L’équation en nombres entiers $x^n = y^n + z^n$
n’a pas de solutions pour $n > 2$

La conjecture de Fermat
devenue
le théorème de Fermat

« Cujus rei demonstrationem, mirabilem sane, detexi ; hanc marginis exiguitas non caperet »

Diophante, Bachet de Méziriac, Fermat, Euler, Legendre, Gauss, Sophie Germain, Kummer… nous n’irons pas jusqu’ à Wiles

Équations diophantiennes

Diophante d'Alexandrie, mathématicien du IIIe siècle, traite dans un ouvrage appelé « Les Arithmétiques », d'équations à plusieurs inconnues dont on cherche les solutions entières (en nombres entiers).

Notamment celle-ci : *Trouver tous les triangles rectangles dont les côtés sont mesurés par des nombres entiers.*

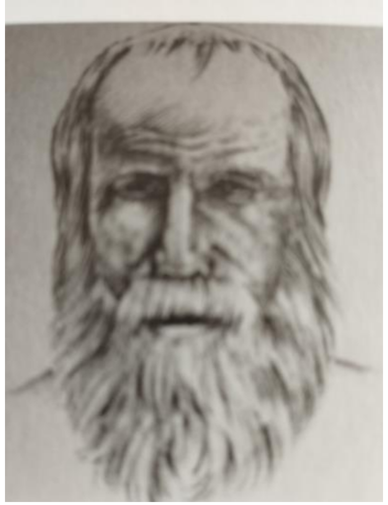
Il s'agit de résoudre en nombres entiers l'équation indéterminée

$$x^2 = y^2 + z^2$$

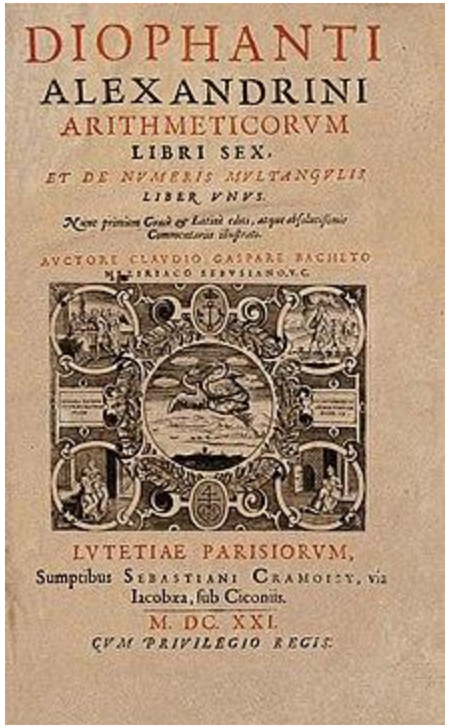
Les Arithmétiques de Diophante

« On ne sait presque rien de lui… »

13 (?) livres nous sont parvenus morceau par morceau, traduits en latin



Claude-Gaspar
Bachet de Méziriac
(1581 – 1638)
a publié une traduction
des *Arithmétiques*

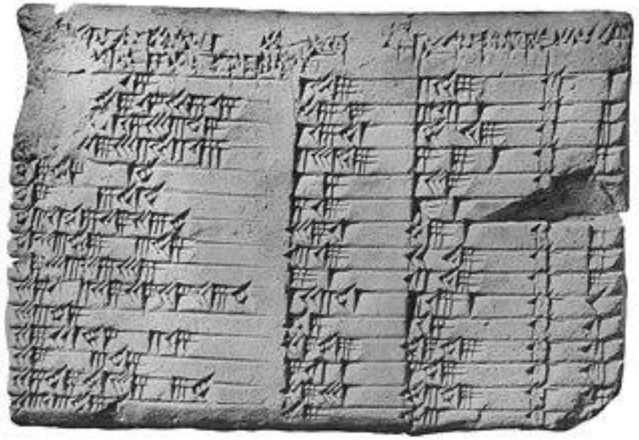


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX.
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
Nunc primùm Græcè & Latinè editi, atque absolutissimis
Commentariis illustrati.
AVCTORE CLAVDIO GASPARE BACHETO
MEZIRIACO SEBVSIANO V.C.
LVTETIAE PARISIORVM,
Sumptibus SEBASTIANI CRAMOISY, via
Iacobæa, sub Ciconiis.
M. DC. XXI.
CVM PRIVILEGIO REGIS.

Pierre de Fermat
(1600?-1665) était un
mathématicien
« amateur ». Il a affirmé
ce qui s'appelle
aujourd'hui théorème…

Les triplets pythagoriciens (1)

Un *triplet pythagoricien* est un triplet d'entiers naturels (x, y, z) tel que $x^2 = y^2 + z^2$.
On suppose que seul y est pair.



La tablette Plimpton 322

De $x^2 - y^2 = z^2$ on passe à
$(x + y)(x - y) = z^2$.

Le produit de deux facteurs impairs premiers entre eux (un diviseur commun diviserait $2x$ et $2y$) étant un carré, il est le produit de deux carrés.

Il existe des entiers α et β tels que $x = \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}, y = \frac{\alpha^2-\beta^2}{2}, z = \alpha\beta$

Les triplets pythagoriciens (2)

En posant $\frac{\alpha+\beta}{2} = m$ et $\frac{\alpha-\beta}{2} = n$, on trouve : $\begin{cases} x = m^2 + n^2 \\ y = 2mn \\ z = m^2 - n^2 \end{cases}$

Le tableau ci-contre donne les premiers triplets primitifs dont une seule projection est paire (on choisit m et n de parité différente et premiers entre eux)

Les 16 triplets primitifs jusqu'à 100	**[3, 4, 5], [5, 12, 13], [7, 24, 25], [8, 15, 17], [9, 40, 41], [11, 60, 61], [12, 35, 37], [13, 84, 85], [16, 63, 65], [20, 21, 29], [28, 45, 53], [33, 56, 65], [36, 77, 85], [39, 80, 89], [48, 55, 73], [65, 72, 97]**

Attention : ce tableau donne les triplets tels que $x^2 + y^2 = z^2$

Un peu de ménage…

Supposons que pour un certain entier n l'équation

$$x^n = y^n + z^n$$

ait des solutions. Ou bien l'entier n est premier ou bien il est multiple d'un nombre premier impair, ou bien il est une puissance de 2.

Si $n = mp$, l'équation s'écrit $(x^m)^p = (y^m)^p + (z^m)^p$. Si elle a des solutions, c'est que l'équation $x^p = y^p + z^p$ en a.

Si n est une puissance de 2, le cas $n = 2$ étant réglé on ne s'occupe que des multiples de 4 et donc seulement de 4.

L'équation $x^2 = y^4 + z^4$ est intéressante de ce point de vue.

Le début d'une « descente infinie »

On s'intéresse à l'équation, en nombres entiers :

$$x^2 = y^4 + z^4$$

On peut considérer que le triplet (x, y^2, z^2)est un triplet pythagoricien primitif. Il existe des entiers premiers entre eux et impairs m et n tels que : $y^2 = 2mn, z^2 = m^2 - n^2$ et $x = m^2 + n^2$

La deuxième égalité peut être lue comme exprimant le fait que (m, n, z) est un triplet pythagoricien. Il existe des entiers p et q tels que : $m = p^2 + q^2, n = 2pq, z = p^2 - q^2$

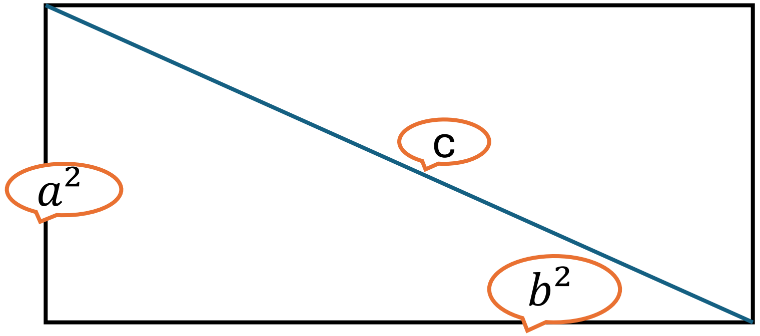
L'atterrissage

$$m = p^2 + q^2, n = 2pq, z = p^2 - q^2$$

p et q sont premiers entre eux (c'est le chemin habituel) et ils sont aussi premiers avec n.

Comme $y^2 = 2mn$, l'égalité $y^2 = 4mpq$ prouve que m, p et q sont des carrés premiers entre eux.

Il existe x', y', z' tels que $m = x'^2, p = y'^2, q = z'^2$ et $x'^2 = y'^4 + z'^4$…



Le triangle rectangle impossible et le rectangle impossible : aucun triangle rectangle dont les cathètes sont de longueur carrée n'a une hypoténuse de longueur entière.
Il n'existe pas de rectangle à côtés entiers non nuls et à diagonale entière ayant la même aire qu'un carré à côtés entiers.

… et après

Leonhard EULER (1707 – 1783) résout $n = 3$
« Madame, je viens d'un pays où, quand on parle, on est pendu »

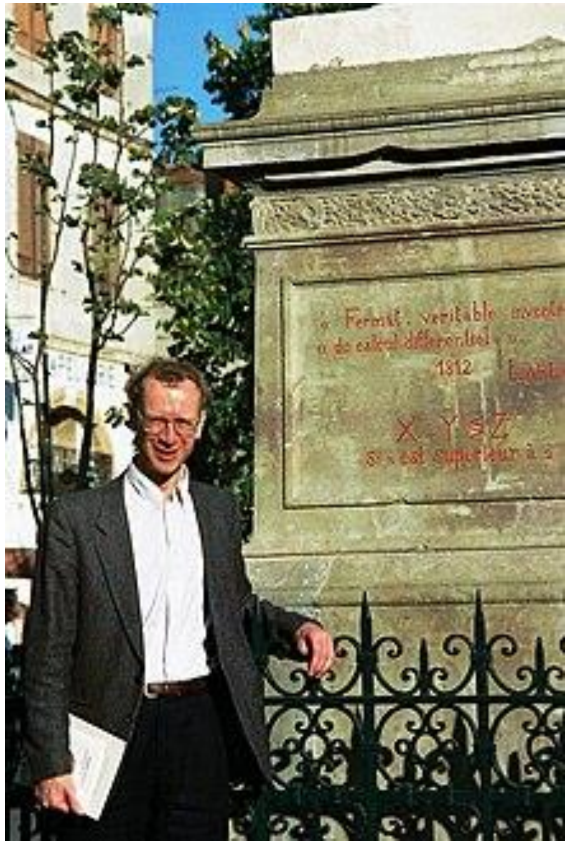
Adrien-Marie LEGENDRE (1752 - 1833) résout $n = 5$

$$5(x^2 + y^2)^2 - (x - y)^4$$
$$= (2x^2 + xy + 2y^2)^2 - 5(xy)^2$$

Sophie GERMAIN (1776 – 1831)
Soit p un nombre premier impair tel que $q = 2p + 1$ soit un nombre premier. Alors il n'existe pas de triplet d'entiers (x, y, z) dont un divisible par p tel que $x^p = y^p + z^p$

En 1925, le plus grand nombre de Sophie Germain connu était 5 003 249
En 2021, c'était $109433307 \times 2^{66\,452} - 1$.

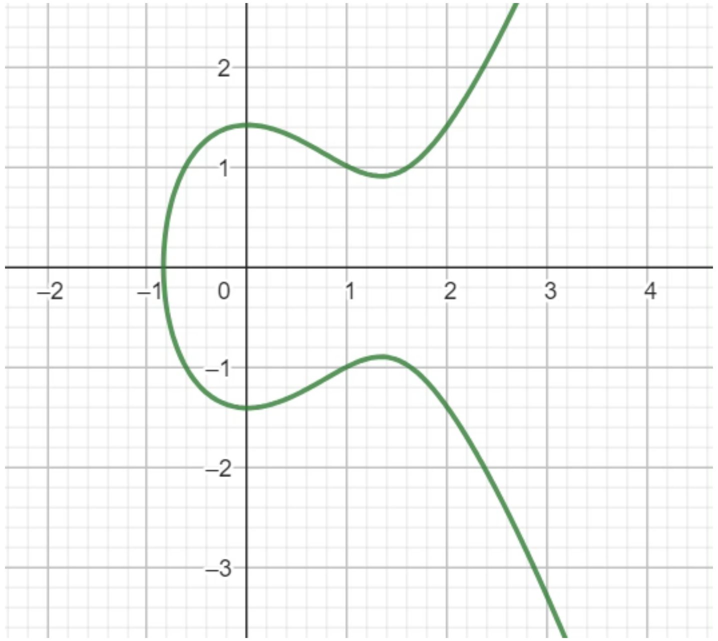
Then along came Wiles



À Beaumont de Lomagne
devant la statue de Fermat

Au XXe siècle, ce sont les recherches sur les courbes elliptiques qui rappellent le problème posé par Fermat.

On cite Shimura-Taniyama-Weil, J.-P. Serre, Yves Hellegouarch, Ken Ribet et finalement Andrew Wiles dont le résultat annoncé en 1993 est finalement établi par Wiles et Richard Taylor en 1995. Le théorème de Fermat n'est plus qu'une conséquence…



La courbe elliptique d'équation
$y^2 = x^3 - 2x^2 + 2$

Rendez-vous à Beaumont de Lomagne