Préparation au concours général de mathématiques

Année 2021-2022
Fiche numéro 1

Exercice 1 Triangulation

Une *triangulation* d'un polygone régulier est un partage de l'intérieur de ce polygone en triangles. Chaque sommet de chaque triangle est alors soit un sommet du polygone soit un point à l'intérieur du polygone.

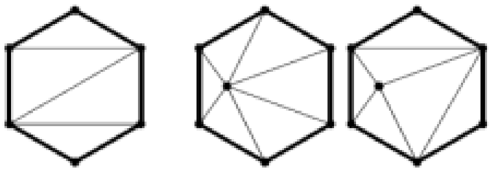
On considère un polygone régulier ayant n sommets ($n \geq 3$) et k points en son intérieur (sans que trois de ces $n + k$ points soient alignés).

On suppose que :

- Le seul point commun à deux segments dont les extrémités sont deux de ces $n + k$ points est l'une des extrémités de ces segments.
- Chaque point intérieur au polygone est le sommet d'au moins un triangle.

On admet que toutes les triangulations possibles d'un polygone régulier ayant n sommets avec k points intérieurs produisent le même nombre de triangles, nombre qu'on note $T(n, k)$.

Par exemple, pour $n = 6$, on obtient 4 triangulations si $k = 0$ et 6 triangulations si $k = 1$ (figures ci-dessous)

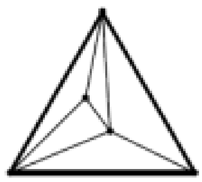


$T(6,0) = 4$ $T(6,1) = 6$

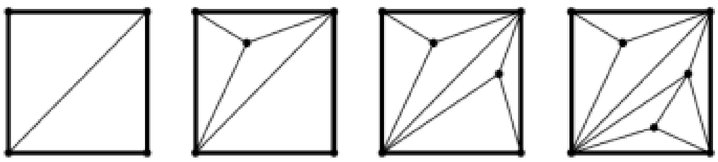
a. Déterminer $T(3,2)$ puis $T(4,100)$.

b. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles $T(n, n) = 2020$.

a. Comme toutes les triangulations possibles d'un polygone régulier ayant n sommets avec k points intérieurs produisent le même nombre de triangles, il suffit de produire une triangulation comme sur la figure ci-contre pour calculer $T(3,2)$.
On en déduit que $T(3,2) = 5$



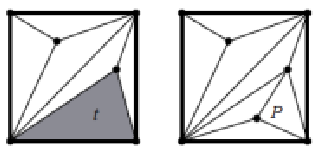
On commence par étudier $T(4, k)$ pour les premières valeurs de k :



$T(4,0)=2$ $T(4,1)=4$ $T(4,2)=6$ $T(4,3)=8$

On cherche ensuite une relation de récurrence en remarquant que puisque toutes les triangulations possibles d'un polygone régulier ayant n sommets avec k points intérieurs produisent le même nombre de triangles, on peut passer de $T(4, k)$ à $T(4, k + 1)$ en introduisant dans un triangle un point intérieur nouveau P (non aligné avec deux des points intérieurs déjà existants).

De plus, en ajoutant le point P dans un triangle, on remplace ce triangle $\mathcal{T}$ par trois triangles (en reliant P aux sommets du triangle $\mathcal{T}$), ce qui crée deux triangles de plus.



$T(4,2)=6$ $T(4,3)=8$

On a donc, pour tout entier $k \geq 0$, $T(4, k + 1) = 2 + T(4, k)$.

La suite $(T(4, k))_{k\geq 0}$ est donc la suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $T(4,0) = 2$. On en déduit que $T(4,100) = 2 + 2 \times 100 = 202$.

b. Dans la triangulation d'un polygone régulier ayant n sommets comprenant aucun point intérieur, on peut choisir de relier l'un des n sommets à chacun des $n-3$ sommets restants qui ne lui sont pas adjacents. Dans une telle triangulation de polygones réguliers, on obtient $n-2$ triangles donc, pour tout $n \geq 3$, $T(n,0) = n-2$.
De plus, le raisonnement fait dans le a pour exprimer $T(4,k+1)$ en fonction de $T(4,k)$ peut se faire pour n quelconque, donc pour tout $n \geq 3$ et pour tout entier $k \geq 0$, $T(n,k+1) = 2 + T(n,k)$.
D'où $T(n,k) = T(n,0) + 2k = n - 2 + 2k$ pour toute triangulation d'un polygone régulier ayant n sommets et k points intérieurs.
On a donc $T(n,n) = n - 2 + 2n = 3n - 2$ et $T(n,n) = 2\,020$ équivaut à $3n - 2 = 2\,020$ soit $n = 674$.

Exercice 2 Fonctions compatibles

On dit que deux fonctions f et g de **R** dans **R** sont compatibles lorsque :

(i) Pour tous réels x et y, $f(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y)$
(ii) Pour tous réels x et y, $g(x+y) = g(x)g(y) - f(x)f(y)$
(iii) Il existe un réel x, $f(x) \neq 0$.

Soit f et g deux fonctions compatibles.

1. Déterminer $f(0)$ et $g(0)$.
2. Soit h la fonction définie par, pour tout réel x, $h(x) = (f(x))^2 + (g(x))^2$.
   Montrer que pour tout réel x, $h(x)h(-x) = 1$.
3. On suppose que, pour tout réel x, $-10 \leq f(x) \leq 10$ et $-10 \leq g(x) \leq 10$.
   a. Montrer que pour tout réel x, $h(x) \leq 200$.
   b. Montrer que pour tout entier n et pour tout réel x, $h(2^n x) = \left(h(x)\right)^{2^n}$
   c. En déduire que $h(2\,022) = 1$.

a. La propriété (i) pour $x = y = 0$ donne $f(0) = 2f(0)g(0)$ soit $f(0) = 0$ ou $g(0) = \frac{1}{2}$.
La propriété (ii) pour $x = y = 0$ donne $g(0) = (g(0))^2 - (f(0))^2$.
Si $g(0) = \frac{1}{2}$, cetet égalité s'écrit $\frac{1}{2} = \frac{1}{4} - (f(0))^2$ soit $(f(0))^2 = -1$ ce qui est impossible puisque $f(0)$ est un réel. Donc $g(0) \neq \frac{1}{2}$, ce qui signifie que $f(0) = 0$.
D'après la propriété (ii), pour tout réel x, $f(x+0) = f(x)g(0) + g(x)f(0)$soit $f(x) = f(x)g(0)$
D'après la, propriété (iii), on en déduit que $g(0) = 1$.
Remarque : les fonctions sinus et cosinus ont les trois propriétés. Il existe donc bien des focntions compatibles.

b. D'après le a, $f(0) = 0$ et $g(0) = 1$ donc $\left(f(0)\right)^2 + (g(0))^2 = 1$ ce qui peut s'écrire, pour tout réel x,
$1 = \left(f(x + (-x))\right)^2 + (g(x + (-x)))^2$
Soit $1 = \left(f(x)g(-x) + g(x)f(-x)\right)^2 + (g(x)g(-x) - f(x)f(-x))^2$
Soit $1 = (f(x))^2(g(-x))^2 + 2f(x)g(-x)g(x)f(-x) + \left(g(x)\right)^2\left(f(-x)\right)^2 + \left(g(x)\right)^2\left(g(-x)\right)^2 - 2g(x)g(-x)f(x)f(-x) + (f(x))^2(f(-x))^2$
Soit $1 = (f(x))^2(g(-x))^2 + (g(x))^2(f(-x))^2 + (g(x))^2(g(-x))^2 + (f(x))^2(f(-x))^2 + 2(f(x)g(-x)g(x)f(-x) + g(x)g(-x)f(x)f(-x))$
Or $f(x)g(-x)g(x)f(-x) + g(x)g(-x)f(x)f(-x) = 0$
Donc $1 = (f(x))^2(g(-x))^2 + (g(x))^2(f(-x))^2 + (g(x))^2(g(-x))^2 + (f(x))^2(f(-x))^2$
Soit $1 = \left(g(-x)\right)^2\left(\left(f(x)\right)^2 + \left(g(x)\right)^2\right) + \left(f(-x)\right)^2\left(\left(g(x)\right)^2 + \left(f(x)\right)^2\right)$
Soit $1 = \left(\left(f(x)\right)^2 + \left(g(x)\right)^2\right)\left(\left(g(-x)\right)^2 + \left(f(-x)\right)^2\right)$
C'est-à-dire, pour tout réel x, $h(x)h(-x) = 1$.

c. D'aprè le b, $h(2\,022)h(-2\,022) = 1$. Montrons par l'absurde que $h(2\,022) = 1$.
Supposons que $h(2\,022) \neq 1$. Par défintion de h, pour tout réel x, $h(x) \geq 0$.
De plus, pour tout réel x, $-10 \leq f(x) \leq 10$ et $-10 \leq g(x) \leq 10$ donc $\left(f(x)\right)^2 \leq 100$ et $\left(g(x)\right)^2 \leq 100$ d'où l'on tire $h(x) \leq 200$.
Comme $h(2\,022)h(-2\,022) = 1$, Comme $h(2\,022) \neq 0$ et on a supposé que $h(2\,022) \neq 1$ donc soit $h(2\,022) > 1$ et $0 < h(-2\,022) < 1$ soit $h(-2\,022) > 1$ et $0 < h(2\,022) < 1$.
Or, pour tout réel x, $f(2x) = f(x+x) = f(x)g(x) + f(x)g(x) = 2f(x)g(x)$

Et $g(2x) = g(x)g(x) - f(x)f(x) = (g(x))^2 - (f(x))^2$.

D'où $h(2x) = (f(2x))^2 + (g(2x))^2 = (2f(x)g(x))^2 + \left((g(x))^2 - (f(x))^2\right)^2$

Soit $h(2x) = 4(f(x))^2(g(x))^2 + (g(x))^4 - 2(g(x))^2(f(x))^2 + (f(x))^4$

Soit $h(2x) = (f(x))^4 + 2(g(x))^2(f(x))^2 + (g(x))^4 = \left((f(x))^2 + (g(x))^2\right)^2 = (h(x))^2$.

On démontre alors par récurrence sur n que, pour tout entier n et tout réel x, $h(2^n x) = (h(x))^{2^n}$:

- Pour $n = 0$, on a bien pour tout réel x, $h(2^0 x) = h(x) = (h(x))^1 = (h(x))^{2^0}$
- Si pour un entier n, on a pour tout réel x, $h(2^n x) = (h(x))^{2^n}$

alors $h(2^{n+1}x) = h(2 \times 2^n x) = (h(2^n x))^2 = \left((h(x))^{2^n}\right)^2 = (h(x))^{2^{n+1}}$.

Or on a vu que si $h(2\,022) \neq 1$ alors soit $h(2\,022) > 1$ soit $h(-2\,022) > 1$ ce qui entraine soit $h(2^n \times 2\,022)$ soit $h(-2^n \times 2\,022)$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Ceci contredit le fait que pour tout réel x, $h(x) \leq 200$.

Donc $h(2\,022) = 1$.

Exercice 3 Équation fonctionnelle

Déterminer toutes les fonctions de **R** dans **R** telles que pour tous réels x et y,

$$f\big(f(x+y) - f(x-y)\big) = y^2 f(x). \qquad (E(x,y))$$

On pourra commencer par montrer qu'une telle fonction est paire.

On constate déjà que la fonction nulle convient.

Si f n'est pas la fonction nulle alors il existe un réel a tel que $f(a) \neq 0$.

La relation $E(x,0)$ donne $f\big(f(x) - f(x)\big) = 0$ soit $f(0) = 0$.

La relation $E(a,y)$ donne, pour tout réel y, $f\big(f(a+y) - f(a-y)\big) = y^2 f(a)$. Comme $f(a) \neq 0$ et lorsque y décrit **R**, y^2 décrit **R**⁺, la fonction f peut prendre toutes les valeurs strictement positives (si $f(a) > 0$) ou prendre toutes les valeurs strictement négatives (si $f(a) < 0$).

La relation $E(x,x)$ donne, pour tout réel x, $f(f(2x) - f(0)) = x^2 f(x)$ soit $f\big(f(2x)\big) = x^2 f(x)$

Et la relation $E(x,-x)$ donne, pour tout réel x, $f(f(0) - f(2x)) = x^2 f(x)$ soit $f\big(-f(2x)\big) = x^2 f(x)$

Comme $f(2x)$ peut prendre n'importe quelle valeur positive ou n'importe quelle valeur négative (suivant le signe de $f(a)$)et comme pour tout réel x , $f\big(f(2x)\big) = f(-f(2x))$, on en déduit que la fonction f est paire.

La relation $E(x,y)$ donne donc, pour tous réels x et y non nuls,

$x^2 f(y) = f\big(f(y+x) - f(y-x)\big) = f\big(f(y+x) - f(-y+x)\big) = y^2 f(x)$ en appliquant la parité de f.

Ceci s'écrit aussi $\frac{f(x)}{x^2} = \frac{f(y)}{y^2}$. On en déduit qu'il existe un réel c tel que pour tout réel non nul x, $f(x) = cx^2$, expression aussi valable pour $x = 0$ puisque $f(0) = 0$.

En reprenant l'égalité $f\big(f(2x)\big) = x^2 f(x)$ pour $x = 1$, on obtient $f(c \times 4) = 1 \times c$ soit $c \times 16c^3 = c$ équation en c dont les solutions sont $0, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$.

Le problème admet donc trois solutions, les fonctions définies sur **R** par $f(x) = -\frac{1}{4}x^2, g(x) = \frac{1}{4}x^2$ et la fonction nulle.

Exercice 4 Sommes et produits

Trouver tous les triplets de réels (a,b,c) tels que $\begin{cases} a+b+c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \\ a^2+b^2+c^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \end{cases}$.

On pourra poser $s = a+b+c, t = ab+bc+ca, p = abc$.

En réduisant au même dénominateur le membre de droite de chaque équation du système donné, on se ramène à résoudre le système $\begin{cases} s = \frac{bc+ca+ab}{abc} \\ s^2 - 2ab - 2bc - 2ca = \frac{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}{a^2b^2c^2} \end{cases}$

soit $\begin{cases} sp = t \\ s^2p^2 - 2tp^2 = t^2 - 2(abc^2 + a^2bc + ab^2c) \end{cases}$

Soit $\begin{cases} sp = t \\ s^2p^2 - 2tp^2 = t^2 - 2ps \end{cases}$

En reportant la première équation dans la deuxième, on obtient $s^2p^2 - 2sp^3 = s^2p^2 - 2ps$ qui s'écrit $2sp(1-p^2) = 0$ c'est-à-dire $p = 0$ ou $s = 0$ ou $p^2 = 1$.

- On ne peut avoir $p = 0$, car l'un au moins des quotients de la première équation du système initial ne serait pas défini.
- Si $s = 0$ alors, comme $sp = t$, $t = 0$, ce qui s'écrit $0 = ab + bc + ca = ab + c(a+b) = ab - (a+b)^2$ puisque $s = 0$. On en tire $a^2 + b^2 + ab = 0$ soit, en divisant parb^2 puisque $b \neq 0$, $\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{a}{b} + 1 = 0$
  Or l'équation $x^2 + x + 1 = 0$ n'a pas de solution réelle. On ne peut donc avoir $s = 0$.

Nécessairement $p^2 = 1$ soit $p = 1$ ou $p = -1$

<u>Si $p = 1$:</u>

Comme $c = \frac{1}{ab}$, la première équation du système initial s'écrit $a + b + \frac{1}{ab} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + ab$ soit, en réduisant au même dénominateur ab et en multipliant par ce dénominateur :

$a^2b^2 + b + a - a^2b - ab^2 - 1 = 0$ soit $ab(ab - a - b) + (a + b + 1) = 0$

Soit $ab(ab - a - b + 1) + (-ab + a + b - 1) = 0$ soit $(ab - 1)(ab - a - b - 1)) = 0$

C'est-à-dire $(ab - 1)(a - 1)(b - 1)) = 0$

On a donc :

$ab = 1$ d'où $c = 1$ soit $b = \frac{1}{a}$ et comme solutions les triplets $\left(a, \frac{1}{a}, 1\right)$

ou $a = 1$ d'où ou $bc = 1$ soit $c = \frac{1}{b}$ et comme solutions les triplets $\left(1, b, \frac{1}{b}\right)$

ou $b = 1$ d'où ou $ca = 1$ soit $c = \frac{1}{a}$ et comme solutions les triplets $\left(a, 1, \frac{1}{a}\right)$

<u>Si $p = -1$:</u>

Par le même raisonnement, $c = -\frac{1}{ab}$ et la première équation s'écrit $a + b - \frac{1}{ab} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - ab$

Soit, par des calculs analogues au cas précédent, $(ab - 1)(a + 1)(b + 1)) = 0$, ce qui permet d'aboutir aux triplets solutions $\left(a, \frac{1}{a}, -1\right)$ ou $\left(-1, b, \frac{1}{b}\right)$ ou $\left(a, -1, \frac{1}{a}\right)$.

Au final, on peut aisément vérifier que tous les triplets obtenus sont bien solutions du système initial.

Exercice 5 À la recherche de nombres premiers

Existe-t-il des entiers naturels n tels que le nombre $N = 8^n + 47$ soit un nombre premier ?

On pourra s'aider de congruences.

On remarque que $N \equiv (-1)^n + 2 \ [3]$ et que si n est pair alors $N \equiv 3 \ [3]$ ou encore $N \equiv 0 \ [3]$,et donc N est divisible par 3 donc non premier.

On pose donc $n = 2k + 1$ où k est un entier. Alors $N = 8^{2k+1} + 47 = 64^k \times 8 + 47$ et on s'intéresse d'autres congruence faisant intervenir une puissance de (-1),

- la congruence modulo 13 : $N \equiv (-1)^k \times 8 + 8 \ [13]$ et si k est impair alors $N \equiv 0 \ [13]$ donc N est divisible par 13 et donc non premier.
- La congruence modulo 5 : $N \equiv (-1)^k \times 3 + 2 \ [5]$ et si k est pair alors $N \equiv 5 \ [5]$ soit $N \equiv 0 \ [5]$ donc N est divisible par 5 et donc non premier.

Il n'existe donc pas d'entier naturels n tel que le nombre $N = 8^n + 47$ soit un nombre premier.