ACADÉMIE
DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Lycée Marie Curie
VERSAILLES

Lycée Camille Pissarro
PONTOISE

Comment écrire les nombres ?

Le système d'écriture (indien puis) arabe pénètre en Europe au Xe siècle. Un système d'écriture des fractions décimales, et donc des nombres décimaux, est publié en 1585 dans *La Disme* de Simon Stevin (1548 – 1620), ingénieur, linguiste, physicien, mathématicien et musicien flamand (on lui doit la gamme tempérée, un parallélogramme des forces et une consolidation de la langue néerlandaise). Les jetons et des mesures d'usage régional ou catégoriel subsistent au moins jusqu'à la Révolution française et la mise en place du système décimal.

La naissance du calcul par les machines suscite de nouvelles recherches, et Algirdas Antanas Aviziénis (né en 1932), informaticien lituanien professeur à UCLA propose un système à chiffres signés, évitant la propagation de retenues.

Stage ouvert aux lycéennes et lycéens des classes de seconde – 24 et 25 avril 2023

La Pépinière académique de mathématique organise, bénévolement, des regroupements d'élèves désignés par leurs établissements. Quatre niveaux sont habituellement concernés : les collégiens de troisième en octobre, les lycéens de première début janvier, les lycéens de terminale présentés au concours général en février et les lycéens de seconde en avril.
La Pépinière s'est assurée du concours de partenaires qui hébergent traditionnellement nos stages : l'université de Versailles Saint Quentin en Yvelines, le centre INRIA de Saclay-Île de France et le siège INRIA à Rocquencourt, le lycée Camille Pissarro de Pontoise, le collège Paul Fort de Montlhéry, le lycée Vallée de Chevreuse à Gif sur Yvette, le lycée La Bruyère, le lycée Marie Curie et le lycée Hoche de Versailles. Elle a reçu le soutien de l'Institut de hautes études scientifiques de Bures-sur-Yvette.
Les élèves sont désignés et recensés par leurs établissements, parce que l'éducation nationale est responsable des élèves qui lui sont confiés, et donc des projets et des actions auxquels ils sont invités à participer. Une appétence et un répondant minimum sont attendus des élèves.

Le secrétariat opérationnel : Frédérique CHAUVIN, rectorat de Versailles
Les inspectrices et inspecteurs : Luca AGOSTINO, Nicolas FIXOT, Xavier GABILLY, Catherine GUFFLET, Catherine HUET, Éric LARZILLIÈRE, Anne MENANT, Jean-François REMETTER, Charles SEVA, Christoph VITALIS, Christine WEILL et les retraités Anne ALLARD, Pierre MICHALAK, Évelyne ROUDNEFF

Les intervenants professeurs : Bruno BAUDIN (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Christophe DEGUIL (Lycée Notre Dame, SAINT GERMAIN EN LAYE), Sacha DHÉNIN (Collège Jean Jaurès, POISSY), Thomas DUMAS (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Laurent GRIERE (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Catherine HOUARD (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), François LAVALLEE (Lycée Charles de Gaulle, POISSY), François L'OFFICIAL (Lycée Charles de Gaulle, POISSY), Pierre MONTPERRUS (Lycée Jeanne d'Albret, SAINT GERMAIN EN LAYE), Sébastien MOULIN (Lycée Jules Ferry, VERSAILLES)

Professeurs accompagnants : Caroline BODIN-TOUZERY, Cécile HECHT (Lycée Viollet-le-Duc, VILLIERS SAINT FREDERIC)

Emploi du temps
Lundi 24 avril 2023

Pontoise		***Versailles***			
10	**Géométrie** **LG**	10	**Arithmétique** **SM**	**Géométrie** **PMo**	**Équations** **FLa**
12.10		12.10	**Repas**		
13.10	**Équations** **FL**	13.10	**Équations** **Fla**	**Arithmétique** **SM**	**Dénombrement** **CD**
15.20	**Quiz**	15.20	**Quiz** **CD**	**Quiz** **SD**	**Quiz** **PMo**

Mardi 25 avril 2023

Pontoise		***Versailles***			
		10	**Calculs approchés** **PMi**		
10	**Dénombrement** **BB**	11	**Géométrie** **PMo**	**Dénombrement** **SD**	**Arithmétique** **CD**
12. 10		13	**Repas**		
13.10	**Arithmétique** **CH**	14	**Dénombrement** **SD**	**Équations** **FLa**	**Géométrie** **PMo**
15.20	**Calculs approchés** **PMi**	16	**Film**		

Arithmétique et nombres

1. Montrer que tout nombre premier strictement supérieur à 3 suit ou précède immédiatement dans la suite des entiers un multiple de 6.

Pour tout entier n strictement supérieur à 3, le reste de la division euclidienne de n par 6 est un entier compris entre 0 et 5 (au sens large) donc il existe un entier k tel que $n = 6k$ ou $n = 6k + 1$ ou $n = 6k + 2$ ou $n = 6k + 3$ ou $n = 6k + 4$ ou $n = 6k + 5$.
Comme $6k$ est multiple de 6, $6k + 2$ est multiple de 2, $6k + 3$ est multiple de 3 et $6k + 4$ est multiple de 2, si l'entier n est premier alors $n = 6k + 1$ ou $n = 6k + 5 = 6(k + 1) - 1$.

2. Déterminer un nombre entier strictement positif x de quatre chiffres (le chiffre des milliers étant non nul) tel que si y désigne le nombre écrit en retournant les chiffres de x alors $y = 4x$.

Il existe quatre entiers a, b, c, d compris entre 0 et 9 tels que $x = 1\,000a + 100b + 10c + d$ et $a \neq 0$.
L'équation $y = 4x$ s'écrit alors $1\,000d + 100c + 10b + a = 4\,000a + 400b + 40c + 4d$. (*)
Cette équation nécessite que a soit pair (le chiffre des unités a de y doit être celui de $4d$) et il ne peut être égal à 4, 6 ou 8 car alors y aurait plus de 4 chiffres ($4\,000a \geq 10\,000$). Donc $a = 2$ et $x \geq 2\,000$ d'où $y \geq 8\,000$.
On en déduit que $d = 3$ ou $d = 8$ (pour que le chiffre a des unités de y soit 2) et que $d = 8$ pour que $y \geq 8\,000$.
L'équation (*) s'écrit alors $100c + 2 = 400b + 40c + 32$ soit $2c = 13b + 1$.
Comme $0 \leq c \leq 9$, $0 \leq 2c \leq 18$, la seule possibilité est $b = 1$ et $c = 7$.
La seule solution est donc le nombre 8 172.

3. Un *alphamétique* est un petit casse-tête mathématique qui consiste en une équation où les chiffres sont remplacés par des lettres (le même chiffre ne peut être représenté par deux lettres différentes, une lettre représente toujours le même chiffre et un nombre ne doit jamais commencer par zéro). Le résoudre consiste à trouver quelle lettre correspond à quel chiffre pour que l'équation soit vérifiée.
Résoudre l'alphamétique suivant : AMQMA × 6 = LUCIE.

Le produit ne devant avoir que 5 chiffres, nécessairement A correspond au chiffre 1 et donc E correspond au chiffre 6.
Si M représente un chiffre pair, il existe un entier k tel que M corresponde à $2k$ d'où 6M à $12k = 10k + 2k$. Mais alors I et M représentent le même chiffre 2k, ce qui est impossible. Donc M représente un chiffre impair qui est de plus strictement inférieur à 7 (sinon, avec la retenue de 4, le résultat du produit sera un nombre à 6 chiffres).
Donc M représente 3 ou 5.
Si M représente 3, alors I représente 8 et en testant toutes les valeurs représentées par Q, la seule valeur de Q ne répétant pas le même chiffre dans LUCIE est 2 mais alors le produit est 79 386 et 3 est représenté à la fois par M et par C, ce qui est impossible.
Si M représente le chiffre 5, alors I représente 0 et on procède de même. La seule valeur associée à Q qui ne donne aucune répétition est alors 4 et la seule solution du problème est pour l'opération $15\,451 \times 6 = 92\,706$.

4. Un triangle rectangle est appelé pythagoricien si ses trois côtés sont des nombres entiers.
Démontrer que si un nombre premier $p > 2$ divise le périmètre d'un triangle rectangle pythagoricien, alors p divise au moins l'un des deux côtés de l'angle droit.
(On admettra que si p est un nombre premier diviseur d'un produit d'entiers ab alors il divise a ou il divise b)

Soit a et b les longueurs des côtés de l'angle droit. Alors la longueur de l'hypoténuse est $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.
Soit p un nombre premier strictement supérieur à 2 et divisant le périmètre $a + b + c$ du triangle rectangle.
Montrons que p divise a ou p divise b.
En appliquant la division euclidienne de $a + b$ par p, il existe deux entiers n et r tels que $a + b = np + r$ et $0 \leq r < p$.

Comme p divise $a+b+c$, il, existe un entier m tel que $a+b+c=mp$ soit $c=(m-n)p-r$.
On a alors $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$.
Or $(a+b)^2=(np+r\,)^2=n^2p^2+2npr+r^2=Np+r^2$ où $N=n^2p+2nr$ est un entier.
Et $a^2+b^2=c^2=((m-n)p-r)^2=(m-n)^2p^2+2(m-n)pr+r^2=Mp+r^2$
où $M=(m-n)^2p+2(m-n)p$ est un entier.
On en tire $2ab=\ Np+r^2-(Mp+r^2)=(N-M)p$ d'où p divise le produit $2ab$. Comme p est un nombre premier et $p>2$, on en déduit que p divise a ou p divise b.

Autre proposition de solution :

Si p divise $a+b+c$ alors il existe un entier m tel que $mp=a+b+c$. En élevant cette égalité au carré, on obtient $m^2p^2=a^2+b^2+c^2+2c(a+b)\ +2\,ab$ (1).
En substituant a^2+b^2 et $a+b$ dans (1) avec l'égalité de Pythagore $c^2=a^2+b^2$ et la relation $a+b\ =\ mp-c$, on obtient $m^2p^2=2c^2+2c(mp-c)\ +\ 2\,ab$
d'où $p(m^2p\ -2cm)=2ab$ et donc p divise $2ab$.

5. Soit m et n deux entiers strictement positifs tels que $3m^3=5n^5$.

a. Montrer que 3 et 5 sont des diviseurs de m et n.
(On admettra que si p est un nombre premier diviseur d'un produit d'entiers ab alors il divise a ou il divise b)

b. Déterminer la plus petite valeur possible de $m+n$.

a. Comme $3m^3=5n^5$ et $3m^3$ est un multiple de 3 alors $5n^5$ est aussi un multiple de 3. Or 5 n'est pas un multiple de 3 et 3 est un nombre premier donc n^5 est un multiple de 3. De plus 3 est un nombre premier donc n est lui-même un multiple de 3.
On en déduit que $5n^5$ est un multiple de 3^5 comme alors $3m^3$ d'où m^3 est aussi multiple de 3 (qui est un nombre premier) donc m est lui-même multiple de 3.
On démontre de même que n est un multiple de 3 et de 5.

b. D'après la question précédente, il existe deux entiers strictement positifs r et s et quatre entiers strictement positifs a,b,c,d tels que $m=3^a5^br$ et $n=3^c5^ds$ et 3 comme 5 ne divisent ni r ni s.
L'égalité $3m^3=5n^5$ s'écrit alors $3\left(3^a5^br\,\right)^3=5\left(3^c5^ds\right)^5$ soit $3^{3a+1}5^{3b}r^3=3^{5c}5^{5d+1}s^5$.
Comme 3 et 5 ne divisent ni r ni s, on en déduit (unicité de la décomposition en facteurs premiers) :
$3^{3a+1}=3^{5c}$, $5^{3b}=5^{5d+1}$ et $r^3=s^5$.
Pour que les entiers strictement positifs m et n soient les plus petits possibles, on doit avoir $r=s=1$ et, par unicité de la décomposition en facteurs premiers, $3a+1=5c$ et $3b=5d+1$. On cherche donc les plus petits entiers strictement positifs a,b,c,d tels que $3a+1=5c$ et $3b=5d+1$.
Pour $a=1$ ou $a=2$, $3a+1$ n'est pas un multiple de 5. Pour $a=3$, $3a+1=10=5\times 2$.
De même, pour $d=1$, $5d+1=6=3\times 2$.
Donc les plus petits entiers strictement positifs m et n répondant à la question sont $m=3^35^2=675$ et $n=3^25^1=45$ et la plus petite somme $m+n$ est $675+45=720$.

6. Un nombre Pretti est un entier strictement positif de sept chiffres tel que :

- L'entier formé par ses trois chiffres les plus à gauche est un carré parfait. (1)
- L'entier formé par ses quatre chiffres les plus à droite est un cube parfait. (2)
- Son chiffre des dizaines de mille est égal à celui des unités. (3)
- Son chiffre des milliers n'est pas égal à zéro. (4)

Combien y a-t-il de nombres Pretti ?

Soit N un nombre Pretti, il existe 6 entiers a,b,c,d,e,f compris, au sens large, entre 0 et 9 tel que l'écriture décimale de N soit $a\,bcd\,efg$.La condition (1) se traduit par abc est l'un des carrés $10^2,11^2,\dots,31^2$ car $9^2=81$ ne comporte que deux chiffres et $32^2=1\,024$ en comporte quatre alors que ceux cités précédemment en comporte bien trois. La condition (2) se traduit par $d\,efg$ est un cube parfait et, d'après la condition (4), $d>0$.
Comme $9^3=729$ ne comporte que trois chiffres, $22^3=10\,648$ en comporte cinq alors que $10^3=10\,000$ et $21^3=9\,261$, $d\,efg$ est l'un des cubes $10^3,11^3,\dots,21^3$.

La condition (3) se traduit par $c = g$ c'est-à-dire le chiffre des unités de abc et celui de $d\,efg$ sont égaux.
Après avoir posé $abc = n^2$ et $d\,efg = m^3$ et regardé les chiffres des unités des carrés et des cubes de 1 à 9, on rassemble dans deux tableaux les différents cas possibles :

Chiffre des unités de n^2	Chiffres des unités possibles de n
0	0
1	1, 9
4	2, 8
5	5
6	4, 6
9	3, 7

On en déduit déjà que les valeurs possibles pour c et g sont 0, 1, 4, 5, 6 et 9.

Chiffre des unités de m^3	Chiffre des unités de m
0	0
1	1
2	8
3	7
4	4
5	5
6	6
7	3
8	2
9	9

En fonction de la valeur commune à c et g, on peut maintenant dresser le tableau suivant :

Chiffre c et g	Carrés possibles	Cubes possibles	Nombres de nombres Pretti
0	$10^2, 20^2, 30^2$	$10^3, 20^3$	6
1	$11^2, 19^2, 21^2, 29^2, 31^2$	$11^3, 21^3$	10
4	$12^2, 18^2, 22^2, 28^2$	14^3	4
5	$15^2, 25^2$	15^3	2
6	$14^2, 16^2, 24^2, 26^2$	16^3	4
9	$13^2, 17^2, 23^2, 27^2$	19^3	4

$6 + 10 + 4 + 2 + 4 + 4 = 30$. Il y a donc 30 nombres Pretti.

7. Le système d'Aviziénis

Dans une note oubliée en 1840 dans les *Comptes rendus de l'académie des sciences*, Augustin-Louis Cauchy propose un système d'écriture des nombres entiers utilisant des chiffres signés. En 1961, l'informaticien Algirdans Antanas Aviziénis, qui ne connaissait pas la proposition de Cauchy, décrit un système plus général.
Si on utilise les chiffres $0, 1, 2, 3, 4, 5, \bar{5}, \bar{4}, \bar{3}, \bar{2}, \bar{1}$, la suite des premiers entiers naturels peut s'écrire :
$0, 1, 2, 3, 4, 5, 1\bar{4}, 1\bar{3}, 1\bar{2}, 1\bar{1}, 10, etc$. Le chiffre signé est le nombre qu'il faut ôter de la dizaine située plus à gauche.
a. Comment écrire $1\,789$? Quelles sont, dans le système décimal ordinaire, les écritures des nombres que le système de Cauchy-Aviziéns écrit $2\bar{3}\bar{1}$ et $3\bar{4}\bar{4}$?
b. On pose les additions comme à l'accoutumée, mais il faut prendre garde aux retenues, qui peuvent être négatives.
Deux exemples :

$$\begin{array}{cccc} & 3 & \bar{4} & 2 \\ + & 1 & 3 & \bar{3} \\ \hline = & & & \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & 3 & \bar{5} & \bar{4} \\ & 5 & 4 & \bar{4} \\ \hline = & & & \end{array}$$

a. $1\,789$ s'écrit $2\,\bar{2}\bar{1}\bar{1}$. $2\bar{3}\bar{1}$ est, dans le système décimal, 169 et $3\bar{4}\bar{4}$ est 256
b. Pour la première, pas de difficulté, on trouve $4\bar{1}\bar{1}$, pour la seconde $8\bar{2}2$

Géométrie plane

1. Autour du triangle équilatéral

a. Montrer que la hauteur d'un triangle équilatéral de côté a est égale à $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

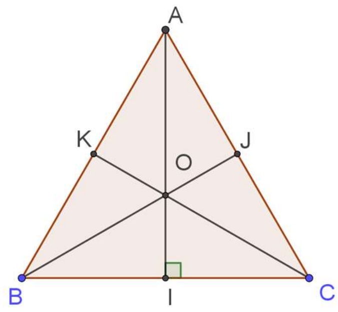
b. Montrer que le centre du cercle circonscrit d'un triangle équilatéral est situé au tiers de chaque hauteur en partant de la base.

a. Dans un triangle équilatéral, toute hauteur est aussi médiatrice donc le pied I de la hauteur issue de A est aussi le milieu de [BC], donc en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle AIC rectangle en I,

on a $\mathrm{AI}^2 = \mathrm{AC}^2 - \mathrm{IC}^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}a^2$ d'où $\mathrm{AI} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

b. Le centre O du cercle circonscrit au triangle est le point d'intersection des médiatrices. Le triangle ABC étant équilatéral, O est centre de symétrie et l'aire de ABC est trois fois celle de OBC.

Ceci s'écrit $\frac{\mathrm{AI}\times\mathrm{BC}}{2} = 3 \times \frac{\mathrm{OI}\times\mathrm{BC}}{2}$ d'où $\mathrm{AI} = 3\mathrm{OI}$.

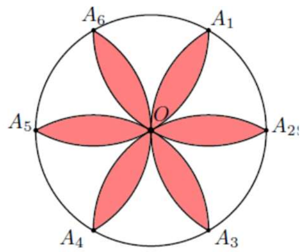


2. Calculs d'aires

a. Sur la figure ci-contre, les six points $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ sont régulièrement répartis sur le cercle et déterminent six demi-cercles passant par le centre O du cercle.

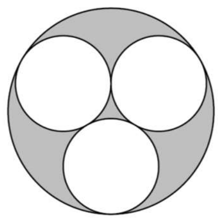
La rosace obtenue comporte donc six pétales.

Déterminer l'aire de la figure formée par ces six pétales sachant que le rayon du cercle est égal à 10.



b. Sur la figure ci-contre, on a représenté le dessus d'une toupie à main.
Les courbes entre deux points sont tous des arcs de cercle de rayon 1.
En leur point de contact, les tangentes aux deux arcs sont confondues.
La toupie est supposée bien équilibrée et présente donc trois axes de symétrie.
Déterminer l'aire de cette figure.

c. On inscrit trois cercles de rayon 1 dans le plus petit cercle possible de manière à ce que les trois cercles soient deux à deux tangents.
Déterminer l'aire de la région grisée.



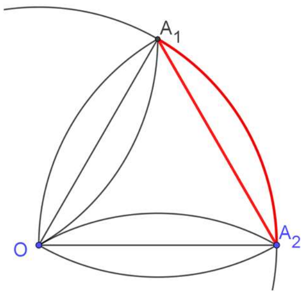
a. Si on considère la figure ci-contre, le triangle OA_1A_2 est un triangle équilatéral puisque l'angle en O mesure $\frac{360°}{6} = 60°$ et $OA_1 = OA_2 = 10$.

L'aire A d'un demi-pétale est égale à l'aire de la portion de disque comprise entre le segment $[A_1A_2]$ et l'arc correspondant.

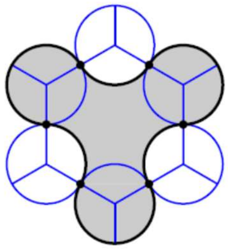
Cette aire est égale à celle d'un sixième de disque auquel on retire le triangle équilatéral OA_1A_2.

Donc $A = \frac{1}{6}\pi \times 10^2 - \frac{1}{2} \times 10 \times \frac{10\sqrt{3}}{2}$.

L'aire de la rosace est donc $S = 12\left(\frac{100\pi}{6} - 25\sqrt{3}\right) = 200\pi - 300\sqrt{3}$.



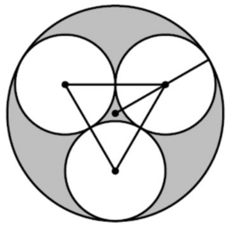
b. En complétant la figure donnée comme ci-contre, on obtient six cercles identiques dont les centres forment par symétrie un hexagone régulier.



En découpant chacun des six disques en trois portions identiques et en déplaçant trois de ces portions de disques, on reconstitue l'hexagone régulier.
L'aire A cherchée est donc celle de l'hexagone auquel on ajoute trois autres portions soit un disque complet.
L'hexagone a des côtés de longueurs 2. Son aire est 6 fois celle d'un triangle équilatéral de côté 2.

Donc $A = 6 \times \frac{2\sqrt{3}}{2} + \pi \times 1^2 = 6\sqrt{3} + \pi$.

c. On cherche d'abord le rayon du grand cercle en traçant le triangle dont les sommets sont les centres due trois petits cercles.

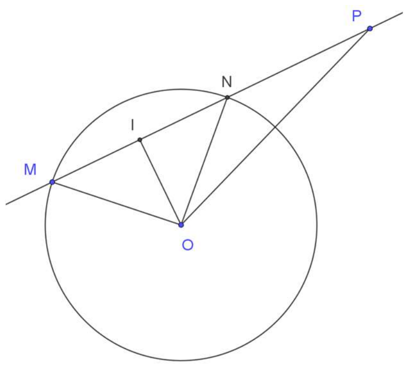


Ce triangle est équilatéral de côté 2 puisque les petits cercles sont identiques, tangents en leur points de contact (situés donc aux milieux des segments joignant les centres) et de rayon 1.
La hauteur de ce triangle équilatéral est donc $h = \sqrt{3}$ et puisque le centre de ce triangle est situé au tiers de la hauteur en partant de la base donc aux deux tiers en partant du sommet, le rayon du cercle est :
$R = \frac{2}{3}h + 1 = \frac{2}{3}\sqrt{3} + 1$.
Pour calculer l'aire A de la région grisée, on soustrait l'aire des trois petits disques à l'aire du grand.

$$A = \pi R^2 - 3\,\pi = \pi\left(\left(\frac{2}{3}\sqrt{3} + 1\right)^2 - 3\right) = \pi\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 1\right)^2 - 3\right) = \pi\left(\frac{4}{3} + 1 + \frac{4}{\sqrt{3}} - 3\right) = \frac{\pi}{3}(4 - 6 + 4\sqrt{3})$$

Soit $A = \frac{\pi}{3}(4\sqrt{3} - 2)$.

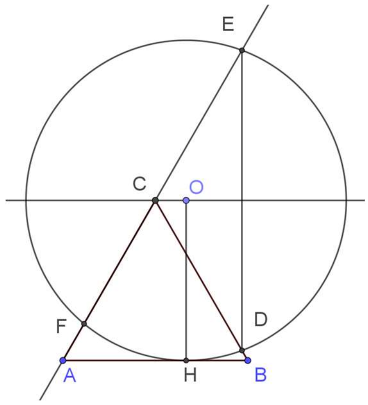
3. On considère un cercle et un point P extérieur au cercle. On trace toutes les droites passant par P et sécantes au cercle en deux points, qu'on note M et N.
Montrer que les milieux des segments [MN] sont tous situés sur un même cercle à déterminer.



Soit O le centre du cercle. Les points M et N étant sur le cercle, OM = ON.
De plus, par définition, IM = IN.
La droite (OI) est donc la médiatrice du segment [MN].
On en déduit que la droite (OI) est perpendiculaire à la droite (MN) et que le triangle OIP est rectangle en I.
Propriété : tout triangle rectangle est inscrit dans un cercle de diamètre l'hypoténuse.
Le point i est donc situé sur le cercle de diamètre [PO].

4. Soit ABC un triangle équilatéral de hauteur 1. Un cercle de rayon 1 et de centre O situé du même côté de (AB) que C roule le long du segment [AB].
Montrer que l'arc du cercle à l'intérieur du triangle a toujours la même longueur.

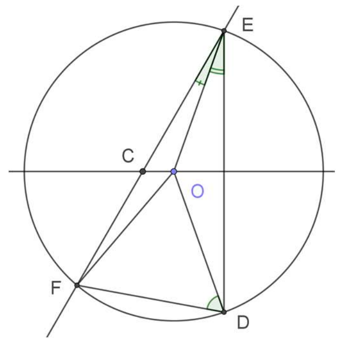
Comme le cercle roule sur [AB] et a même rayon que la hauteur du triangle ABC, le centre O est situé sur la parallèle (d) à (AB) passant par C.



Si on note :

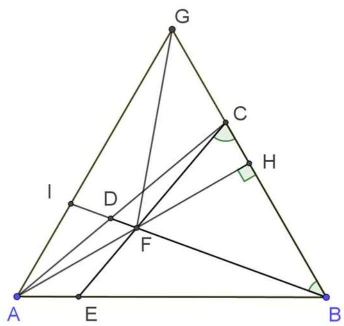
- D le point d'intersection de [BC] avec le cercle
- E le point d'intersection de (AC) avec le cercle et situé en dehors du segment [AC]

comme sur la figure ci-contre, alors $\widehat{\mathrm{BCO}} = \widehat{\mathrm{ABC}} = 60°$ (angles alternes-internes). On en déduit, puisque le point C appartient au segment [AE], que $\widehat{\mathrm{ECO}} = 180° - \widehat{\mathrm{ACB}} - \widehat{\mathrm{BCO}} = 180° - 60° - 60° = 60° = \widehat{\mathrm{BCO}}$.
De plus, la droite (d) passe par le centre du cercle et est donc un axe de symétrie du cercle. La symétrie d'axe (d) envoie donc la droite (CE) sur la droite (CB). Comme E est le point d'intersection du cercle avec (CE) et D est le point d'intersection du cercle avec (CB), on en déduit que D est le symétrique de E par rapport à (d).
Le triangle CDE est donc isocèle en C
d'où $\widehat{\mathrm{CED}} = \widehat{\mathrm{CDE}} = \frac{1}{2}\left(180° - \widehat{\mathrm{DCE}}\right) = \frac{1}{2}\left(180° - (180° - \widehat{\mathrm{ACB}}\right) = \frac{1}{2}\widehat{\mathrm{ACB}} = 30°$.



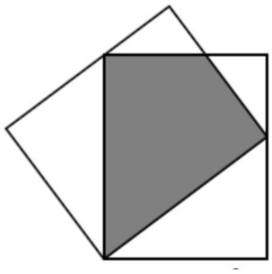
Pour démontrer que l'arc d'extrémités F et D situé à l'intérieur du triangle est de longueur constante, on va montrer que l'angle au centre correspondant est de mesure constante.
Si on note $a = \widehat{\mathrm{DEO}} = \widehat{\mathrm{ODE}}, b = \widehat{\mathrm{FDO}} = \widehat{\mathrm{DFO}}, c = \widehat{\mathrm{OEF}} = \widehat{\mathrm{EFO}}$ (triangles isocèles en O), on a en se plaçant successivement dans les triangles EFD et OFD :
$2a + 2b + 2c = 180°$ soit $a + b + c = 90°$
et $\widehat{\mathrm{OFD}} = 180° - 2b = 180° - 2(90° - a - c) = 2(a + c) = 2\widehat{\mathrm{FED}} = 2\widehat{\mathrm{CED}}$
soit $\widehat{\mathrm{OFD}} = 60°$ ce qui prouve que l'arc d'extrémités F et D situé à l'intérieur du triangle est de longueur constante.

5. Soit ABC un triangle tel que $\widehat{\mathrm{BAC}} = 40°$ et $\widehat{\mathrm{ABC}} = 60°$. Les points D et E sont les points situés respectivement sur [AC] et [AB] tels que $\widehat{\mathrm{CBD}} = 40°$ et $\widehat{\mathrm{BCE}} = 70°$. F est le point d'intersection des droites (BD) et (CE). Montrer que la droite (AF) est perpendiculaire à la droite (BC).

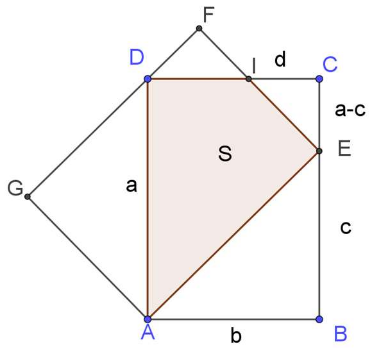


Soit H le point d'intersection de la perpendiculaire à (BC) passant par A avec (BC).
Montrons que le point F appartient à la droite (AH).
Soit F' le point d'intersection de (AH) et (BD). Montrons que $\widehat{\mathrm{BCF'}} = 70°$.
Comme $\widehat{\mathrm{ABC}} = 60°$, on peut construire le point G sur la demi-droite [BC) tel que le triangle ABG soit équilatéral. La droite (AH) est alors à la fois hauteur et médiatrice d'où BF' = GF' et $\widehat{\mathrm{F'BG}} = \widehat{\mathrm{F'GB}} = 40°$ car F' appartient à (BD).
On note de plus I le point d'intersection des droites (BD) et (AG).
Alors $\widehat{\mathrm{IGF'}} = 60° - 40° = 20°$.
D'autre part $\widehat{\mathrm{IF'G}} = 180° - \widehat{BF'G} = 180° - \left(180° - \widehat{\mathrm{F'BG}} - \widehat{\mathrm{F'GB}}\right)$
Soit $\widehat{\mathrm{IF'G}} = 40° + 40° = 80°$.
On ne déduit que $\widehat{\mathrm{F'IG}} = 180° - \widehat{\mathrm{IF'G}} - \widehat{\mathrm{IGF'}} = 180° - 80° - 20° = 80°$. Le triangle IF'G est donc isocèle en G d'où IG = GF' = BF'. (1)
Or les triangles BGI et ABC sont isométriques car BG = AB, $\widehat{\mathrm{GBI}} = \widehat{\mathrm{BAC}} = 40°$ et $\widehat{\mathrm{BGI}} = \widehat{\mathrm{BGA}} = \widehat{\mathrm{ABC}} = 60°$.
On a donc GI = BC. (2).
De (1° et (2), on tire BF' = BC et dans le triangle BCF' isocèle en B, $\widehat{\mathrm{BCF'}} = \frac{1}{2}\left(180° - \widehat{\mathrm{CBF'}}\right) = \frac{1}{2}(180° - 40°)$
Soit $\widehat{\mathrm{BCF'}} = 70° = \widehat{\mathrm{BCF}} =$ ce qui signifie que F' est sur [CE) donc confondu avec F puisqu'il est aussi sur (BD).

6. Élodie possède deux cartons rectangulaires de mêmes dimensions. Ces dimensions sont des nombres entiers.
La longueur des cartons est strictement supérieure à leur largeur.
Élodie superpose les deux cartons comme sur la figure ci-contre.
Elle réalise alors que l'aire du quadrilatère formé par la superposition des deux cartons (partie grisée de la figure) est un nombre entier.
Quelle est la longueur minimale que pourraient avoir ces cartons ?



Soit a la longueur et b la largeur des cartons.
On note S l'aire du quadrilatère correspondant à l'intersection des deux cartons.
Enfin, on note c et d les longueurs des côtés des triangles formés par l'intersection comme sur la figure ci-contre.
Montrons que c est un nombre entier.
Les triangles CEI et BEA sont semblables (rectangles tous les deux et les angles $\widehat{\text{IEC}}$ et $\widehat{\text{BEA}}$ sont complémentaires comme $\widehat{\text{IEC}}$ et $\widehat{\text{CIE}}$ donc $\widehat{\text{BEA}} = \widehat{\text{CIE}}$).
On en déduit l'égalité $\frac{d}{c} = \frac{a-c}{b}$ soit $d = \frac{c(a-c)}{b}$.
On a alors $S = ab - \frac{bc}{2} - \frac{d(a-c)}{2} = ab - \frac{bc}{2} - \frac{c(a-c)^2}{2b} = ab - \frac{bc}{2} - \frac{c(a^2+c^2-2ac)}{2b}$



Soit $S = \frac{1}{2b}(2ab^2 - b^2c - a^2c + 2ac^2 - c^3)$.
Or, par construction, AE $= a$ et dans le triangle ACE rectangle en B, $a^2 = b^2 + c^2$
donc $S = \frac{1}{2b}(2a(b^2+c^2) - a^2c - c(b^2+c^2)) = \frac{1}{2b}(2a^3 - a^2c - ca^2) = \frac{1}{2b}(2a^3 - 2a^2c)$
soit $S = \frac{a^3-a^2c}{b}$ qui s'écrit aussi $c = a - \frac{Sb}{a^2}$. Comme S, b et a sont des nombres entiers, c est un nombre rationnel $\frac{p}{q}$, où p et q n'ont pas de diviseur commun autre que 1.
De plus a et b sont des nombres entiers et $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ donc c est la racine carrée d'un nombre entier n. On en déduit que $n = \frac{p^2}{q^2}$ est un nombre entier et donc que q^2 divise p^2, ce qui contredit p et q n'ont pas de diviseur commun autre que 1 sauf si c est en fait un entier.
Les plus petits triplets pythagoriciens (a, b, c) tels que $a^2 = b^2 + c^2$ sont donnés par le tableau ci-dessous.

a	b	c	S
5	3	4	$\frac{25}{3}$
5	4	3	$\frac{25}{2}$
10	6	8	$\frac{100}{3}$
10	8	6	50

La plus petite valeur de a qui convient est donc 10.

Équations et inéquations

1. Soit x, y et z trois réels non nuls tels que $xy+yz+zx=0$. Calculer la somme $S=\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}$.

$S=\frac{1}{xyz}(yz(y+z)+xz(z+x)+xy(x+y))=\frac{1}{xyz}(y(zy+xy)+z(yz+xz)+x(xz+xy))$
Comme $xy+yz+zx=0$, on en tire $S=\frac{1}{xyz}(-yzx-zxy-xyz)=-3$

2. On suppose que x, y et z trois réels tels que $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x^2+y^2+z^2=7 \\ x^3+y^3+z^3=15 \end{cases}$. Déterminer la valeur de xyz.

En élevant au cube les membres de la première équation, on obtient :
$x^3+y^3+z^3+3x^2y+3xy^2+3y^2z+3yz^2+3z^2x+3zx^2+6xyz=27$ (1)
En multipliant membre à membre la première et la deuxième équation, on obtient :
$x^3+y^3+z^3+x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2=21$ (2)
En retranchant trois fois les membre de (2) aux membres de (1), on obtient :
$-2(x^3+y^3+z^3)+6xyz=-36$
soit, en tenant compte de la troisième équation du système : $6xyz=-36+30=-6$
On a donc $xyz=-1$

3. Montrer que $\frac{1}{2\,023}<\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{2\,019}{2\,020}\times\frac{2\,021}{2\,022}<\frac{1}{44}$

Soit $P=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\ldots\times\frac{2\,019}{2\,020}\times\frac{2\,021}{2\,022}$.
Comme $\frac{1}{2}>\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}>\frac{3}{5}$, $\frac{5}{6}>\frac{5}{7}$, …, $\frac{2\,019}{2\,020}>\frac{2\,019}{2\,021}$ et $\frac{2\,021}{2\,022}>\frac{2\,021}{2\,023}$, $P>\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{5}{7}\times\ldots\times\frac{2\,019}{2\,021}\times\frac{2\,021}{2\,023}$
C'est-à-dire, après simplification, $P>\frac{1}{2\,023}$.
D'autre part $\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$ car $\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=\frac{3-4}{6}=-\frac{1}{6}$, $\frac{3}{4}<\frac{4}{5}$ car $\frac{3}{4}-\frac{4}{5}=\frac{15-1}{20}=-\frac{1}{16}$ et, plus gé,néralement, pour tout entier naturel non nul, $\frac{n}{n+1}<\frac{n+1}{n+2}$ car $\frac{n}{n+1}-\frac{n+1}{n+2}=\frac{n(n+2)-(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}=\frac{-1}{(n+1)(n+2)}$
Donc $P<\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\ldots\times\frac{2\,020}{2\,021}\times\frac{2\,022}{2\,023}$ soit $P<\frac{1}{2\,023}\left(\frac{2}{1}\times\frac{4}{3}\times\frac{6}{5}\times\ldots\times\frac{2\,020}{2\,019}\times\frac{2\,022}{2\,021}\right)$
Ce qui s'écrit $P<\frac{1}{2\,023}\times\frac{1}{P}$ soit, puisque les nombres sont positifs strictement $P^2<\frac{1}{2\,023}<\frac{1}{1\,936}$
Soit $P^2<\frac{1}{44^2}$ soit (termes positifs) $P<\frac{1}{44}$.

4. Démontrer que pour tous nombres strictement positifs a,b,c, $\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\geq a+b+c$.
(on pourra déjà démontrer que pour tous réels x et y, $\frac{x^2+y^2}{2}\geq xy$).

On commence par remarquer que $\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}=\frac{1}{abc}(a^4+b^4+c^4)$.
D'autre part, $a^4+b^4+c^4=\frac{a^4+b^4}{2}+\frac{b^4+c^4}{2}+\frac{c^4+a^4}{2}$.
Or, pour tous réels x et y, $(x-y)^2\geq 0$ et $(x-y)^2=x^2+y^2-2xy$ d'où $x^2+y^2\geq 2xy$ soit $\frac{x^2+y^2}{2}\geq xy$. (1)
On en déduit : $\frac{a^4+b^4}{2}+\frac{b^4+c^4}{2}+\frac{c^4+a^4}{2}\geq a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$
Soit $\frac{a^4+b^4}{2}+\frac{b^4+c^4}{2}+\frac{c^4+a^4}{2}\geq\frac{a^2(b^2+c^2)}{2}+\frac{b^2(c^2+a^2)}{2}+\frac{c^2(a^2+b^2)}{2}$
En s'appuyant à nouveau sur l'inégalité (1), on obtient $a^4+b^4+c^4\geq a^2bc+b^2ca+c^2ab$
Soit, en divisant par abc qui est strictement positif : $\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\geq a+b+c$.

5. On suppose que des nombres réels a et b vérifient l'égalité $ab + \sqrt{ab+1} + \sqrt{a^2+b} \times \sqrt{b^2+a}$.
Déterminer alors la valeur de $a\sqrt{b^2+a} + b\sqrt{a^2+b}$

L'égalité de départ s'écrit aussi $ab + \sqrt{a^2+b} \times \sqrt{b^2+a} = -\sqrt{ab+1}$. (1)
Ce qui, si $ab+1 \geq 0$ et $ab + \sqrt{a^2+b} \times \sqrt{b^2+a} \leq 0$, équivaut, en élevant au carré
$a^2b^2 + 2ab\sqrt{a^2+b} \times \sqrt{b^2+a} + (a^2+b)(b^2+a) = ab+1$
Soit $a^2b^2 + a^3 + 2ab\sqrt{a^2+b} \times \sqrt{b^2+a} + a^2b^2 + b^3 = 1$
Soit $a^2(b^2+a) + 2ab\sqrt{a^2+b} \times \sqrt{b^2+a} + b^2(a^2+b) = 1$
C'est-à-dire $\left(a\sqrt{b^2+a} + b\sqrt{a^2+b}\right)^2 = 1$ soit $a\sqrt{b^2+a} + b\sqrt{a^2+b} = \pm 1$.
Montrons que $\sqrt{b^2+a} + b\sqrt{a^2+b} < 0$.
Or a et b sont de signes opposés car (1) s'écrit aussi $ab = -\sqrt{a^2+b} \times \sqrt{b^2+a} - \sqrt{ab+1}$ et une racine carrée est un nombre positif ou nul.
Sans perte de généralité, on peut supposer que $a < 0 < b$.
Comme $a\sqrt{b^2+a} + b\sqrt{a^2+b} = a\left(\sqrt{b^2+a} + b\right) - b\left(-\sqrt{a^2+b} + a\right)$ et comme $a\left(\sqrt{b^2+a} + b\right) > 0$ et comme $-\sqrt{a^2+b} + a < 0$ et $-b > 0$ d'où $-b\left(-\sqrt{a^2+b} + a\right) > 0$, $a\sqrt{b^2+a} + b\sqrt{a^2+b} > 0$.
On en déduit que $a\sqrt{b^2+a} + b\sqrt{a^2+b} = 1$.

6. On dit qu'une fonction f de **R** dans **R** admet un point *fixe* a lorsque $f(a) = a$.
Déterminer tous les triplets possibles (a, n, p) de nombres tels que a est un nombre réel, n et p sont des nombres entiers et les fonctions (distinctes) f et g, de **R** dans **R,** ont toutes deux le même point fixe a et sont telles que, pour tout réel x, $f(x) = nx + 4$ et $g(x) = 4x + p$.

Le nombre a est point fixe de f s'écrit $na + 4 = a$ soit, pour $n \neq 1$, $a = \frac{-4}{n-1}$.
Le nombre a est point fixe de g s'écrit $4a + p = a$ soit, pour $n \neq 1$, $a = \frac{-p}{3}$.
On en déduit que $\frac{-4}{n-1} = \frac{-p}{3}$ soit $p(n-1) = 12$.
Comme n et p sont des entiers, les couples (n, p) vérifiant cette égalité sont : $(2,12), (3,6), (4,4)(5,3), (7,2), (13,1)$.
Pour le couple $(4,4)$, les fonctions f et g sont identiques donc ce couple ne convient pas.
Les triplets solutions sont : $(-4,2,12), (-2,3,6), (-1,5,3), \left(-\frac{2}{3}7,2\right), \left(-\frac{1}{3}, 13,1\right)$.

7. Soit un triangle EFG rectangle en E. On pose $x = EF, y = EG, z = FG$.
Calculer l'aire A et le périmètre P du triangle sachant que $P = 4A$ et $\frac{x^4+y^4+z^4}{8} = 64 - A^2$.

Le triangle étant rectangle en E, on a de plus $A = \frac{xy}{2}$ et $x^2 + y^2 = z^2$.
$\frac{x^4+y^4+z^4}{8} = 64 - A^2$ s'écrit aussi $x^4 + y^4 + z^4 = 512 - 8A^2$ soit $x^4 + y^4 + z^4 = 512 - 2x^2y^2$.

Soit $(x^2+y^2)^2 + z^4 = 512$ soit $2z^4 = 512$ c'est-à-dire $z = 4$.
La relation $P = 4A$ s'écrit alors $x + y + 4 = 2xy$ et l'égalité $x^2 + y^2 = z^2 = 16$ s'écrit
$x^2 + y^2 + 2xy = 16 + 2xy = 16 + x + y + 4$ soit $(x+y)^2 - (x+y) - 20 = 0$.
En posant $t = x + y$, on de ramène à l'équation $t^2 - t - 20 = 0$ soit $\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 20 = 0$
soit $\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{81}{4} = 0$ soit $(t-5)(t+4) = 0$. Comme somme de distances t est positif donc $x + y = t = 5$.
On en déduit que le périmètre du triangle est $P = 5 + 4 = 9$ et l'aire du triangle est $A = \frac{P}{4} = \frac{9}{4}$.

Dénombrement et probabilités

1. **Petits cadeaux gourmands**

   Une petite boîte de chocolats contient 4 morceaux de chocolat placés côte à côte sur une seule ligne.
   Il y a plusieurs sélections de saveurs pour les chocolats et chaque boite est confectionnée en choisissant au hasard la saveur de chaque chocolat.
   Calculer le nombre de saveurs qui assurera que la probabilité de ne pas avoir deux chocolats de même saveur qui se touchent soit supérieure ou égale à 0,512.

On note S le nombre de saveurs disponibles. Avec 4 chocolats alignés on a 3 chocolats qui se touchent.
La probabilité que deux chocolats choisis n'aient pas la même saveur est $p = \frac{S-1}{S}$ donc la probabilité qu'aucun chocolats qui se touchent n'aient la même saveur est $P = p^3$.
$P \geq 0{,}512$ équivaut à $p^3 \geq \frac{64}{125}$ soit $p \geq \frac{4}{5}$ soit $1 - \frac{1}{S} \geq \frac{4}{5}$ soit $\frac{1}{S} \leq \frac{1}{5}$ soit $S \geq 5$ (nombres strictement positifs).
Il faut donc au moins 5 saveurs de chocolats.

2. **Les gros bras**

   On organise un tournoi de bras de fer entre Alexis et Gabriel. Le tournoi comporte autant de rondes que nécessaire, le gagnant étant le premier qui parvient à gagner 2 rondes de plus que son adversaire.
   On suppose que chaque ronde se termine par la victoire d'un des adversaires.
   On estime que la probabilité que Gabriel gagne une ronde est $\frac{2}{3}$.
   Quelle est la probabilité que Gabriel gagne le tournoi ?

On note P la probabilité que Gabriel gagne le tournoi.
Ce tournoi est constitué de :

- soit deux victoires de Gabriel (probabilité égale à $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$) ;
- soit une victoire puis une défaite et on poursuit le tournoi comme s'il ne s'était rien passé (probabilité égale à $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} P = \frac{2}{9} P$) ;
- soit une défaite suivie d'une victoire et on poursuit le tournoi comme s'il ne s'était rien passé (probabilité égale à $\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} P = \frac{2}{9} P$.

On a donc $P = \frac{4}{9} + \frac{2}{9} P + \frac{2}{9} P$ soit $\frac{5}{9} P = \frac{4}{9}$ soit $P = \frac{4}{5}$.

3. **Soustraction**

   Les faces d'un dé juste sont numérotées de 1 à 6. Ruby et Sam jettent chacun le dé. Ensuite, Sam soustrait le nombre qu'il a obtenu de celui qu'a obtenu Ruby.

Quelle est la probabilité que le résultat de cette soustraction soit un nombre négatif ?

Ruby et Sam ont chacun 6 résultats possibles lorsqu'ils jettent les dés. Donc, il y a $6 \times 6 = 36$ résultats possibles. Sur ces 36 résultats possibles, il y a 6 résultats dans lesquels Sam et Ruby obtiennent chacun le même nombre et donc ces nombres ont une différence de 0.
Pour les $36 - 6 = 30$ résultats possibles restants, la probabilité que Ruby ait obtenu un nombre supérieur à celui de Sam est égale à la probabilité que Sam ait obtenu un nombre supérieur à celui de Ruby.
Autrement dit, la moitié de ces 30 résultats possibles (soit 15) ont une différence négative tandis que l'autre moitié des résultats possibles ont une différence positive.
Donc, lorsqu'on soustrait le nombre qu'obtient Sam de celui qu'obtient Ruby, la probabilité que le résultat de cette soustraction soit un nombre négatif est égale à $\frac{15}{36}$ soit $\frac{5}{12}$.

4. L'ombre et la lumière

Dans la Figure 1 ci-dessous, trois points non ombrés sont disposés de manière à former un triangle équilatéral. La Figure 2 est formée en disposant trois copies de la Figure 1 de manière à former le contour d'un triangle équilatéral plus grand, puis en remplissant l'espace vide résultant avec 1 point ombré. Pour chaque entier $n > 2$, la Figure n est formée en disposant trois copies de la Figure $n-1$ de manière à former le contour d'un triangle équilatéral plus grand, puis en remplissant l'espace vide résultant au centre avec un triangle inversé de points ombrés.

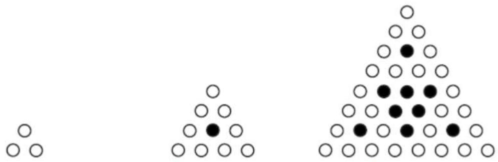


Figure 1 Figure 2 Figure 3

Quelle est la plus petite valeur de n telle que la Figure n comprend au moins 100 000 points ombrés ?
(On admet que pour tout entier naturel n non nul, $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$)

Comme chaque figure est formée en juxtaposant deux copies de la figure précédente le long de la base, puis en ajoutant d'autres parties au-dessus, le nombre de points dans la base de chaque figure est deux fois plus grand que dans la figure précédente.
Puisque chaque figure est un triangle équilatéral, le nombre de points dans la figure est égal à la somme des entiers strictement positifs allant de 1 jusqu'au nombre de points de la base. Donc, si la base d'une figure comprend b points, alors la figure comprend $1+2+3+\cdots+b=\frac{b(b+1)}{2}$ points.
De plus, puisque chaque figure est formée à l'aide de trois copies de la figure précédente en remplissant tout espace encore vide avec des points ombrés, alors le nombre de points non ombrés dans chaque figure est exactement trois fois le nombre de points non ombrés dans la figure précédente.
Puisque chaque point est soit ombré soit non ombré, le nombre de points ombrés est égal au nombre total de points moins le nombre de points non ombrés.
On en déduit le tableau suivant :

Figure	Nbre de points de la base	Nbre de points de la figure	Nbre de points non ombrés	Nbre de points ombrés
1	2	3	3	0
2	4	10	9	1
3	8	36	27	9
4	16	136	81	55
5	32	528	243	285
6	64	2 080	729	1 351
7	128	8 256	2 187	6 069
8	256	32 896	6 561	26 335
9	512	131 328	19 683	111 645

La plus petite valeur de n cherchée est donc 9.

5. Dignes d'un don

n personnes sont assises autour d'une table. On les désigne par $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{n-1}, P_n$. Au début du processus, des pièces de monnaie toutes identiques leur sont distribuées, de telle sorte que P_1 possède une pièce de plus que P_2, P_2 une pièce de plus que P_3, etc., P_{n-1} une pièce de plus que P_n. On s'engage alors dans un système de don : P_1 donne une pièce à P_2 , qui donne deux pièces à P_3, qui donne trois pièces à P_4, etc. et on continue jusqu'à P_n qui donne n pièces à P_1, qui donne $n+1$ pièces à P_2, et le processus se déroule jusqu'à ce qu'une personne ne puisse pas donner une pièce de plus que le nombre de pièces reçues. On s'arrête, et on constate qu'une des personnes possède exactement 5 fois le nombre de pièces possédé par un de ses voisins.
Quelle est cette personne ? Combien y avait-il de personnes autour de la table ? Combien de pièces avait-on distribuées ?

Supposons que P_n ait possédé q pièces au départ. P_{n-1} en possédait une de plus, soit $q+1$, P_{n-2} en possédait $q+2$ et P_1 en possédait $q+n-1$. Comme chacun donne à chaque tour une pièce de plus qu'il en reçoit, P_n ne peut plus respecter la règle après q tours. À ce moment, il a reçu $n(q+1)-1$ pièces de P_{n-1} mais ne peut en donner $n(q+1)$ à P_1. Le jeu s'arrête. P_{n-1}n'a plus de pièces P_1 possède à ce moment $n-2$ pièces. La condition proposée s'écrit : $n(q+1)-1=5(n-2)$ qui se simplifie en $n(4-q)=9$. Les possibilités sont $n=9$ et $n=3$ avec comme nombre de pièce correspondant 63 et 6.

6. Deux grands bols de balles

Des balles sont disposées dans deux grands bols, un nombre m de balles dans le premier, un nombre n de balles dans le second. Deux opérations sont possibles :
Opération α : ôter le même nombre de balles dans chacun des deux bols ;
Opération β : doubler le nombre de balles dans un des deux bols.

1. Est-il possible, au bout d'un nombre fini d'opérations α ou β, de vider les deux bols ?
2. On remplace l'opération β par l'opération γ : tripler le nombre de balles dans un des bols. Est-il possible, au bout d'un nombre fini d'opérations α ou γ, de vider les deux bols ?

1. Si $m=n$, l'opération α a elle seule règle la question. Supposons $m<n$. On peut alors ôter $m-1$ balles dans chaque bol, de façon qu'il n'en reste qu'une dans le premier cité. L'opération β permet de passer de 1 balles à deux dans ce bol, et on peut ôter une balle dans chaque bol pour revenir à 1 balle dans le premier bol. On recommence jusqu'à ce qu'il n'y ait plus qu'une balle dans le second aussi. Opération α pour finir.
2. Si les effectifs initiaux ne sont pas de même parité, ni l'opération α ni l'opération γ ne changent cet état de choses et par conséquent ramener ces deux effectifs à 0 n'est pas possible.
Si les effectifs sont de même parité, on ôte $m-1$ dans chacun des bols. On porte à 3 l'effectif du premier bol, et on ôte deux balles dans chacun (il y en a au moins 3 dans le second, dont l'effectif est impair et strictement supérieur à 1). En poursuivant le procédé, le nombre de balles dans le second bol diminue de 2 à chaque étape, jusqu'à attendre 1 et on termine.

7. Combien d'impairs jusqu'à 2 023 ?

On écrit tous les entiers, de 1 à 2 023 (enfin, on les écrit dans sa tête). Des chiffres pairs, 0, 2, 4, 6, 8 et des chiffres impairs, 1, 3, 5, 7, 9 se succèdent. Combien a-t-on écrit au total de chiffres impairs ?

Pour commencer, regardons ce qui se passe entre 0 et 100. Les chiffres des unités 1, 3, 5, 7 et 9 se retrouvent dans chaque dizaine, et il y a dix dizaines, cela nous conduit à 50. Les chiffres des dizaines 1, 3, 5, 7, 9, apparaissent chacun 10 fois, cela donne encore 50 chiffres impairs, donc 100 chiffres impairs de 1 à 99. Le décompte est le même pour chaque centaine « impaire », mais les chiffres de centaines 1, 3, 5, 7 et 9 apparaissent chacun 100 fois. Entre 1 et 999, il y a donc $10 \times 100 + 500 = 1\,500$ chiffres impairs.
On aurait pu aller directement au but en remarquant que de 1 à 999, exactement la moitié des chiffres des unités, la moitié des chiffres des dizaines et la moitié des chiffres des centaines sont impairs..
Pour les nombres compris entre 1 000 et 1 999, le même compte vaut pour les unités, dizaines et centaines, mais il y a aussi 1 000 chiffres 1, ce qui donne 4 000 chiffres impairs de 1 à 1999. Pour la suite, les nombres qui comportent des chiffres impairs sont 2 001, 2 003, 2 005, 2 007, 2 009, 2 010, 2 011, 2 012, 2 013, 2 014, 2 015, 2016, 2 017, 2 018, 2 019, 2 021 et 2 023, pour un total de 22 chiffres impairs. Au total 4 022.

Quiz

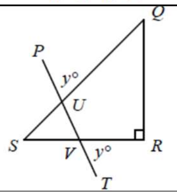
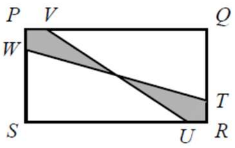
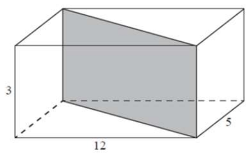
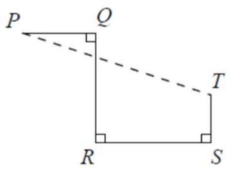
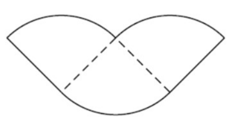
Pépinière académique de mathématiques « secondes » Avril 2023

Équipe constituée de :

………
…………………………………………

Exceptionnellement, il ne vous est pas demandé de justifier les « réponses » que vous donnerez aux questions suivantes. Les professeurs animateurs sont naturellement là pour vous donner des petits coups de pouce (ils vous suggèreront des raisonnements ou des démarches, pas des « réponses », ils peuvent aussi confirmer vos réponses pour vous aider à aller plus loin.

10 questions – 10 réponses – 50 minutes

<table>
<tr><th>N°</th><th>Figure</th><th>Énoncé de la question</th><th>Réponse</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>$$\begin{array}{r} PQR \\ +\quad QR \\ \hline 1\,0\,1\,2 \end{array}$$</td><td>Dans l'addition ci-contre, P, Q et R représentent chacun un chiffre. Quelle est la valeur de $P + Q + R$?</td><td></td></tr>
<tr><td>2.</td><td>
</td><td>Dans la figure ci-contre, le triangle QRS est rectangle isocèle en R et le segment $[TP]$ coupe les côtés $[QS]$ et $[RS]$ respectivement en U et V de telle façon que $\widehat{PUQ} = \widehat{RVT} = y°$.
Que vaut y ?</td><td></td></tr>
<tr><td>3.</td><td>
</td><td>Dans la figure ci-contre, $PQRS$ est un rectangle, $PS = 2$, $PQ = 4$ et les points T, U, V et W sont tels que les segments [UV] et [TW] se coupent au centre du rectangle et $RT = RU = PV = PW = a$.
Quelle est la valeur de a pour que l'aire de la région ombrée soir égale à $\frac{1}{8}$ de celle du rectangle ?</td><td></td></tr>
<tr><td>4.</td><td></td><td>La moyenne, la médiane et le mode de la série statistique des entiers 12, 9, 11, 16, x sont égaux. Quelle est la valeur de x ?</td><td></td></tr>
<tr><td>5.</td><td><table><tr><td>2,3</td><td></td><td></td></tr><tr><td>3,6</td><td>3</td><td>2,4</td></tr><tr><td></td><td>x</td><td></td></tr></table></td><td>Dans un carré magique, les nombres de chaque rangée, de chaque colonne et de chaque diagonale ont la même somme.
Dans le carré magique ci-contre, quelle est la valeur de x ?</td><td></td></tr>
<tr><td>6.</td><td></td><td>Combien existe-t-il d'entiers naturels non nuls n strictement inférieurs à 1 000 tels qu'il existe deux nombres premiers p et q distincts tels que $n = p^2q^2$?</td><td></td></tr>
<tr><td>7.</td><td>
</td><td>Un prisme en bois à base rectangulaire (figure ci-contre) mesure $3 \times 5 \times 12$. Le prisme est coupé en deux par une coupe verticale qui passe par quatre sommets. Cette coupe crée deux prismes symétriques à base triangulaire.
Quelle est l'aire totale de l'un de ces prismes à base triangulaire ?</td><td></td></tr>
<tr><td>8.</td><td></td><td>Soit r, s et t des entiers strictement positifs tels que $r \times s \times t = 1\,230$.
Quelle est la plus petite valeur de $r + s + t$?</td><td></td></tr>
<tr><td>9.</td><td>
</td><td>Dans la figure ci-contre, (PQ) est perpendiculaire à (QR), (QR) est perpendiculaire à (RS) et (RS) est perpendiculaire à (TS). On sait de plus que $PQ = 4, QR = RS = 8, ST = 3$.
Quelle est la distance PT ?</td><td></td></tr>
<tr><td>10.</td><td></td><td>Un disque ayant une aire égale à 36π a été découpé en quarts et trois de ces quarts sont placés comme dans la figure ci-contre.
Quel est le périmètre de cette figure ?</td><td></td></tr>
</table>

Solutions

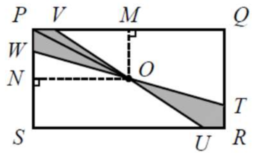
Question 1

2 est le chiffre des unités de $R+R$, ce qui limite les possibilités à $R=1$ ou $R=6$. Le chiffre des unités de la somme $Q+Q$ ne peut être impair, sauf si c'est la retenue. Donc $R=6$. De ce fait, le chiffre des unités de la somme $Q+Q$ est 0. Donc $Q=0$ ou $Q=5$. Il ne peut y avoir de chiffre des milliers non nul pour cette somme que si P est ajouté à une retenue. Donc $Q=5$ et $P=9$. Enfin, $P+Q+R=20$

Question 2

L'angle $\widehat{USV}$ mesure 45°, puisque QRS est rectangle isocèle. Les angles $\widehat{SUV}$ et $\widehat{SVU}$ sont chacun opposé par le sommet à deux angles de même mesure, donc ils ont même mesure et le triangle USV est isocèle de sommet principal S. On a donc $y=\frac{180}{2}$. $y=67{,}5$.

Question 3



Appelons M et N les milieux respectifs de [PQ] et [PS]Les droites (OM) et (ON) sont les médiatrices de [PQ] et [PS]. L'aire du quadrilatère OWPV se décompose en celles des deux triangles OWP et OVP. Ces deux triangles ont pour « base » a et pour hauteur associée respectivement 2 et 1. L'aire du quadrilatère OWPV est donc $\frac{3}{2}a$. L'aire du quadrilatère OTRU est la même et donc la zone ombrée a pour aire $3a$. L'aire du rectangle est 8. On cherche donc a tel que $3a=\frac{1}{8}\times 8$ et donc $a=\frac{1}{3}$.

Question 4

Le *mode* est la valeur de la série la plus représentée. Donc le mode de la série est x, qui sera ainsi présent deux fois. Si $x=16$, toutes les autres valeurs lui étant inférieures, il ne peut être la moyenne, de même pour 9, qui est la plus petite valeur, donc inférieure à la moyenne. Il reste à examiner 11 et 12. Avec $x=11$, la moyenne est $\frac{59}{5}$ et pas 11. Avec $x=12$, la moyenne est 12… et c'est aussi la médiane de la série 9, 11, 12, 12, 16.

Question 5

La deuxième rangée fournit la « constante » du carré magique, 9. On complète la première colonne avec 3,1 , puis la deuxième diagonale avec 2,9, la première rangée avec 3,8. Finalement, dans la deuxième colonne, $x=2{,}2$. Voici le tableau reconstitué :

2,3	3,8	2,9
3,6	**3**	**2,4**
3,1	2,2	3,7

Question 6

Le produit de deux carrés est un carré. On cherche les entiers dont le carré est inférieur à 1 000. Ce sont les entiers inférieurs ou égaux à 31. Parmi les entiers inférieurs ou égaux à 31, ceux qui sont le produit de deux nombres premiers distincts sont : $2\times 3=6, 2\times 5=10, 2\times 7=14, 2\times 11=22, 2\times 13=26, 3\times 5=15, 3\times 7=21$
On a donc 7 entiers répondant à la contrainte.

Question 7

Le rectangle produit par la coupe a pour largeur 3 et pour longueur l'hypoténuse d'un triangle rectangle de côtés 5 et 12. Sa longueur est donc 13.
L'aire totale se décompose en l'aire de ce rectangle, 39, l'aire d'un rectangle de côtés 12 et 3, 36, l'aire d'un rectangle de côtés 5 et 3, 15 et l'aire totale de deux triangles rectangles de côtés 5 et 12, 60. Cette aire totale est donc 150.

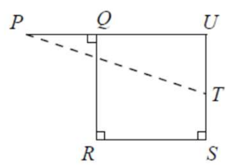
Question 8

La décomposition de 1 230 en produit de facteurs premiers est : $1\,230 = 2\times 3\times 5\times 41$. Pour répondre à la question posée, on peut prendre pour r, s ou t le produit de deux de ces quatre facteurs, les deux autres lettres désignant les autres facteurs. La plus petite valeur de $r+s+t$ est 52.

r	s	t	$r+s+t$
6	5	41	52
10	3	41	54
82	3	5	90
15	2	41	58
123	2	5	130
205	2	3	210

Question 9

(PQ) et (ST) se coupent en U. Le quadrilatère RSUQ a trois angles droits, donc quatre, et le triangle PTU est rectangle en U. Les côtés de l'angle droit de ce triangle mesurent : $UT=US-ST=5$ et $PU=PQ+QU=12$. Et donc, d'après le théorème de Pythagore, $PT=13$.



Question 10

Le rayon du cercle initial, d'aire 36π, est 6. Le périmètre de la figure est constitué de trois quarts de cercle et deux rayons. Il mesure donc $p=\frac{3}{4}\times 2\pi\times 6+2\times 6=9\pi+12$.