

Pépinière à Initiative Locale

Élèves de quatrième



Livret du professeur



Un livret conçu par :

Nicolas Blanc, professeur au collège Alfred de Vigny, Courbevoie

Antoine Bera, professeur au collège Gérard Philipe, Massy

Sacha Dhénin, professeur au lycée franco-allemand, Buc

Kuider Ksori, professeur au collège Léopold Senghor, Corbeil-Essonnes

Nadia Mohamed Abdallah, professeure au collège la Fontaine du Roy, Ville d'Avray

Mireia Requena, professeure au collège Pierre Brossolette, Chatenay-Malabry et au collège Évariste Galois, Bourg-la-Reine

Les IA-IPR de mathématiques

Remarques générales concernant l'animation

Les interactions entre élèves, leur expression orale seront favorisées par l'utilisation de murs collaboratifs (tableaux blancs muraux), ou tout autre matériel favorisant un engagement et une posture de recherche active chez les élèves. Les professeurs animateurs prendront soin de laisser les élèves prendre des initiatives. La PIL ne revêt aucun caractère de compétition. Tout élève motivé de quatrième est bienvenu à cette PIL.

Les animatrices et animateurs choisissent les deux exercices de recherche et les deux jeux proposés aux élèves lors de la PIL.

Si les élèves n'ont pas fini de résoudre un exercice ou de répondre aux questions des jeux, la suite pourra être effectuée ensuite en classe par le professeur.

Les deux exercices de recherche et les deux jeux non traités durant la PIL pourront être proposés en classe, par exemple sous forme de travail en groupe en classe ou sous forme de travail hors classe en groupe avec restitution orale devant le groupe-classe.

Voici un lien vers des vidéos explicatives concernant les quatre jeux mathématiques :

<https://nuage05.apps.education.fr/index.php/s/6Cwcwr4Zq38cAK5>

Ces vidéos ont été réalisées par deux professeurs membre du groupe de travail académique. Nous les en remercions vivement.

Pour lire ces vidéos, nous vous conseillons de les télécharger et de les ouvrir avec VLC Media Player.

Vous pourrez projeter aux élèves les vidéos des jeux que vous avez choisis.

Quizz

Matériel

Document pdf comportant les 10 questions à vidéo-projeter.

But du quizz

Proposer des questions courtes sur des thèmes variés pour favoriser les automatismes.

Avant de démarrer

Chaque élève peut préparer une feuille sur laquelle il notera les résultats des questions qu'il verra apparaître.

Chaque résultat est un nombre entier ou un nombre décimal non entier.

Exemple de scénario pédagogique

L'enseignant animateur pourra par exemple :

- proposer aux élèves de former des binômes ;
- faire défiler les questions en laissant un temps court aux élèves (45 secondes ou 1 minute environ), les élèves pourront chuchoter avec leur binôme si nécessaire ;
- corriger les questions avec les élèves une fois que toutes les questions auront été abordées.

Réponses

1) 48 cm²

2) 9

3) 2

4) 14

5) 2

6) 40 000

7) 13

8) 12

9) 30

10) 0,4

Histoire de trajet : l'araignée et la mouche !

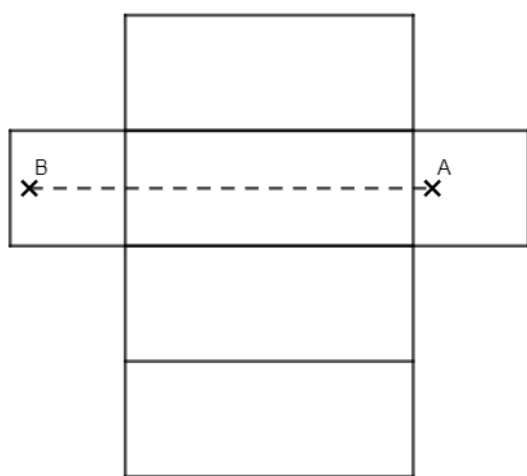
Coup de pouce

Inciter à la manipulation, notamment au travers d'un patron.

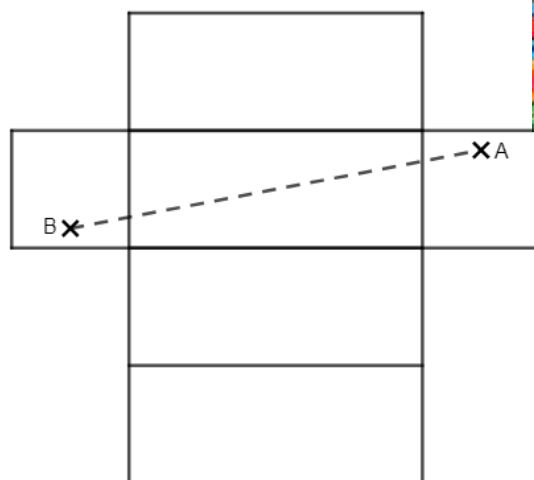
Éléments de solutions

Il suffit de donner un contre-exemple.

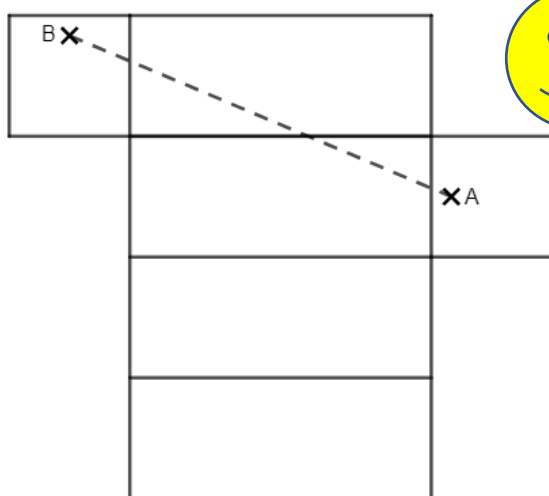
Voici quelques stratégies possibles que les élèves pourront entreprendre.



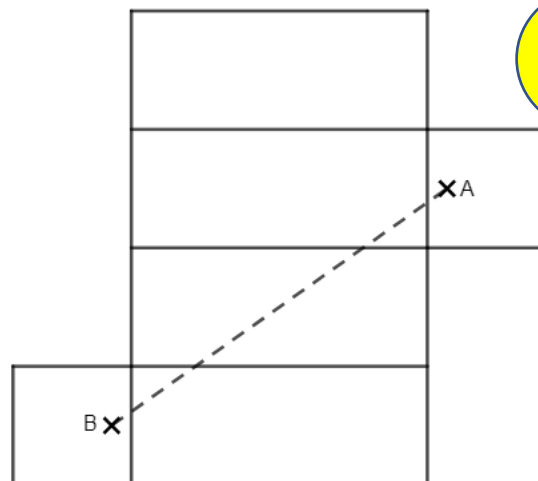
Calcul : $5 + 15 + 1 = 21$



En appliquant le théorème de Pythagore :
 $\sqrt{4^2 + 21^2} \approx 21,4$ (arrondi au dixième)



En appliquant le théorème de Pythagore :
 $\sqrt{19^2 + 8^2} \approx 20,6$ (arrondi au dixième)



En appliquant le théorème de Pythagore :
 $\sqrt{17^2 + 12^2} \approx 20,8$ (arrondi au dixième)

La boîte de riz

Eléments de solution

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 + 1\,024 + 2\,048 + 4\,096 + 8\,192 = 16\,383$$

Les 14 cases de l'échiquier contiennent donc 16 383 grains de riz.

Ces 16 383 grains de riz pèsent, d'après l'énoncé, 459 grammes.

La boîte de riz pèse 1 kilogramme, soit 1000 grammes.

Masse (en grammes)	459	1 000
Nombre de grains de riz	16 383	x

$$x = \frac{16\,383 \times 1\,000}{459} \approx 35\,693$$

En négligeant la masse de la boîte elle-même, on peut estimer qu'il y a 35 693 grains de riz dans la boîte.

Prolongement possible

Cette approche est basée sur les masses.

Un grain de riz étant trop léger, on pèse un échantillon de 25 grains de riz à l'aide d'une balance : 700 mg. On suppose que la masse du sachet de riz est proportionnelle au nombre de grains de riz qu'il contient. Cela permet de calculer N , le nombre de grains de riz

$$\text{contenus dans 1 kg : } N = \frac{25 \times 10^6}{700} \approx 35\,714.$$

Une vérification expérimentale peut être proposée, elle a été faite dans le cadre d'une émission diffusée sur France 5.

La vidéo est disponible sur YouTube, en voici le titre et le lien d'accès :

[Combien de grains dans un kilo de riz ? - On n'est pas que des cobayes #cobayesF5](#)

Voici 3 passages ciblés de cette vidéo.

- Approche mathématique : on détermine le nombre de grains de riz contenus dans 10 g. (à 2'04)
- Approche physicienne : on utilise une machine laser (à 4'12 puis 8'48)
- Approche exhaustive : on compte tous les grains de riz (à 9'10)

Notons que les trois approches sont empreintes d'erreurs (liées à la modélisation, à l'utilisation des machines ou simplement aux erreurs de comptage) : c'est un point important de l'activité (cf. phase 4 ci-dessous).

Proposition de mise en œuvre

Phase 1 : donner une estimation a priori du nombre de grains de riz (1 min) → Chaque élève du groupe propose une estimation.

Phase 2 : imaginer une stratégie (volume ou masse) puis la mettre en œuvre (40 min) → On peut mettre les élèves sur l'une des pistes proposées dans la correction.

Phase 3 : Comparaison avec l'estimation a priori (1 min)

Phase 4 : éléments de correction alimentés par des extraits de la vidéo (3 min) → Mettre l'accent sur le statut de l'erreur en mathématiques et de manière plus générale en sciences.

Cercle, rectangles et intersections

Éléments de solution

Les élèves partiront probablement sur une recherche purement graphique, en produisant des figures géométriques visant à maximiser le nombre de points d'intersection. S'il convient de les laisser faire dans un premier temps, pour qu'ils se familiarisent avec la question, le rôle de l'animateur sera ensuite de leur faire dépasser ce stade de tâtonnement et de les conduire à **raisonner** : il faut commencer par établir un maximum **théorique**, puis produire une configuration qui justifie qu'il est en effet possible d'atteindre ce maximum.

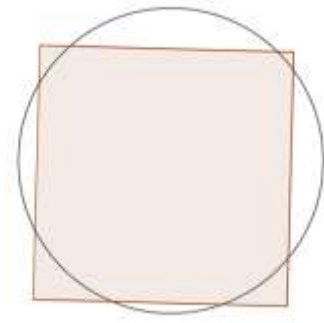
Pour déterminer ce maximum théorique, on peut d'abord examiner les incidences simples : nombre maximal de points d'intersection d'un cercle et d'un segment (deux), puis de deux cercles (deux également). Il est intéressant de voir si les élèves prennent cette initiative d'eux-mêmes.

Sachant qu'un rectangle est constitué de quatre segments, il est ensuite possible de résoudre les trois problèmes.

- 1) Un côté du rectangle a au plus 2 points d'intersection avec le cercle.

Or, un rectangle a 4 côtés. $4 \times 2 = 8$. Donc, le rectangle et le cercle ont au plus 8 points d'intersection.

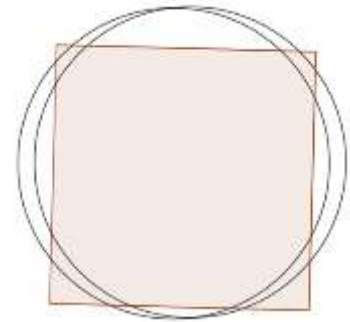
Voici un rectangle (en l'occurrence, un carré) et un cercle qui ont 8 points d'intersection.



- 2) D'après la question précédente, le rectangle a au plus 8 points d'intersection avec le premier cercle et il a au plus 8 points d'intersection avec le second cercle. Les deux cercles ont au plus 2 points d'intersection entre eux.

$8 + 8 + 2 = 18$. Donc, les deux cercles et le rectangle ont au plus 18 points d'intersection.

Voici un rectangle (en l'occurrence, un carré) et deux cercles qui ont 18 points d'intersection.

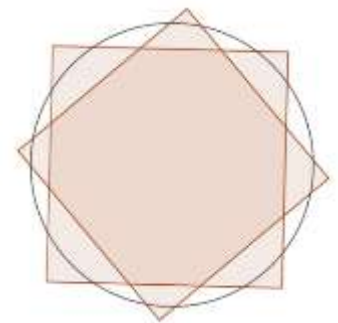


- 3) Chaque rectangle a au plus 8 points d'intersection avec le cercle.

Les deux rectangles ont au plus 8 points d'intersection entre eux. $8 + 8 + 8 = 24$.

Donc on a au maximum 24 points d'intersection.

Voici deux rectangles (en l'occurrence, des carrés) et un cercle qui ont 24 points d'intersection.



Remarque sur cette question : des élèves peuvent exhiber le cas particulier où un côté d'un rectangle est partiellement ou complètement confondu avec un côté de l'autre, ce qui conduit à une infinité de points d'intersection.

Et après en classe ?

On peut proposer aux élèves d'utiliser un logiciel de géométrie dynamique pour travailler les compétences *chercher* et *représenter* face à l'une des trois situations.

On peut ensuite étendre le problème en faisant varier le nombre de cercles ou de rectangles ; par exemple, généraliser à n cercles et un rectangle, ou bien à un cercle et n rectangles.

Histoire de trajet : maîtres-nageurs

Éléments de solution

- Trajet du premier maître-nageur

Le triangle ABC est rectangle en C .

D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$AB^2 = 400^2 + 300^2 = 2500$$

$$AB = \sqrt{2500} = 500$$

$$\text{Donc } AM = BM - BA = 1200 - 500 = 700 \text{ m}$$

Sur le trajet $[MA]$, le maître-nageur court sur le sable à la vitesse moyenne de 10 km/h, soit 10000 m/h soit environ 2,8 m/s (arrondi au dixième).

$\frac{700}{2,8} = 250$ donc le maître-nageur met environ 250 secondes pour effectuer le trajet $[MA]$ sur le sable.

Puis il nage à la vitesse moyenne de 4 km/h soit 4000 m/h soit environ 1,1 m/s sur le trajet $[AB]$ de 500 m sur un temps t_1 (en s.)

On a : $\frac{500}{1,1} \approx 454$ donc le maître-nageur met environ 454 secondes pour effectuer le trajet $[AB]$ dans l'eau.

La durée totale de son trajet est d'environ : $250 + 454 = 704$ secondes soit 11 minutes et 44 secondes.

- Trajet du second maître-nageur

Sur le trajet $[MC]$, le maître-nageur court sur le sable à la vitesse moyenne de 10 km/h, soit 10000 m/h soit environ 2,8 m/s (arrondi au dixième).

$\frac{850}{2,8} \approx 304$ donc le maître-nageur met environ 304 secondes pour effectuer le trajet $[MC]$ sur le sable.

Puis il nage à la vitesse V_2 en m/s sur le trajet $[CB]$ de 400 m sur un temps t_2 (en s.)

$$\text{On a : } V_2 = \frac{400}{t_2} \text{ soit } t_2 = \frac{400}{V_2}$$

$$\text{La durée totale de son trajet est : } 304 + \frac{400}{V_2}$$

On sait par ailleurs que les durées totales des deux trajets sont les mêmes, soit :

$$304 + \frac{400}{V_2} = 704$$

$$\frac{400}{V_2} = 704 - 304$$

$$\frac{400}{V_2} = 400$$

$$V_2 = 1 \text{ m/s soit } 3600 \text{ m/h soit } 3,6 \text{ km/h.}$$

C'est le maître-nageur 1 qui nage le plus vite.

Jeu des sandwichs

Matériel

Sept dossards par équipe, un pour chaque joueur.

Un dossard peut tout simplement être une feuille A4 dont le joueur présente le recto ou le verso.

Les dossards sont construits comme suit :

	Dossard n°1	Dossard n°2	Dossard n°3	Dossard n°4	Dossard n°5	Dossard n°6	Dossard n°7
recto	1	2	3	4	5	6	7
verso	8	9	+	-	÷	×	0

Éléments de raisonnement

L'enseignant animateur pourra proposer les résultats cibles suivants, donnés ici par ordre de difficulté.

- 59 : il y a de nombreuses solutions pour ce résultat. Le choix de ce nombre cible permet aux élèves de s'approprier les règles du jeu, en comprenant qu'on peut obtenir un même résultat de différentes manières.
- 29 : ce résultat est un tout petit peu plus difficile à obtenir, car on ne peut pas juxtaposer les chiffres 2 et 9. On peut l'obtenir par addition ou soustraction.
- 1300 : il n'y a qu'une solution. Ce résultat s'obtient par une multiplication.
- 1122 : il n'y a qu'une solution. Ce résultat s'obtient par une division.
- 1921 : ce résultat nécessite la présence des sept joueurs.

Enjeux pédagogiques et animation

La coopération des joueurs, la discussion et l'écoute sont nécessaires pour atteindre un résultat cible.

Ce jeu développe les compétences *chercher*, *raisonner* et *calculer*.

Lorsqu'une équipe produit un résultat, l'enseignant peut écrire l'opération au tableau afin de faire vérifier ce résultat par les autres équipes.

Ce jeu peut tout à fait avoir lieu en extérieur, c'est-à-dire *hors les murs*, ce qui s'inscrit parfaitement dans la Semaine des Mathématiques 2025 :

<https://eduscol.education.fr/3493/semaine-des-mathematiques>

Pour aller plus loin

http://sciences41.tice.ac-orleans-tours.fr/php5/IMG/pdf/Jeu_des_sandwichs.pdf

https://www.apmep.fr/IMG/pdf/Sandwiches_Deledicq.pdf

Tour de magie : les cartes binaires

Matériel

Cf. document « cartes à imprimer ». Il y a cinq cartes à découper.

La première carte contient les 15 objets. Elle sert exclusivement à choisir l'objet à deviner.

Les quatre autres cartes sont montrées les unes après les autres.

Enjeux pédagogiques et animation

L'objet est que les élèves comprennent comment fonctionne ce tour de magie qui est basé sur l'existence et l'unicité de l'écriture des nombres entiers naturels en sommes de puissances de 2.

Une fois que les élèves se sont approprié le tour, il peut être intéressant de les amener à :

- comprendre la construction du jeu de cartes ;
- écrire tous les nombres de 1 à 15 comme somme des entiers 1, 2, 4 et 8 (donc d'écrire les nombres de 1 à 15 en binaire) ;
- créer leur propre jeu de cartes.

L'enseignant peut poser les questions suivantes aux élèves pour les aider dans leur raisonnement :

- Existe-t-il un objet qui ne figure sur aucune des quatre cartes ? Pourquoi ?
- Combien d'objets sont sur une seule des quatre cartes ? Pourquoi ?
- Combien d'objets sont sur les quatre cartes ? Pourquoi ?

Pour aller plus loin

Si l'on avait cinq cartes au lieu de quatre cartes, combien d'objets aurait-on eu à disposition ?

Numération binaire et systèmes de numération (Eduscol) :

<https://eduscol.education.fr/sti/sites/eduscol.education.fr/sti/files/ressources/pedagogiques/8120/8120-cours-corrige.docx>

Activité proposée par l'académie de Créteil :

http://maths.ac-creteil.fr/IMG/pdf/deviner_un_nombre.pdf

Le jeu des deux « PILs »

Éléments de raisonnement

La carte de valeur maximale que l'on peut poser est la carte 8. Cela peut se démontrer à l'aide d'un raisonnement par disjonction de cas : chaque cas de figure peut être modélisé par un arbre.

Prolongement

On peut jouer avec trois tas (puis quatre, cinq, etc., mais cela devient vite compliqué). Si les 27 cartes ne suffisent pas, on prolongera la partie avec des petits papiers numérotés avec les nombres entiers plus grands.

Enjeux pédagogiques et animation

L'enjeu pédagogique de ce jeu est d'amener les élèves à conjecturer que 8 est la bonne réponse, puis à le démontrer. La compétence *raisonner* est pleinement mobilisée dans ce jeu. Les calculs en jeu sont, pour cette raison, volontairement simples.

Pour aller plus loin

En 1916, le mathématicien Issai Schur se penche sur la question que soulève ce jeu.

Il cherche le plus grand nombre entier pour lequel on peut poser toutes les cartes sans avoir les nombres a , b et $a + b$ dans le même tas.

Issai Schur joue avec des règles un peu différentes, car il intègre le cas $a = b$. Par exemple, on ne peut pas mettre le 2 dans la boîte qui contient le 1 car $1 + 1 = 2$.

Pour deux boîtes, puis trois, on peut démontrer que Issai Schur a trouvé le maximum, en raisonnant sur papier, avec de la patience.

Pour quatre boîtes, la démonstration nécessiterait trop de papier et trop de patience, mais un mathématicien l'a démontré en programmant toutes les répartitions possibles sur ordinateur.

Pour cinq boîtes, une conjecture a été proposée en l'an 2000 : le maximum est peut-être 160. À ce jour, personne n'a réussi à démontrer cette conjecture.

Pour aller encore plus loin

<https://images-archive.math.cnrs.fr/Les-nombres-de-Schur-des-centenaires-pleins-d-avenir.html>

Le Jeu de Nim

Éléments de raisonnement

- Pour gagner, il faut laisser à l'adversaire la dernière bande. Il faut donc pouvoir retirer l'avant-dernière bande, c'est-à-dire la 20^e.
- Pour garantir de retirer la 20^e bande, il faut retirer la 16^e bande. En effet, si vous prenez la 16^e bande, peu importe le nombre de bandes (1,2 ou 3) que prendra votre adversaire, vous pourrez toujours compléter pour retirer la 20^e bande.
- En poursuivant ce raisonnement, les bandes-clés à retirer pour gagner sont :
 - la 12^e bande pour garantir de prendre la 16^e ;
 - la 8^e bande pour garantir de prendre la 12^e ;
 - la 4^e bande pour garantir de prendre la 8^e.
- Lorsque l'adversaire commence, il se trouve dans une position perdante car on est certain de pouvoir prendre la 4^e bande.
- Ainsi, de façon générale, lorsqu'un joueur se retrouve dans une position gagnante, il peut y rester jusqu'à la fin et gagner.

Prolongement

Pour aller plus loin, il est possible de faire varier le nombre de bandes initiales ainsi que le nombre de bandes pouvant être retirées à chaque tour.

Enjeux pédagogiques et animation

Le professeur peut amener les élèves à se poser la question suivante.

Quelles sont les combinaisons possibles pour obtenir 4 sur deux tours consécutifs ?

Le professeur amène les élèves à raisonner par disjonction de cas ou par déduction, en explorant les conséquences des différents choix.

Il pourra faciliter le raisonnement des élèves en posant des questions telles que :

Pour s'assurer de gagner, le nombre de bandes à prendre est-il le même à chaque tour ?

Si je ne commence pas une partie, puis-je quand même gagner ?

Faut-il commencer une partie pour être certain de gagner ?

Pour aller plus loin :

Programmer le jeu de Nim sur Scratch :

https://www.pedagogie.ac-nice.fr/mathematiques/wp-content/uploads/sites/30/2020/04/Jeu_de_Nim_Scratch_SE_final.pdf

Une autre version du jeu de Nim, avec des étages, le jeu de Marienbad :

- Découverte du jeu : <https://interstices.info/strategies-magiques-au-pays-de-nim/>
- Analyse du jeu : <https://scratch.mit.edu/projects/384178890>