1 Principe de base de logique

« Logique » vient du grec « logos » qui signifie « parole, discours », et par extension « rationalité », la logique est donc la science de la raison. Plus précisément, c'est la « science » qui étudie les règles que doit respecter tout raisonnement valide et qui permettent de distinguer un raisonnement valide d'un raisonnement qui ne l'est pas.

Notations usuelles :

$x \in A$	x est un élément de A ou x appartient à A	
$x \notin A$	x n'est pas un élément de A ou x n'appartient pas à A	
$A \subset B$	A est inclus dans B ou A est un sous-ensemble de B	Si $x \in A$ Alors $x \in B$.
$A \not\subset B$	A n'est pas inclus dans B ou A n'est pas un sous-ensemble de B	Il existe $x \in A$ tel que $x \notin B$

Les principes de base à connaître sont les suivants :

- Savoir écrire la négation d'une proposition
- Mettre en place un raisonnement par l'absurde
- Comprendre que si A et B sont deux ensembles, alors :
  - $A \subset B \iff \forall x \in A,\ x \in B$ ou encore, $\forall x,\ x \in A \Longrightarrow x \in B$
  - $A = B \iff A \subset B$ et $B \subset A$
  - $A \not\subset B \iff \exists x \in A,\ x \notin B$
- Savoir appliquer la définition d'un ensemble pour démontrer qu'un élément lui appartient ou non

Des exemples :

1. Considèrons les ensembles suivants : $A = \{x \in \mathbb{R},\ x^2 > 1\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R},\ x > 2\}$.

   - Dire que A est inclus dans B, c'est dire que pour tout $x \in A$, on a : $x \in B$.
     Ou encore : Pour tout x, si $x \in A$ alors $x \in B$.
     Or, $-2 \in A$, car $(-2)^2 = 4 > 1$, et $-2 \notin B$, car $-2 \leq 2$.
     Il existe donc un élément de A qui n'est pas dans B.
     Donc, A n'est pas inclus dans B.

   - Dire que B est inclus dans A, c'est dire que pour tout $x \in B$, on a : $x \in A$.
     Si $x \in B$, par défintion de B, on a : $x > 2$. Donc, $x^2 > 4$. Or, $4 > 1$.
     Donc, si $x \in B$ alors $x^2 > 1$.
     Mais, par définition, $x \in A$ signifie que $x^2 > 1$.
     On a donc : Si $x \in B$ alors $x \in A$
2. Considèrons une suite u numérique définie sur $\mathbb{N}$. On se rappelle que u est croissante signie que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} \geq u_n$.

   Donc, dire que u n'est pas croissante signifie qu'il existe un entier naturel n tel que $u_{n+1} < u_n$.
   - u croissante $\iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq un$
   - u n'est pas croissante $\iff \exists n \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n+1} < u_n$

1.1 Exercices

Exercice 1 :
Soient les quatre assertions suivantes :

$$\text{(a) } \exists x \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall y \in \mathbb{R}\ x+y>0 \qquad \text{(b) } \forall x \in \mathbb{R}\ \exists y\ \mathbb{R}\ x+y>0$$
$$\text{(c) } \forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}\ , x+y>0 \qquad \text{(d) } \exists x \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall y \in \mathbb{R}\ , y^2>x$$

1. Les assertions a, b, c, d sont-elles vraies ou fausses ?
2. Donner leur négation.

Exercice 2 :
Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Nier, de la manière la plus précise possible, les énoncés qui suivent :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) \leq 1$.
2. L'application f est croissante.
3. L'application f est croissante et positive.
4. Il existe $x \in \mathbb{R}^+$ tel que $f(x) \leq 0$.
5. Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que quel que soit $y \in \mathbb{R}$, si $x<y$ alors $f(x)>f(y)$.

On ne demande pas de démontrer quoi que ce soit, juste d'écrire le contraire d'un énoncé.

Exercice 3 :
Compléter les pointillés par le connecteur logique qui s'impose $\Longleftrightarrow$, $\Longrightarrow$ ou $\Longleftarrow$.

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, $x^2=4 \cdots\cdots x=2$
2. Pour $z \in \mathbb{C}$, $z=\bar{z} \cdots\cdots z \in \mathbb{R}$
3. Pour $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \in \mathbb{N} \cdots\cdots x \in \mathbb{N}$
4. Pour $x \in \mathbb{R}$, $x=\pi \cdots\cdots \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}=1$
5. Pour $x \in \mathbb{R}$, $-2 \leq x \leq 4 \cdots\cdots 0 \leq x^2 \leq 16$
6. Pour $x \in \mathbb{R}$, $0<x^2 \leq 4 \cdots\cdots -2 \leq x \leq -1$

Exercice 4 :
Par définition, une application f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est majorée si et seulement si
il existe un réel M tel que pour tout x réel, $f(x) \leq M$.

$$f \text{ est majorée sur } \mathbb{R} \Longleftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq M$$

Soient f et g deux applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

1. Ecrire la négation de « f est majorée sur $\mathbb{R}$ »
2. Montrer que si f et g sont majorées, alors $(f+g)$ est majorée.
3. Peut-on affirmer que si f et g sont majorées alors fg est aussi majorée ?
4. Peut-on affirmer que si $(f+g)$ et fg sont majorées alors f et g sont aussi majorées ?
5. Peut-on affirmer que si $(f+g)$ et $(f-g)$ sont majorées alors f et g sont aussi majorées ?

Exercice 5 :
Par définition, une application f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et bornée si et seulement si
il existe deux réels m et M tels que pour tout réel x, $m \leq f(x) \leq M$.

$$f \text{ est bornée sur } \mathbb{R} \Longleftrightarrow \exists m \in \mathbb{R},\ \exists M \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R},\quad m \leq f(x) \leq M$$

Soient f et g deux applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

1. Ecrire la négation de « f est bornée sur $\mathbb{R}$ »
2. Montrer que si f et $-f$ sont majorées si et seulement si f est bornée.
3. Montrer que si f et g sont bornées alors $(f+g)$ est bornée.
4. Peut-on affirmer que si f et g sont bornées alors fg est aussi bornée ?
5. Peut-on affirmer que si fg est bornée alors f et g sont bornées ?
6. Peut-on affirmer que si f^2 est bornée alors f est bornée ?

2 Raisonnement par Récurrence

2.1 Les bases à savoir

Soit P une propriété dépendant d'un paramètre entier naturel n.

Pour un entier n, $P(n)$ peut-être vraie ou fausse.

Par exemple, si on note $P(n)$ la propriété suivante : $P(n)$: « $2^n + 1$ est divisible par 5 »

on remarque que $P(1)$ dit que « $2^1 + 1$ est divisble par 5 »... ce qui est faux,

mais $P(2)$ dit que « $2^2 + 1$ est divisible par 5 », ce qui est vrai.

Le fait que $P(n)$ soit vraie ou fausse dépend donc de n.

Définition

— On dit que la P est vraie à partir du rang $n_0 \in \mathbb{N}$, si $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

— On dit que P est héritidaire à partir du rang $n_0 \in \mathbb{N}$, si pour tout $n \geq n_0$, on a : $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$.
Autrement dit, si pour tout $n \geq n_0$, on a : Si $P(n)$ est vraie Alors $P(n+1)$ est vraie.

Théorème de la Récurence

Si P est héréditaire à partir du rang $n_0 \in \mathbb{N}$ et si $P(n_0)$ est vraie alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Autrement dit : S'il existe un entier n_0 tel que :

— *Initialisation :* $P(n_0)$ soit vraie

— *Hérédité :* Pour tout $n \geq n_0$, on a : $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$

— *Conclusion :* Alors la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Remarque

Si P est une propriété dépendant d'un paramètre entier naturel n peut être héréditaire en étant fausse pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Prenons l'exemple de P définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: « $(n + \frac{1}{2}) \in \mathbb{N}$ ».
Pour $n \in \mathbb{N}$ quelconque, si $(n + \frac{1}{2}) \in \mathbb{N}$ alors $(n + \frac{1}{2}) + 1 \in \mathbb{N}$ donc $((n+1) + \frac{1}{2}) \in \mathbb{N}$.
On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$. P est bien héréditaire sur $\mathbb{N}$.
Mais pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est fausse !

Pour l'initialisation, il s'agit de montrer que $P(n_0)$ est vraie ! Il ne suffit pas de l'affirmer.

Si P est définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ « $2^n > 2n + 4$ »
On peut dire que $P(4)$ est vraie car : $2^4 = 16$ et $2 \times 4 + 4 = 12$. On a bien $2^4 > 2 \times 4 + 4$.
Donc, $P(4)$ est vraie.

2.2 Exercices

Exercice 6 :
Montrer par récurrence les propriétés suivantes :
(a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ (b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{2}$
(c) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$ (d) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$
(e) $\forall n \in \mathbb{N}$, $2^n > n$

Exercice 7 :

1. Démontrer que pour tout réel x, $\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{1+\cos(x)}{2}$.
2. On définit la suite u par les relations : $u_0 = \cos(\alpha)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}}$.
   Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = \cos\left(\dfrac{\alpha}{2^n}\right)$.

Exercice 8 :
Sit (u_n) la suite définie par : $u_n = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n+2}$.

1. Etudier les variations de la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$.
2. Démontrer alors par récurrence que u est positive et décroissante.

Exercice 9 :
Montrer par récurrence la prorpiété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin(nx)| \leq n|\sin(x)|$$

Exercice 10 :
Soit $a > 0$. u est la suite définie par : $u_0 = 1$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{1+au_n^2}}$.

Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

indication .... commencer par calculer et simplifier u_1, u_2, u_3
Conjecturer alors l'expression de u_n en fonction de n .. et démontrer cette conjecture par récurrence.

Exercice 11 :
Détermination de la dérivée n-iéme d'une fonction.

1. f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x\mathrm{e}^x$.
   (a) Calculer les dérivées jusqu'à l'ordre 3 de f.
   (b) Conjecturer l'expression de $f^{(n)}(x)$ et la démontrer.
2. On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2\mathrm{e}^x$.
   Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x\left(x^2+2nx+n(n-1)\right)$.

Exercice 12 :
Soit x un réel non nul tel que $x + \dfrac{1}{x}$ soit un entier. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x^n + \dfrac{1}{x^n}$ est un entier.

Exercice 13 : Soit (u_n) une suite définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
Calculer les premiers termes de cette suite. Conjecturer l'expression de u_n en fonction de n et démontrer cette conjecture.

Exercice 14 :
On veut déterminer le nombre de diagonales dans un polygone convexe ayant n sommets.
On note d_n le nombre de diagonales dans un polygone convexe ayant n sommets.

1. Déterminer d_3, d_4, d_5 et d_6.
2. Montrer par récurrence que pour $n \geq 3$, $d_n = \dfrac{n(n-3)}{2}$

3 Suites Numériques

3.1 Suites Arithmétiques

1 : Définition Suites Arithmétiques

On dit que la suite U est arithmétique si et seulement si il existe un réel r tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = U_n + r$.

Le réel r est appelé Raison de la suite arithmétique.

Dire que U est arithmétique revient donc à dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - U_n$ ne dépend pas de n,
ou autrement dit, que la suite $(U_{n+1} - U_n)$ est constante.

2 : Expression de U_n en fonction de n
Le schéma d'une suite arithmétique U de raison r est donc le suivant :

— $U_0 \in \mathbb{R}$, $U_1 = U_0 + r$, $U_2 = U_1 + r = U_0 + 2r$, ...etc, $U_n = U_{n-1} + r = U_0 + n \times r$

On a alors : $\boxed{\text{Si } U \text{ est arithmétique de raison } r, \text{ alors } \forall n \in \mathbb{N} ,\ U_n = U_0 + nr}$

On remarque que cette expression de U_n en fonction de n est de la forme $an + b$, c'est à dire, affine.

Réciproquement :
S'il existe une fonction affine f telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = f(n)$, Alors U est arithmétique.

— Effectivement, si f est affine, alors il existe a et b réels tels que pour tout réel x, $f(x) = ax + b$.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = an + b$.
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $U_{n+1} - U_n = (a(n + 1) + b) - (an + b) = an + a + b - an - b = a$.
Donc, (U_n) est bien arithmétique de raison a.

D'où, on peut dire que :

$\boxed{\text{La suite } (U_n) \text{ est arithmétique si et seulement si l'expression de } U_n \text{ en fonction de } n \text{ est affine}}$

ou encore

$\boxed{\text{Il existe } r \text{ et } b \in \mathbb{R}, \text{ , tels que } \forall n \in \mathbb{N},\quad U_{n+1} = nr + b. \quad r \text{ est alors la raison de } U}$

3 : Relation entre U_n et U_k
Si U est arithmétique, on a $U_n = nr + b$, avec a et b réels fixés. Donc, pour n et $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$U_n = nr + b = kr + b + (n - k)r = U_k + (n - k)r$$

D'où , si U est arithmétique de raison r alors pour tout couple $(n; k)$ de $\mathbb{N}$, on a : $U_n = U_k + (n - k)r$.

4 : Somme des termes d'une suite arithmétique
Soit U une suite arithmétique de raison r.

On pose $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} U_k$. Alors : $\boxed{S_n = (n + 1)\dfrac{U_0 + U_n}{2}}$

Autre écriture de cette formule ! $\boxed{S_n = (\text{Nombre de Termes}) \times \dfrac{(\text{Premier Terme}) + (\text{Dernier Terme})}{2}}$

5 : Cas Particulier à connaître !

La somme $S_n = 0 + 1 + 2 + \cdots + n$ se réduit en $\boxed{0 + 1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n + 1)}{2}}$.

3.2 Suites Géométriques

1 : Définition : Suites Géométriques
On dit que la suite U est géométrique de raison q si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = q \times U_n$.

2 : Expression de U_n en fonction de n Si U est géométrique de raison q, on a alors le schéma suivant :
— $U_0 \in \mathbb{R}$,
— $U_1 = U_0 \times q$, $U_2 = U_1 \times q = U_0 \times q^2$, $U_3 = U_2 \times q = U_0 \times q^3$, ..etc, $U_n = U_{n-1} \times q = U_0 \times q^n$.

Réciproquement...
S'il existe a et b réels tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = a^n \times b$,
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $U_{n+1} = a^{n+1} \times b = a \times (a^n \times b) = a \times U_n$.
La suite U est alors géométrique de raison a.

On peut donc dire :

La suite U est géométrique si et seulement si il existe a et b réels tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = a^n \times b$. a est alors la raison de U.

3 : Somme des termes d'une suite géométrique

1. Si on pose $Q_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$, alors :

$$\begin{cases} Q_n = (n+1) \text{ si } q = 1 \\ Q_n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \text{ si } q \neq 1 \end{cases}$$

2. Si (U_n) est géométrique de raison q et si on pose $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n$, alors :

$$\begin{cases} S_n = (n+1)U_0 \text{ si } q = 1 \\ S_n = U_0 \times \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \text{ si } q \neq 1 \end{cases}$$

Le 1. se vérifie directement en remarquant ceci !
— Si $q \neq 1$, alors

$$Q_n(1-q) = (1 + q + q^2 + \cdots + q^n)(1-q) = (1-q) + (q - q^2) + (q^2 - q^3) + \cdots + (q^{n-1} - q^n) + (q^n - q^{n+1})$$

D'où ...$Q_n(1-q) = 1 - q^{n+1}$ ... D'où ... $Q_n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Pour le 2., il suffit de voir que $U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n = U_0(1 + q + q^2 + \cdots + q^n)$.

4 : Limite d'une suite géométrique
Pour tout $q \in \mathbb{R}$, on a : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0 \Longleftrightarrow |q| < 1}$ et si $q > 1$ alors $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty}$.

Donc, si la suite U est géométrique de raison q, on a $U_n = U_0 \times q^n$.
D'où, si $U_0 \neq 0$, on a : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0 \Longleftrightarrow |q| < 1}$.

<u>Conséquence</u>

Pour $|q| < 1$, la somme $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$ est égale à : $S_n = U_n \times \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Mais comme $|q| < 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} q^{n+1} = 0$ ... D'où ... $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{U_0}{1 - q}$.

La somme des termes d'une suite géométrique de raison q avec $|q| < 1$ converge vers $\dfrac{U_0}{1 - q}$

3.3 Cas particulier des suites Arithmético-Géométriques

1 : Définition Suites Arithmético-Géométriques
On dit que la suite (U_n) est Arithmético-Géométrique si et seulement si il existe a et b réels tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} = aU_n + b$$

— Si $a = 1$, on retrouve les suites arithmétiques !

— Si $b = 0$, on retrouve les suites géométriques !

Le cas le plus général est celui où $a \neq 1$ et $b \neq 0$. La suite (U_n) est alors simplement une suite récurrente vérifiant $U_{n+1} = f(U_n)$ où f est une fonction affine. $f(x) = ax + b$.

Propriete :On se ramène au cas Géométrique !
Si (U_n) est arithmético-géométrique avec $U_{n+1} = aU_n + b$, $a \neq 1$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que la suite (V_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad V_n = U_n - \alpha$$

soit une suite géométrique de raison $q = a$.
Démonstration
Posons $f(x) = ax + b$. Comme $a \neq 1$, il existe α réel unique vérifiant l'équation $f(x) = x$.
De plus, $\alpha = \dfrac{b}{1-a}$.
Posons alors $V_n = U_n - \alpha$. Alors, pour n quelconque $\in \mathbb{N}$, on a :
— $V_{n+1} = U_{n+1} - \alpha$

— $V_{n+1} = f(U_n) - f(\alpha)$

— $V_{n+1} = a(U_n - \alpha)$ car f est affine d'où ..

— $V_{n+1} = aV_n$

Donc, la suite (V_n) est bien géométrique de raison $q = a$.
On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = a^n \times V_0$. Or, $V_0 = U_0 - \alpha$ donc $V_n = a^n \times (U_0 - \alpha)$.

Proposition 3.1 *Expression de U_n en fonction de n*
Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $U_n = V_n + \alpha$, on en déduit l'expression de U_n en fonction de n.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n = a^n \times (U_0 - \alpha) + \alpha$$

Proposition 3.2 *Limite de (U_n)*
On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = 0 \Longleftrightarrow < 1$. Donc, on peut dire :

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \alpha \Longleftrightarrow |a| < 1$$

3.4 Exercices

Exercice 15 :
On veut étudier la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sin\left(\pi\sqrt{4n^2+n}\right)$$

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_n = \sin\left(\pi\sqrt{4n^2+n} - 2\pi n\right)$$
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$\sqrt{4n^2+n} - 2n = \frac{n}{\sqrt{4n^2+n}+2n}$$
3. Etudier la limite de $\dfrac{n}{\sqrt{4n^2+n}+2n}$ si n tend vers $+\infty$.
4. En déduire la convergence de la suite u et donner sa limite.
5. Etudier la convergence de la suite a définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \tan\left(\pi\sqrt{4n^2+n}\right)$$

Cet exercice peut être traité avec des connaissances qui ne dépassent pas celles de Terminale S.

Il s'agit de se rappeler de certaines petites choses !
- les fonctions circulaires sont périodiques. En particulier, $\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \sin(x+2n\pi) = \sin(x)$
- On sait que pour tout $(a\ ,\ b) \in \mathbb{R}^2$, $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$
- Si f est une fonction définie sur un intervalle ouvert I et continue en $a \in I$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Exercice 16 :

On définit les suites u , S et H par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*$$
$$u_n = \frac{1}{n}, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k, \quad H_n = \sum_{k=n}^{2n} u_k$$

1. On étudie la suite (S_n).
   (a) Montrer que pour pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq u_n$.
   (b) En déduire alors que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) \leq S_n$.
   (c) Que peut-on en déduire concernant le comportement de S_n si n tend vers $+\infty$?

2. On étudie la suite (H_n).
   (a) Calculer "à la main", H_1, H_2 , H_3 et H_4.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_{n+1} = H_n - \frac{3n+2}{2n(n+1)(2n+1)}$.
   (c) Montrer alors que la suite (H_n) est convergente.

Rappel de connaissances qui ne dépassent pas celles de Terminale S

pour traiter cet exercice!!

- Si $f \leq g$ sur $[a\ ,\ b]$ et si f et g sont continues sur $[a\ ,\ b]$ alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$
- $\forall x > 0$, $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t$
- $\forall k \in \mathbb{R}$, $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\int_a^b k\mathrm{d}x = k(b-a)$
- Théorème de la convergence monotone.

Exercice 17 : **Somme classique et Produit ?**

Pour rappel, si x est un réel tel que $|x| < 1$, à quoi est égale la somme suivante

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} x^k \ ?$$

Vous connaissez ! on a : $S_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$. Vous savez cela depuis la classe de première !
Allez revoir le chapitre sur les suites géométriques. Important de bien maîtriser celui-ci !

Donc, si $|x| < 1$, que peut-on dire de la limite de cette somme, si n tend vers $+\infty$?
A vous de voir cela !

Maintenant, pour $|x| < 1$, définissons la suite (P_n) de la façon suivante :
- $P_0 = (1 + x) = (1 + x^{2^0})$
- $P_1 = (1 + x)(1 + x^2) = (1 + x^{2^0})(1 + x^{2^1}) = P_0 \times (1 + x^2)$
- $P_2 = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4) = (1 + x^{2^0})(1 + x^{2^1})(1 + x^{2^2}) = P_1 \times (1 + x^4)$
- $P_3 = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8) = (1 + x^{2^0})(1 + x^{2^1})(1 + x^{2^2})(1 + x^{2^3}) = P_2 \times (1 + x^8)$
- $P_4 = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8)(1 + x^{16}) = (1 + x^{2^0})(1 + x^{2^1})(1 + x^{2^2})(1 + x^{2^3})(1 + x^{2^4}) = P_3 \times (1 + x^{16})$
- Et d'une façon générale : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1} = P_n \times (1 + x^{2^{n+1}})$

On peut écrire cette suite avec le symbole $\prod$ .. qui signifie .. produit !

$$P_n = \prod_{k=0}^{n} (1 + x^{2^k})$$

Et maintenant les questions sur cette suite !

1. Développer P_1, P_2, P_3 et P_4.
2. Quelle conjecture peut-on formuler concernant l'expression de P_n en fonction de n ?
3. Démontrer alors cette conjecture.
4. Etudier alors la limite de (P_n).

D'une façon plus générale, si (u_n) est une suite, on peut définir le produit des termes de $k = 0$ à n des cette suite P_n comme on peut définir la somme des ses termes de $k = 0$ à n, S_n.
On a :

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \quad \text{et} \quad P_n = u_0 \times u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_n = \prod_{k=0}^{n} u_k$$

3.5 Sommes Télescopiques

u étant une suite indexée, par exemple, sur $\mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Le calcul de cette somme S_n peut être simplifiée si on peut déterminer une suite v telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_{n+1} - v_n$$

Dans ce cas, on peut écrire que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} (v_{k+1} - v_k)$$

Mais, $\sum_{k=0}^{n} (v_{k+1} - v_k) = (v_1 - v_0) + (v_2 - v_1) + (v_3 - v_2) + \cdots + (v_n - v_{n-1}) + (v_{n+1} - v_n)$.
On peut alors remarquer que les termes v_k se simplifient deux à deux, sauf les deux termes extrêmes qui sont v_0 et v_{n+1}.

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = v_{n+1} - v_0$.

Ce principe est appelé "Somme Télescopique" .... Il y a un "télescopage" des termes de la somme !

Exercice 18 :
On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$.
2. En déduire l'expression de S_n en fonction de n puis étudier la convergence de S.

Exercice 19 :

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ simplifier $\dfrac{1}{n(n+1)} - \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$.
2. Déterminer alors l'expression en fonction de n de : $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}$

3.6 Unicité de la limite

Si u est une suite numérique convergente alors sa limite est unique.

Autrement dit, si u converge vers ℓ et $\ell' \in \mathbb{R}$ alors $\ell = \ell'$

Ce résultat est assez commode pour démontrer qu'une suite ne converge pas, c'est à dire, diverge.
Rappelons que **diverger** ne veut pas dire tendre vers $+\infty$ ou $-\infty$!

Exercice 20 :
Question rapide !

Existe-t-il une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement positive telle que

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n}$?

Exercice 21 :

Etudier la suite u définie par les relations : $\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$ $\quad a \geq 0$

Exercice 22 :
On veut étudier la convergence de la suite $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Montrer que si cette suite converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors ℓ est solution de l'équation $\ell^2 = \dfrac{\ell+1}{2}$.
   En déduire les valeurs possibles de l'éventuelle limite de $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Soit k un entier naturel.
   (a) Montrer que les intervalles $I_k = \left]2k\pi\ ,\ 2k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right[$ et $J_k = \left]\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\ ,\ \pi + 2k\pi\right[$ sont disjoints et contiennent tous les deux au moins un entier naturel.
   (b) Que peut-on dire du signe de la fonction Cosinus sur les intervalles I_k et J_k ?
3. Montrer alors que la suite $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

Exercice 23 :
On rappelle qu'une suite u (définie sur $\mathbb{N}$) est dite périodique s'il existe un entier $m > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+m} = u_n$.

Le cas où $m = 1$ correspond au cas d'une suite constante.

Montrer qu'une suite périodique converge si et seulement si elle est constante.

Exercice 24 :

u est la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = a \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{u_n - 1} \end{cases}$

1. Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des réels a tels que la suite u soit bien définie sur $\mathbb{N}$.
2. Montrer que pour tout $a \in \mathcal{D}$, u est périodique.
3. Existe-t-il $a \in \mathcal{D}$ tel que u converge ?

Exercice 25 : Etude d'une suite en utilisant plusieurs méthodes !
a est un rel. La suite u est définie par les relations suivantes :

$$u_0 = a, \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = \frac{2u_n^2 - 3}{u_n + 2}$$

Partie A : On commence par étudier cette suite pour $a = 4$.

1. On utilise une fonction f telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Après avoir étudié les variations de $f : x \longrightarrow \dfrac{2x^2 - 3}{x + 2}$ sur $[0\,; +\infty[$, et résolu l'équation : $f(x) = x$, montrer que la suite u est minorée par 4 et croissante.
   (b) Montrer que u diverge vers $+\infty$.
2. On fait beaucoup de calcul !
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 3$.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - 3 > \dfrac{3}{2}(u_n - 3)$.
   (c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \left(\dfrac{3}{2}\right)^n + 3$.
   (d) Etudier alors la limite de la suite u.

Pour étudier une suite récurrente u définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, mieux vaut souvent commencer par étudier la fonction f.

Connaître les variations de f et savoir si l'équation $f(x) = x$ a des solutions !!!
Voilà en général les premières petites choses à étudier.

Ce n'est pas un hasard si ce sont souvent les premières questions que l'on pose dans un tel cas en début d'exercice.

C'est la méthode de récurrence qui définit la suite u qui est intéressante, autrement dit, la fonction f.

Dans l'exemple précédent, vous pouvez vite voir que la condition initiale de la suite, $u_0 = 4$, aurait pu être changé par $u_0 = a$ avec $a > 3$, sans que cela change le comportement global de la suite.

Et maintenant, posons-nous une petite question !
Si on choisit comme valeur initiale pour cette suite : $u_0 = -4$, que se passe-t-il ? Tout ne dépend que de la fonction f ?

D'où, la suite de petites questions qui suivent !

Partie B :

1. Pouvez-vous trouver un réel a tel que la suite u soit constante ?
2. Si u converge, que pouvez-vous dire de sa limite ?
3. Si $a < -4$, que pouvez-vous dire de $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n)$?
4. Montrez que que pour tout $a \in \mathbb{N}$, la suite u est bien définie sur $\mathbb{N}$.

4 Fonctions

4.1 Recherche de limites

Il est bon de revoir les résultats classiques vus en Terminale concernant les limites !

Exercice 26 : Rappeler les limites de cours suivantes : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}$

Déterminer alors les limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x)}{x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{x}$ (c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{x}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(ax)}{x}$ (e) $(a>0)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+ax)}{x}$ (f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-\mathrm{e}^{bx}}{x}$

Exercice 27 : Etudier les limites suivantes

1. (a) : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ (b) : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin(x)\mathrm{e}^{-x}$ (c) : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{1/x}$ (d) : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{x}$

2. (a) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin(x)}{x-\pi}$ (b) : $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\cos(\pi x)-1}{x-2}$ (c) : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos(x))}{x}$ (d) : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x^2/2-\cos(x)}{\sin(x^2)}$

Exercice 28 : Etudier les limites suivantes :

1. (a) : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3+x^2-x)$ (b) : $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+x^2)$ (c) : $\lim\limits_{x\to+\infty}(-3x^5+x^2+1)$ (d) : $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^4+x^3+x+1)$

2. (a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x-5}\right)$ (b) : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2+x}{-x+2}\right)$ (c) : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2+3x+1}{3x^3+2x^2+1}\right)$ (d) : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^4+x^3+x^2}{5x^4+x^+1}\right)$

D'une façon plus générale, si P et Q sont deux fonctions polynomiales de degrés respectifs n et m,

$$P: x\to a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0 \qquad \text{et} \qquad Q: x\to b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\dots+b_1x+b_0$$

où a_n et b_m sont non nuls, que peut-on dire des limites suivants :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\ ?$$

Exercice 29 : On peut remarquer que pour tout réel a et $b>0$, on a : $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

A partir de là, étudier les limites suivantes :

1. (a) : $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ (b) : $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$ (c) : $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$

2. (a) : $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}+x)$ (b) : $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+3x})$ (c) : $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2+bx})$

Exercice 30 : Etudier les limites suivantes :

1. (a) : $\lim\limits_{xto+\infty}\left(\dfrac{x+\cos(x)}{2x+\sin(x)}\right)$ (b) : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\cos(x)e^{2x}\right)$ (c) : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin(\mathrm{e}^{-x})e^x\right)$

2. (a) : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(e^x+2)}{x+2}\right)$ (b) : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^{2x+1}+e^{x-1}}{\mathrm{e}^{2x}+3}\right)$ ((x) : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{e^x+x}{\mathrm{e}^{\cos(x)}+2x}\right)$

4.2 Composition de fonctions

la définition de $f \circ g$, l'ensemble de définition de $f \circ g$, la construction graphique de $f \circ g(x)$, ...

Exercice 31 :
f et g sont les deux fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par : $f : x \to \dfrac{2x+1}{x-1}$ et $g : x \to \dfrac{3x+1}{x+1}$.

1. Déterminer les ensembles de définitions de f et de g, ensembles que l'on note respectivement D_f et D_g.
2. On pose $h = f \circ g$. Pour rappel, h est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui, à tout élément de $\mathbb{R}$ associe, si c'est possible, $h(x) = f(g(x))$.
   (a) Peut-on calculer $h(1)$? $h(2)$? $h(-1)$? $h(0)$?
   (b) Déterminer l'ensemble de définition de h, que l'note D_h.
   (c) Pour $x \in Dh$, déterminer l'expression de $h(x)$ en fonction de x sous la forme la plus simple possible.
   (d) Résoudre alors les équations suivantes :

$$\text{(a)} : h(x) = 0 \qquad \text{(b)} : h(x) = 2 \qquad \text{(c)} : h(x) = \frac{7}{2}$$

Exercice 32 :
On considère deux fonctions affines f et g, $f(x) = ax + b$ et $g(x) = 2x + 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Déterminer a et b sachant que :

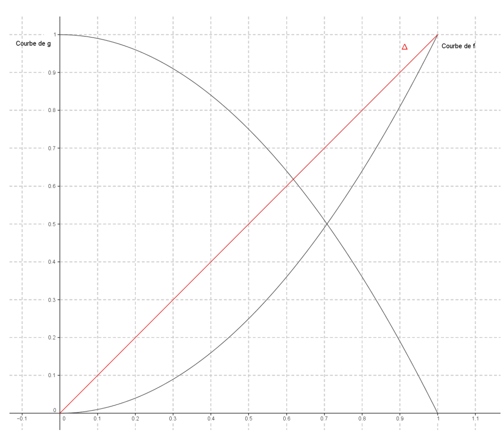
(a) $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f \circ f(x) = x$ (b) $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f \circ g(x) = x$ (c) $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f \circ g(x) = g \circ f(x)$ (d) $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f \circ f(x) = g \circ f(x)$

Exercice 33 :
f et g sont deux fonctions numériques définies par : $f : x \to \dfrac{x-1}{x+1}$ et $g : x \to \dfrac{1}{x^2-1}$

1. Déterminer les ensembles de définition de f et de g.
2. Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes :

$$f \circ g\ ,\ g \circ f\ ,\ f \circ f\ ,\ g \circ g$$

Exercice 34 :
On a représenté les courbes de deux fonctions continues f et g définies sur l'intervalle $I = [0\,;\,1]$
f est strictement croissante sur I et g est strictement décroissante sur I.
On sait que $f(0) = g(1) = 0$ et $f(1) = g(0) = 1$. La droite Δ a pour équation $y = x$.



1. Construire les images des réels suivants par les fonctions indiquées :
   (a) : 0,5 par $f \circ g$ (b) : 0,5 par $g \circ f$ (c) : 0,4 par $f \circ f$ (d) : 0,4 par $g \circ g$
2. (a) Déterminner le sens de variation de $f \circ g$ sur I puis montrer que pour tout $y \in I$, il existe un unique réel $x \in I$ tel que $f \circ g(x) = y$.
   (b) Déterminer un encadrement d'amplitude 0,1 de l'antécédent de 0,2 par $f \circ g$.

4.3 Calcul de dérivées

Revoir les taux d'accroissement, les dérivées usuelles, les formules de dérivation usuelles, la dérivée de $f \circ g$, les variations ....

Exercice 35 :
f est une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.

1. Si f est dérivable en a, peut-on affirmer que f est continue en a ?
   Si f est continue en a, peut-on affirmer que f est dérivable en a ?
2. Si f est dérivable en a, déterminer $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a-h)}{h}$.

Exercice 36 :
Déterminer pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son ensemble de définition puis son ensemble de continuité et et enfin son ensemble de dérivabilité.

1. (a) : $f_1(x) = |x-1|$ (b) : $f_2(x) = \sqrt{x^2-1}$ (c) : $f_3(x) = \dfrac{x+1}{|x|+1}$ (d) : $f_4(x) = (x-1)\sqrt{x^2-1}$

2. (a) : $f_1(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x < 0 \\ |x-1| & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$ (b) : $f_2(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x\ln(x) & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$ (c) : $f_3(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2\ln(x)| & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

Exercice 37 : *Autour de la dérivée logarithmique*
u et v sont deux fonctions numériques dérivables sur un même intervalle I telles que $\forall x \in I$, $u(x) > 0$ et $v(x) > 0$.

1. Justifier que $f = \ln(uv)$ est définie et dérivable sur I.
2. Exprimer simplement f' en fonctions de u, v, u' et v'.
3. $u_1, u_2, \cdots, u_n$ sont n fonctions numériques définies et dérivables sur un même intervalle I et prenant des valeurs > 0.
   On pose $f_n = \ln(u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_n) = \ln\left(\prod\limits_{k=1}^{n} u_k\right)$.
   Justifier que f_n est bien dérivable sur I et exprimer f_n' en fonction des u_k et u_k'.
4. On pose $f : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)| \end{array} \right.$
   (a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\ ;\ 1;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\}$
   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\ ;\ 1;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\}$, $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x-3} + \dfrac{1}{x-4}$

Exercice 38 : *Utilisation des dérivées ....*
Démontrer les inégalités suivantes :

1. (a) : $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2$ (b) : $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x) \geq 1 - \dfrac{1}{2}x^2$ (c) : $\forall x \geq 0,\ \sin(x) \geq x - \dfrac{1}{6}x^3$

2. (a) : $\forall x \geq 0,\ \ln(1+x) \geq x - \dfrac{1}{2}x^2$ (b) : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R},\ (1+x)^n \geq 1 + nx$ (c) : $\forall x > -1,\ \sqrt{1+x} \leq 1 + \dfrac{x}{2}$

Exercice 39 : *Autour de la convexité ....*

f est une fonction dérivable sur un intervalle I .

1. On suppose que f' est croissante sur I.
   Montrer que pour tout réel $a \in I$ et tout réel $x \in I$, on a : $f(x) \geq f'(a)(x-a) + f(a)$.
2. On suppose que pour tout $x \in I$ et tout $a \in I$, $f(x) \geq f'(x)(x-a) + f(a)$.
   (a) Montrer alors que pour tout $x \in I$ et tout $y \in I$, $f'(x)(x-y) \leq f(y) - f(x) \leq f'(y)(y-x)$.
   (b) Montrer alors f' est croissante sur I.
3. Montrer que pour tout réel x et tout réel a, on a : $\mathrm{e}^x \geq e^a(x-a) + \mathrm{e}^a$.

Autour des Théorèmes des Valeurs Intermédiaires

I étant un intervalle, si f est une application continue de I, sur $\mathbb{R}$, alors l'image de I par f est un intervalle.

Autre formulation.

Si f est une application continue de I sur $\mathbb{R}$, alors pour tout réel $\alpha \in f(I)$ et pour tout $\beta \in f(I)$, on a $[\alpha\ ,\ \beta] \subset f(I)$.

Autre formulation. *L'image continue d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$ est un intervalle.*

La version utilisée en Terminale est la suivante :

Soit f une fonction numérique continue sur un intervalle I.
Pour tout $a \in I$ et tout $b \in I$, si k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$
alors il existe α compris entre a et b tel que $f(\alpha) = k$
et son corollaire :
***Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires ou Théorème de la Bijection* :**
Soit f une fonction numérique continue et strictement monotone sur I.
Pour tout $a \in I$ et tout $b \in I$, si k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$
alors il existe α unique compris entre a et b tel que $f(\alpha) = k$

On appelle point fixe d'une fonction f, tout élément α vérifiant $f(\alpha) = \alpha$

Exercice 40 :
On pose $I = [a\,;\,b]$ où a et b sont deux réels ($a < b$). Soit f une fonction continue de I vers I.

Montrer qu'il existe au moins un réel $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = \alpha$. Donner une interprétation graphique de ce résultat.
Autrement dit, montrer que f admet au moins un point fixe.

Exercice 41 :
Soit f une application continue d'un intervalle I sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in I$, $f^2(x) = 1$.
Montrer que f est constante sur I

Exercice 42 :
Soit f une application continue de $[0\,;\,1]$ sur $[0\,;\,1]$.
Montrer que'il existe $x \in [0\,;\,1]$ tel que $f\left(x + \dfrac{1}{2}\right) = f(x)$.

Exercice 43 :
Montrer que toute fonction f continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ a un unique point fixe.

Exercice 44 :
P est une fonction polynôme de degré n ($n \in \mathbb{N}^*$). On dit que α est une racine de P si et seulement si $P(\alpha) = 0$.

1. Montrer que si n est impair alors P a au moins une racine réelle.
2. Montrer que $P : x \to x^3 - 3x + 6$ a exactement une racine réelle.
3. a est un nombre reél. Etudier le nombre de racines réelles de $P : x \to x^3 - 3x + a$ en fonction de a.

Exercice 45 :
Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on pose : $P_n(x) = x^n - x - 1$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 2$, P_n a exactement une racine réelle strictement positive, racine que l'on note x_n.
2. Calculer x_2 et donner une valeur approchée de x_3 à 0,001 près par défaut.
3. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est strictement décroissante. En déduire la convergence de $(x_n)_{n\geq 2}$.
4. Montrer que $(x_n)_{n\geq 2}$ converge vers $\ell = 1$.
5. (a) Montrer que pour tout $n \geq 2$, $\dfrac{\ln(x_n)}{\ln(1 + x_n)} = \dfrac{1}{n}$.
   (b) Etudier alors la convergence de la suite $(n(x_n - 1))_{n\geq 2}$.

5 Primitives - Intégration

Exercice 46 :

Le but de cet exercice est de calculer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$.

On pose pour $x \in [0\,;\,1]$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$ et pour $x \in [0\,;\,\frac{\pi}{2}]$, $G(x) = F(\sin(x))$.

1. Justifier que F et G sont bien dérivables sur leur intervalle de définition.
2. Montrer que $\forall x \in [0\,;\,\frac{\pi}{2}]$, $G'(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$.
3. Calculer $G(0)$. En déduire l'expression de $G(x)$ en fonction de x sur $[0\,;\,\frac{\pi}{2}]$
4. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$.
5. Retrouver ce résultat en utilisant la formule donnant l'aire d'un disque.

Exercice 47 :

u et S sont les suites définies pat : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n^2}$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} \leq \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \leq u_n$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+1} - S_1 \leq \displaystyle\int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \leq S_n$
3. Montrer alors que $(S_n)_{n\geq 1}$ converge.

Exercice 48 :

f est une fonction continue sur l'intervalle $[a\;,\;b]$ $(a < b)$. m et M sont deux réels tel que :

$$\forall x \in [a\;,\;b],\;\; m \leq f(x) \leq M$$

1. Montrer que $m(b-a) \leq \displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a)$. *Cette inégalité est connue sous le nom d'Inégalité de la Moyenne*
2. En posant $g(x) = f(x)(b-a) - \displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, montrer qu'il existe $c \in [a\;,\;b]$ tel que $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Exercice 49 :

f est une fonction positive, continue et décroissante sur l'intervalle $[0\;,\;+\infty[$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(k)$, $U_n = S_n - \displaystyle\int_0^n f(x)\mathrm{d}x$ et $V_n = S_n - \displaystyle\int_0^{n+1} f(x)\mathrm{d}x$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n+1) \leq \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x \leq f(n)$
2. Etudier la limite de la suite $(f(n) - f(n+1))_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Etudier la monotonie des suites S, U et V.
4. Comparer les suites U et V.
5. Montrer alors que les suites U et V convergent vers un même réel.
6. *Application :*

   Montrer que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}) - \ln(n+1)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

6 Nombres Complexes

Dans tous ces exercices, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{u}, \vec{v})$.

Exercice 50 :
Après avoir mis $z = 1 + i\sqrt{3}$ sous forme exponentielle, déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que :

(a) z^n est un réel (b) z^n est un imaginiaire pur (c) $|z^n| < 100$ (d) $Re(z^n) = Im(z^n)$

Exercice 51 :
Soit z et z' deux nombres complexes.

1. Montrer que $|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$
2. Soit $ABCD$ un parallèlogramme. Montrer que $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$

Exercice 52 :
Soient A, B et C trois points distincts deux à deux d'affixe respectif a, b et c et k un réel.
Déterminer la nature géométrique des ensembles de points M d'affixes z vérifiant les relations suivantes.

1 : (a) : $|z-a| = k$ (b) : $|z-a| = |z-b|$ (c) : $\dfrac{z-b}{z-a} \in \mathbb{R}$ (d) : $\dfrac{z-b}{z-a} \in i\mathbb{R}$

2 : (a) $|z-a| = k|z-b|$ (b) : $|\bar{z}-a| = k$ (c) : $\text{Arg}(z^2) = \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$ (d) : $|z^2 - 1| = 1$

Exercice 53 :
On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ et $\sin(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ (... *Formules d'Euler*).
En utilisant les formules d'Euler, simplifier les expressions suivantes :
(a) $\cos^2(x)$ (b) $\sin^2(x)$ (c) $\cos(x)\sin(x)$ (d) $\cos(x)\sin^2(x)$ (e) $\cos^3(x)$ (f) $\sin^3(x)$ (g) $\cos^3(x)\sin(x)$.

Exercice 54 :
Soit $\theta \in [0\,;\,\pi[$.

1. Montrer que $1 + e^{i\theta} = 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$.
2. Déterminer alors le module et un argument de $1 + e^{i\theta}$

Exercice 55 :
Soient θ et $\theta' \in \mathbb{R}$ tels que $|\theta - \theta'| < \pi$.
Déterminer le module et un argument de $e^{i\theta} + e^{i\theta'}$.

Exercice 56 :
On considère les trois nombres complexes $a = 1$, $b = e^{\frac{i\pi}{3}}$ et $c = e^{\frac{2i\pi}{3}}$
et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $Z_n = a^n + b^n + c^n$ avec la convention $a^0 = b^0 = c^0 = 1$.

1. Calculer Z_0, Z_1, Z_2 , Z_3.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Z_{n+6} = Z_n$

Exercice 57 :
Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $p(z) = z^2 + (-3+2i)z + 5 - i$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 = -15 - 8i$
2. Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $p(z) = 0$.

Exercice 58 :
On considère trois nombres complexes a, b et c de module 1.

1. Montrer que si $a + b + c = 0$ alors $a^2 + b^2 + c^2 = 0$
2. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 59 :
Pour rappel :
$i\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres complexes de partie réelle nulle, ou encore, ensemble des imaginaires purs.

Soit z un nombre complexe distinct de 1. Démontrer que

$$|z| = 1 \Longleftrightarrow \frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R}$$

Pour cette question, on cherchera au moins deux solutions ! - Une par calcul - Une par interprétation géométrique.

Exercice 60 :
Soient z et z' deux nombres complexes de module 1 tels que $zz' \neq -1$.

Démontrer que $\dfrac{z+z'}{1+zz'} \in \mathbb{R}$ et déterminer son module

Exercice 61 :
Déterminer l'ensemble des nombres complexes non nuls z, tels que :

(a) $z + \dfrac{1}{z}$ soit réel. (b) $z + \dfrac{1}{z}$ soit imaginaire pur. (c) $z^2 + \dfrac{1}{z^2}$ soit réel. (e) $z^2 + \dfrac{1}{z^2}$ soit imaginaire pur.

Exercice 62 :
Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$, on pose $f(z) = \dfrac{1}{z-i}$.

1. Montrer : $z \in \mathbb{R} \Longrightarrow \left| f(z) - \dfrac{i}{2} \right| = \dfrac{1}{2}$.
2. Donner une interprétation géométrique de ce résultat.

Exercice 63 :
On pose pour $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = z^5 - 1$.

1. Déterminer la forme exponentielle des racines de P.
2. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $z \neq 1$, $P(z) = 0 \Longleftrightarrow 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$.
3. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = z^2 \left((z + \dfrac{1}{z})^2 + (z + \dfrac{1}{z}) - 1 \right)$
4. Déterminer les racines de $Z^2 + Z - 1 = 0$ dans $\mathbb{C}$.
5. En déduire la forme algébrique des racines de P. Quelle est la valeur exacte de $\cos(\dfrac{2\pi}{5})$?

7 Arithmétique

Exercice 64 :
a et b sont deux réels non nuls.

1. Montrer que si $a \in \mathbb{Q}$ et $b \notin \mathbb{Q}$ alors $(a+b) \notin \mathbb{Q}$ et $ab \notin \mathbb{Q}$.
2. Donner un exemple de a et $b \notin \mathbb{Q}$ tels que $(a+b)$ et $ab \in Q$.
3. Montrer que si $a > 0$ et $a \notin \mathbb{Q}$ alors $\sqrt{a} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 65 :

1. Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel. Donner au moins trois démonstrations différentes de ce résultat !.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\sqrt{n} \in \mathbb{Q} \Longleftrightarrow \sqrt{n} \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$ ou $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$.
4. Montrer que pour tout couple $(a\ ,\ b)$ de rationnels, on a : $a + b\sqrt{2} = 0 \Longleftrightarrow a = b = 0$.
5. Montrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.
6. Montrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$.
7. Montrer que si m et n sont deux entiers naturels qui ne sont pas des carrés dans $\mathbb{N}$, alors $\sqrt{m} + \sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$.
8. Montrer que pour tout $(a\ ,\ b\ ,\ c) \in \mathbb{Q}^3$, $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{6} = 0 \Longleftrightarrow a = b = c = 0$
9. Montrer que $\sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}} \in \mathbb{N}$

Exercice 66 :

1. Rappeler le **Théorème fondamental de l'arithmétique** *décomposition en facteurs premiers*
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner une condition suffisante et nécessaire pour que n soit un carré dans $\mathbb{N}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner une condition suffisante et nécessaire pour que n soit un cube dans $\mathbb{N}$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner une condition suffisante et nécessaire pour que n soit un puissance k-ème dans $\mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}^*$.
5. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :
   — $n! = 1$ si $n = 0$
   — $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$ si $n > 0$.
   On peut remarquer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $(n+1)! = (n+1) \times n!$.
   (a) Caculer $5!$, $6!$, $7!$ et $10!$
   (b) Déterminer la décomposition en facteurs premiers de $11!$.
   (c) Déterminer la décomposition en facteurs premiers de $10! + 11!$.
   (d) Montrer que $\sqrt{20!}$ n'est pas un carré dans $\mathbb{N}$.

Exercice 67 :
On admet que pour tout $(a\ ,\ b) \in \mathbb{R}^2$, $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Soient a et b deux réels > 0 tels que $a^3 + b^3 = 2ab(a+b)$.

Déterminer la valeur de $\dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{b^2}{a^2}$