. Déterminer les trajets (ou le trajet) comportant le plus petit nombre de déplacements.

Exercice 3 Un classique pour les logiciens

On dispose de cartes dont un côté est marqué d'une lettre et l'autre d'un nombre entier. Le logicien affirme : « parmi ces quatre cartes, celles qui sont marquées d'une voyelle d'un côté portent un nombre pair de l'autre côté ». Voici les cartes posées sur la table :



Combien de cartes est-il nécessaire de retourner pour contredire (éventuellement) le logicien ?
Lesquelles ?

Exercice 4 En rang par un, par deux, par quatre, etc.

Sur la première ligne du tableau ci-contre on a inscrit « 0 ». Sur la seconde figurent deux « 1 », sur la troisième figurent quatre « 0 », ainsi de suite.

```

0
1 1
0 0 0 0
1 1 1 1 1 1 1 1
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
1 1 1 ... ..
    
```

En tout, 511 symboles ont été écrits. Combien de « 0 », combien de « 1 » ?

Exercice 5 Demi-tour



Quatre verres sont posés dans le bon sens, un est à l'envers. Parmi les cinq, on en choisit trois qu'on retourne (ils ne sont pas nécessairement voisins). Peut-on espérer qu'après un certain nombre de telles opérations, les verres seront tous dans le bon sens ? Combien ?

Exercice 6 Trois lignes de programme

Que fait le programme ci-contre ?

| |
|----------------------|
| $A \leftarrow A + B$ |
| $B \leftarrow A - B$ |
| $A \leftarrow A - B$ |

Exercice 7 Premier entré, dernier sorti

La procédure P1 transforme la chaîne de caractère M-A-T-H-S en S-H-T-A-M (elle retourne la chaîne). La procédure P2 transforme la même chaîne en S-A-T-H-M (elle échange le premier et le dernier caractère).

Que fait la procédure combinée P1-P2-P1 ?

Exercice 8 Un successeur d'Epiménide

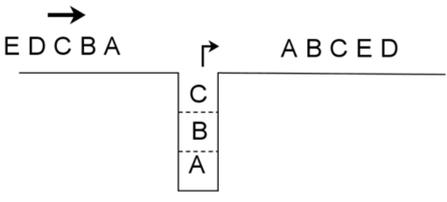
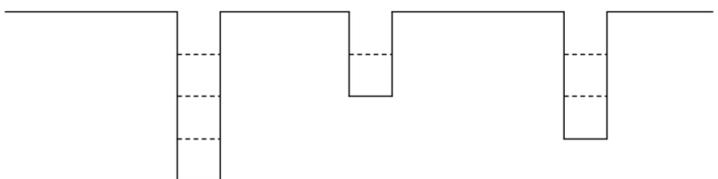
Mon comportement dépend du jour de la semaine : le lundi, le mercredi et le vendredi, je dis toujours la vérité. Les autres jours, je ne prononce que des affirmations fausses.

Demain, je dirai la vérité.

Quel jour sommes-nous ?

Exercice 9 Une randonnée semée d'embuches

Le parcours de cette randonnée est difficile : on peut tomber dans des trous. Si A, B et C, qui se suivent dans cet ordre, tombent dans un trou, ils attendent le passage du reste de la troupe, qui les aide à sortir ans l'ordre inverse de celui dans lequel ils sont tombés.

| Exemple | Question |
|---|--|
| <p>sens de la marche → E D C B A A B C E D</p>  | <p>→ G F E D C B A</p>  <p>Quel sera l'ordre d'arrivée dans ce cas ?</p> |

Exercice 10 Deux sacs de billes

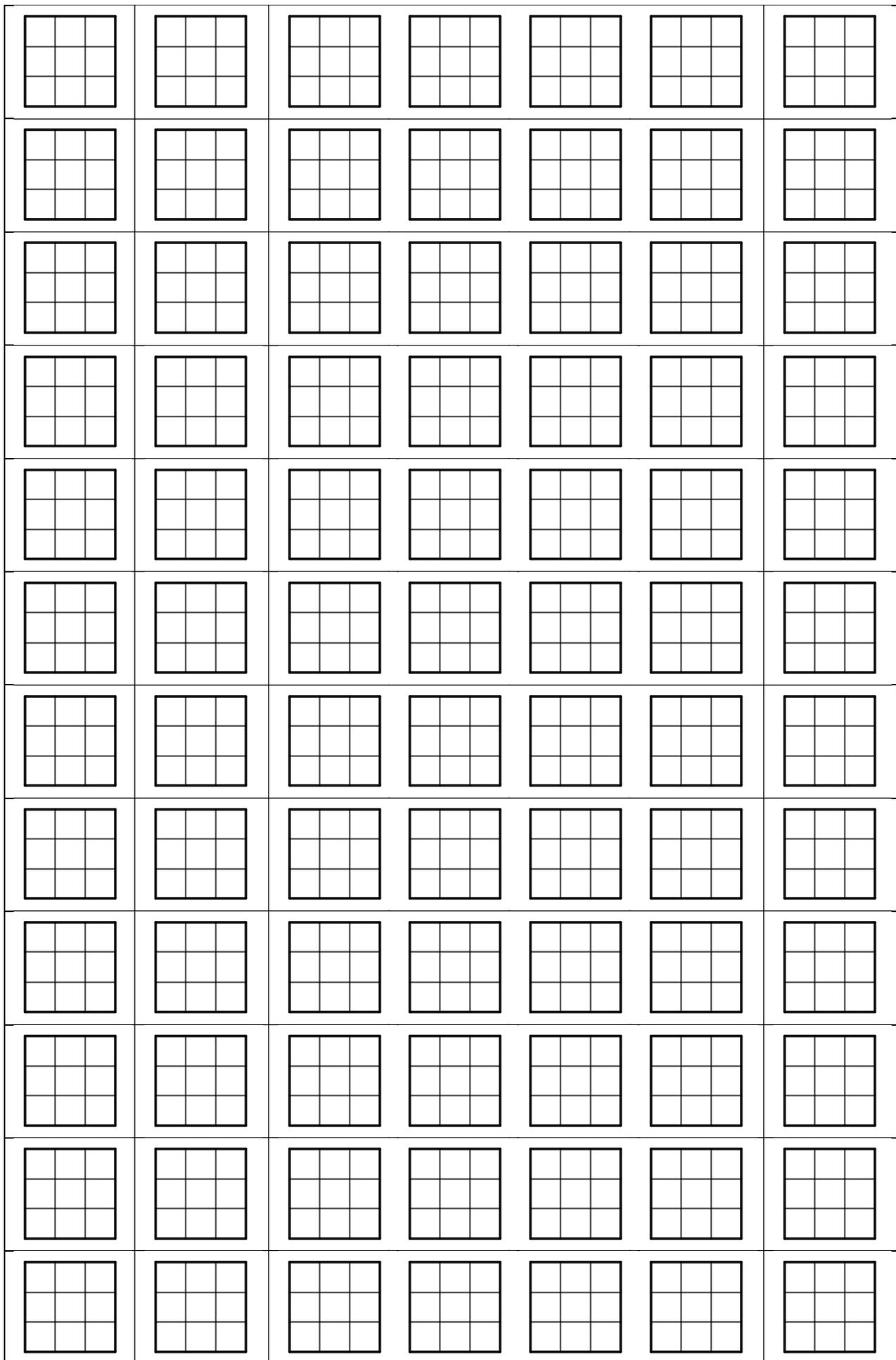
Des billes sont disposées dans deux sacs. On suppose que le nombre total de billes permet de réaliser *ad libitum* les opérations suivantes :

Opération A : ôter le même nombre de billes de chacun des sacs

Opération B : doubler le nombre de billes contenues dans un des sacs

Écrire un programme permettant de vider les deux sacs.

La chose serait-elle possible si l'opération B était remplacée par : tripler le nombre de billes contenues dans un des sacs ?



Pour étudier l'exercice 2 du thème Probabilité, logique, dénombrement