# Calculs et ordre dans R

**C1** Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'origine O. Un point P est dit rationnel si chacune de ses deux coordonnées est un nombre rationnel. Ainsi, les points de coordonnées (2, 1) et $\left(\frac{3}{7},-1\right)$ sont rationnels mais le point de coordonnées $\left(-\sqrt{3},5\right)$ ne l'est pas.

On considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon $\sqrt{5}$

Soit P le point de coordonnées (2, 1) et Q un point rationnel du disque de centre O et de rayon $\sqrt{5}$ appartenant à l'axe des ordonnées. Vérifier que $\mathcal{C}$ contient P et démontrer que le point R, deuxième point d'intersection de la droite (PQ) avec $\mathcal{C}$, est rationnel. Que peut-on dire du nombre de points rationnels appartenant à $\mathcal{C}$ ?

**C2** Mon boucher ne connaît pas les centimes.
Par exemple, j'ai pris 300g de filet à 34,3 euros le kilo, 240g de viande hachée à 8,6 euros le kilo, et 640g de blanc de poulet à 12,99 le kilo : j'ai payé 10 euros pour le filet, 2 euros pour la viande hachée et 8 euros pour le poulet, soit 20 euros en tout.
En ramassant deux tickets par terre, le boucher lit :

- 750g de côtelettes, 250g de rôti. Total : 18 euros.
- 250g de côtelettes, 500g de rôti. Total : 17 euros.

Quels peuvent être les prix possibles pour le kilo de côtelettes et le kilo de rôti (on donnera toutes les solutions).

*Concours général 2008*

**C3** Démontrer que $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ est un entier.

**C4** Déterminer explicitement les sous-ensembles suivants de **R** :

1. $A=\left\{x\in[0,1] \mid \exists n\in \mathbf{N}^*, \frac{1}{n}\le x\le 1\right\}$.
2. $B=\left\{x\in[0,1] \mid \forall n\in \mathbf{N}^*, \frac{1}{n}\le x\le 1\right\}$.

**C5** Calculer $\cos^2 1°+\cos^2 2°+\cos^2 3°+...+\cos^2 90°$.

**C6** A partir de deux inégalités « classiques »

1. a) Prouver que pour tous réels $x$ et $y$ positifs, $x+y\ge 2\sqrt{xy}$.

   b) Prouver que, pour tout réel $x$ positif, et pour tout entier naturel $n$, $1+x^{2n}\ge \frac{(2x)^{2n-1}}{(1+x)^{2n-2}}$

2. a) Démontrer que, pour tout réel $x$ strictement positif : $x+\frac{1}{x}\ge 2$

   b) Soit $n$ un entier naturel et $a_0, a_1,\ldots a_n$ ($n$ + 1) réels positifs ou nuls.

   On pose $P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ $(x\in\mathbf{R})$. Démontrer que, pour tout réel $x$ strictement positif, $P(x)P\left(\frac{1}{x}\right)\ge [P(1)]^2$.

**C7** 1. Démontrer que pour tous entiers $a$ et $b$ tels que $|a| < 10^6$ et $|b| < 10^6$ on a : $\left|a+b\sqrt{2}\right| > 10^{-7}$.

2. Trouver deux entiers $a$ et $b$ non nuls tels que $|a| < 10^6$, $|b| < 10^6$ et $\left|a+b\sqrt{2}\right| < 10^{-5}$.

**C8** Soit $a$ un nombre réel tel que $0 < a < 1$.
Dans le plan rapporte à un repère orthonormal, soit $\mathcal{H}$ l'ensemble d'équation $(1 - x)(1 - y) = a$ et soit $\mathcal{H}_1$ l'ensemble des points de coordonnées $(x, y)$ de $\mathcal{H}$ tels que $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq 1$.

**1.** Préciser la nature de $\mathcal{H}$. Représenter $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}_1$.

**2.** Montrer que, quand le point de coordonnées $(x, y)$ décrit $\mathcal{H}_1$, la somme $x + y$ décrit un intervalle que l'on précisera.

**3.** Déterminer l'ensemble des valeurs de $x^2 + y^2$ quand le point de coordonnées $(x, y)$ décrit $\mathcal{H}_1$.
*Indication* : On pourra montrer que si $(x, y)$ sont les coordonnées d'un point de $\mathcal{H}$ et si $s = x + y$, alors $x^2 + y^2 = s^2 - 2s + 2 - 2a$.

**4.** Déterminer, en discutant selon la valeur de $a$, le nombre de points d'intersection de $\mathcal{H}_1$ et du cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}\left(1-\sqrt{a}\right)$.

**5.** Déterminer l'aire du domaine limité par $\mathcal{H}_1$ et les axes de coordonnées.
En déduire, pour $a \in \left[\frac{1}{4}, 1\right][$, l'inégalité : $.\frac{\pi}{2}\left(1-\sqrt{a}\right)^2 \leq 1-a+a\ln a$

L'équation $\frac{\pi}{2}\left(1-\sqrt{a}\right)^2 = 1-a+a\ln a$ admet-elle une solution appartenant à ]0, 1[ ?

*Concours général 2006*

# Fonctions

**SF1** Étudier et tracer la courbe d'équation $y^2 = x^2 \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

**SF2** Soit $f$ la fonction définie sur **R** par : $f(x) = e^{-x}(x^2 - x - 10) - x$.
**1.** Calculer les limites de $f(x)$ quand $x$ tend vers $+\infty$ et $-\infty$. Que pouvez vous dire sur le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ ?
**2.** Après avoir étudié le signe du trinôme $x^2 - x - 10$, étudier le signe de $f$ sur [0, 3].
**3.** Étudier les variations de $f'$.
**4.** Déterminer le nombre de solutions réelles de l'équation (E) : $f(x) = 0$.

**SF3** Soit $f$ une fonction définie sur $[0, +\infty[$, deux fois dérivable sur cet intervalle et telle que, pour tout $x \geq 0$, $f(x)\, f'(x)\, f''(x) = 1$.

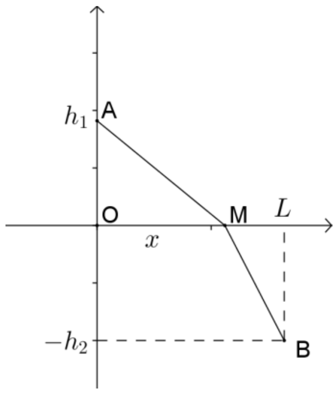
Sachant que $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$ et $f(1) = 2$, démontrer que $f'(1) = (1+3\ln 2)^{\frac{1}{3}}$.

**SF4** Soit $f$ une fonction définie, dérivable sur R telle que, $f(1) = -1$ et, pour tous nombres réels $x$ et $y$, $f(x+y) = f(x) + f(y) - 2$.
1. Déterminer la fonction $f$.
2. Soit $n$ un entier naturel non nul et $g$ la fonction définie sur **R** par : $g(x) = f\left(f\left(f(....f(x)...)\right)\right)$ où $f$ apparaît $n$ fois. Calculer $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$.

**SF5** Déterminer la valeur de $x > 1$ qui minimise l'expression $4\sqrt{x} - \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$

**SF6** La loi de Descartes de la réfraction exprime le changement de direction d'un faisceau lumineux lors de la traversée d'une paroi, séparant deux milieux différents. L'objet de cet exercice est de démontrer cette loi à partir du principe de Fermat, énonçant que la lumière se propage d'un point à un autre sur une trajectoire telle que la durée du parcours soit minimale.
*Cette démonstration a été faite par Maupertuis en 1744.*

1. Le plan, est rapporté à un repère orthonormal d'origine O. On suppose que la vitesse de la lumière est égale à $v_1$ dans le demi-plan $P_1 = \{M(x, y) / y > 0\}$, et à $v_2$ dans le demi-plan $P_2 = \{M(x, y) / y < 0\}$.
On considère les points $A(0, h_1)$, $B(L, -h_2)$ et $M(x, 0)$ ($h_1 > 0$, $h_2 > 0$) ; un rayon lumineux met un temps $T$ pour suivre le trajet AMB. On appelle $f$ la fonction qui à $x$ fait correspondre $T$.
Calculer $T = f(x)$ en fonction de $x$, $L$, $h_1$, $h_2$, $v_1$, $v_2$.




2. Étudier $f$ et montrer que $f$ est minimale en un réel $x_0$ tel $\dfrac{x_0}{\mathrm{AM} \times v_1} = \dfrac{L - x_0}{\mathrm{BM} \times v_2}$.
3. En déduire la loi de Descartes.

**SF7** Soit $f$ une fonction numérique définie sur R, telle que pour tout $x$ réel,
$f(x) \leq 1$ et $f\left(x + \frac{5}{6}\right) + f(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right) + f\left(x + \frac{1}{3}\right)$. Démontrer que la fonction $f$ est périodique.

# Équations - Suites

**E1** Pour quelles valeurs de $m$, l'équation $3x^2 + mx - 2 = 0$ a-t-elle une solution supérieure à 1 ?

**E2** 1. On note $[a]$ la partie entière du nombre réel $a$. Quelle est la limite de la suite $\left(\frac{[na]}{n}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ ?

2. Trouver un nombre réel $a$ tel que, pour tout $n$ entier positif, on ait $[a[na]]-[na]=n-1$.

**E3** Soit $a$ et $b$ deux réels. On considère l'équation $(E_1)$ $x^2 + ax + b = 0$. Si son discriminant est négatif ou nul, on s'arrête. Si son discriminant est strictement positif (elle a donc deux solutions réelles distinctes), on forme alors une deuxième équation $(E_2)$ en remplaçant (dans $(E_1)$) $a$ par plus petite des deux solutions et $b$ par la plus grande des deux solutions. Si la deuxième équation a son discriminant négatif ou nul, on s'arrête, et s'il est strictement positif, on poursuit comme précédemment.
Prouver que le processus a nécessairement une fin. Quel est le nombre maximum d'équations du deuxième degré que l'on peut être ainsi amené à résoudre ?
Donner un exemple avec des coefficients rationnels.

**E4** Soit $n$ un entier naturel non nul. On considère les $n$ produits $k(2n-k+1)$ pour $k$ entier compris entre 1 et $n$. Démontrer qu'il n'existe aucune valeur de $n$ pour laquelle deux des $n$ produits sont égaux.

**E5** Soit $x$ un réel. On note $[x]$ sa partie entière.

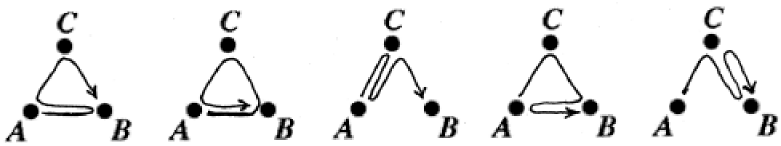
Soit $\alpha$ et $\beta$ deux irrationnels strictement positifs tels que $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$.

Pour tout entier naturel $n$ non nul, on pose : $u_n=[n\alpha]$ et $v_n=[n\beta]$.
Démontrer que les deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont disjointes et que leur union est **N*.**

**E6** Soit $(u_n)$ la suite définie pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 2 par $u_n=\frac{2n^2+n-1}{2n^2-n-1}$.

Simplifier le produit $u_2u_3u_4...u_{99}u_{100}$.

**E7** Soit ABC un triangle équilatéral de côté 1. Soit $n$ un entier naturel et $x_n$ le nombre de chemins de longueur $n$ allant de A à B.
Ainsi, pour $n = 4$, il y a 5 chemins de longueur 4 allant de A à B donc $x_4 = 5$.




Établir une relation entre $x_{n+2}$, $x_{n+1}$ et $x_n$ puis démontrer que pour tout entier naturel $n$,

$$x_n=\frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3}.$$

**E8** ***Une suite majoritairement décroissante***
Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels positifs tels que $u_0=1$ et telle que, pour tout entier $n \geq 1$, au moins la moitié des termes $u_0, u_1, ..., u_{n-1}$ soit supérieurs ou égaux à $2u_n$.
Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ tend vers 0.

*Concours général 2012*

# Arithmétique et raisonnement

**A1** Dans cette maison, il y a 18 ouvertures (portes et fenêtres). Chaque pièce a quatre ouvertures, dont deux sur l'extérieur. Combien la maison a-t-elle de pièces ?

**A2** On considère la fonction $f$ définie sur **N** et à valeurs dans **N** et telle que :

- $f(2) = 2$
- $(\forall n \in \mathbf{N}, \forall m \in \mathbf{N})\ n > m \Rightarrow f(n) > f(m)$
- Si $m$ et $n$ sont premiers entre eux alors $f(mn) = f(m)f(n)$

Démontrer que $f(3)=3$.

**A3** Étant donné deux entiers $a$ et $b$, on désigne par $[\![a, b]\!]$ l'ensemble des nombres entiers compris au sens large entre $a$ et $b$.
On considère une suite finie à $n$ termes $U = (u_1, u_2, ..., u_n)$.
On dit qu'un entier strictement positif $p$ est une période de $U$ si l'on a $u_i = u_{i+p}$ pour tout entier $i$ tel que $1 \leq i \leq n - p$. Une suite peut avoir plusieurs périodes.

1. On considère deux entiers strictement positifs $a$ et $b$ premiers entre eux.
   a) Soit $k$ un entier naturel. On définit $r_k$ comme le reste de la division euclidienne de $ka$ par $a + b$. Montrer que lorsque $k$ varie dans $1, a+b-1$ , $r_k$ prend toutes les valeurs de $1, a+b-1$
   b) En déduire que si $a$ et $b$ sont périodes de $U$ et si $n \geq a+b-1$ alors U est constante.
2. On suppose à présent que $a$ et $b$ sont des entiers strictement positifs et l'on désigne par $d$ leur PGCD. Montrer que si $U$ est périodique de périodes $a$ et $b$ et si $n \geq a + b - d$, alors $U$ est de période $d$.
3. On considère deux entiers $a$ et $b$ strictement supérieurs à 1 et premiers entre eux.
   a) Montrer que l'on peut partager l'ensemble $1, a+b-2$ en deux sous-ensembles non vides $A$ et $B$ de manière que la suite $V$ égale à 1 sur $A$ et à 0 sur $B$ soit de périodes $a$ et $b$.
   b) Le partage obtenu à la question précédente est-il unique ? Montrer que, pour tout $x$ de A, $a + b - 1 - x$ est dans $A$. Quelle propriété de la suite $V$ traduit-on ainsi ?

*Concours général 2009*

**A4** Alex a choisi quatre chiffres distincts $a$, $b$, $c$, $d$ parmi l'ensemble des chiffres de 1 à 9 et écrit les six entiers de deux chiffres $\overline{ac}, \overline{ba}, \overline{cd}, \overline{da}, \overline{db}$ et $\overline{dc}$. Leur somme est égale à l'entier $\overline{cab}$ et le produit de deux d'entre eux est égal à l'entier $\overline{abcd}$. Quels sont les quatre chiffres choisis par Alex ?

**A5** Le nombre de 6 chiffres $\overline{abcdef}$ est le carré de la somme $\overline{abc} + \overline{def}$. Quel est-il ?

**A6** Pour tout entier naturel $n$, on note $I_n$ le nombre d'entiers $p$ tels que $50^n < 7^p < 50^{n+1}$.

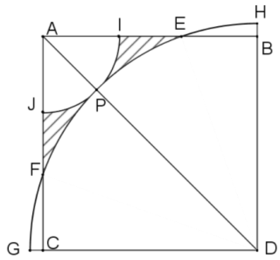
**a.** Démontrer que pour tout $n$, $I_n$ vaut 2 ou 3.

**b.** Démontrer qu'il existe une infinité d'entiers $n$ pour lesquels $I_n$ vaut 3 et donner le plus petit d'entre eux.

*Concours général 1994*

## Géométrie

**G1** Soit ABCD un carré de côté $2\sqrt{2}$.
Le cercle de centre A et de rayon 1 coupe les segments [AB], [AD] et [AC] respectivement en I, P et J. Le cercle de centre D et de rayon DP coupe les demi-droites [DB) et [DC) en H et G et les côtés [AB] et [CD] en E et F.
Calculer l'aire hachurée.




**G2** Dans un quadrilatère convexe d'aire 32 cm$^2$, la somme des longueurs d'une diagonale et de deux côtés opposés est de 16 cm.
Déterminer toutes les valeurs possibles de la longueur de l'autre diagonale.

*Olympiades internationales 1976*

**G3** Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus. La bissectrice intérieure de l'angle de sommet A coupe le côté [BC] en L et recoupe le cercle circonscrit au triangle ABC en N. On désigne respectivement par K et M les projections orthogonales de L sur les côtés [AB] et [AC].
Prouver que l'aire du quadrilatère AKNM et l'aire du triangle ABC sont égales.

*Olympiades internationales 1987*

**G4** Soit ABC un triangle équilatéral. On se donne six points $A', A'', B', B'', C', C''$ vérifiant les conditions suivantes :
- les points $A'$ et $A''$ appartiennent au segment [BC] ;
- les points $B'$ et $B''$ appartiennent au segment [AC] ;
- les points $C'$ et $C''$ appartiennent au segment [AB] ;
- l'hexagone $A'A''B'B''C'C''$ est convexe ;
- $A'A'' = A''B' = B'B'' = B''C' = C'C'' = C''A'$.

Montrer que les droites $(A'B'')$, $(B'C'')$ et $(C'A'')$ sont concourantes.

*Olympiades internationales 2005*

**G5** Dans le plan, on considère un triangle ABC et les six points D,E, F, G,H, I tels que ABED, BCGF et ACHI soient des carrés extérieurs à ABC.
Montrer que les points D, E, F, G, H, I sont cocycliques si et seulement si on est dans l'un des deux cas suivants :
• le triangle ABC est équilatéral ;
• le triangle ABC est rectangle et isocèle.

*Concours général 1996*

**G6** Soit ABCD un quadrilatère convexe tel que la droite (CD) soit tangente au cercle de diamètre [AB].
Démontrer que la droite (AB) est tangente au cercle de diamètre [CD] si et seulement si les droites (BC) et (AD) sont parallèles.

*Olympiades internationales 1984*

# Probabilités

**P1** Tic et Tac jouent à pile ou face. Si la pièce tombe sur pile, Tic marque un point et si elle tombe sur face, c'est Tac qui marque le point. Au début de la partie, chacun mise la même somme et ils conviennent que le premier des deux qui atteint le score S gagne la partie et récupère la totalité de la mise soit 102,40 €. Après 16 lancers de la pièce, le jeu est interrompu et ils décident de partager la somme mise en jeu. Comme ils ont quelques notions de probabilités, ils se mettent d'accord pour que Tic qui a deux points de plus que Tac empoche 72,65 € tandis que Tac récupère le reste.
Retrouver leur mode de raisonnement avant de déterminer S.

**P2** Un programme génère des nombres aléatoires entre 0 et 1. Le programme est conçu de telle sorte que pour tout $x$ de 0 à 1, la probabilité qu'il génère un nombre plus petit que $x$ est trois fois plus grande que celle qu'il génère un nombre plus petit que $\frac{x}{4}$ . De plus, la probabilité qu'il génère un nombre supérieur ou égal à $x$ est identique à la probabilité qu'il génère un nombre plus petit que $(1-x)$ .
Calculer la probabilité que ce programme nous donne un nombre plus petit que $\frac{1}{21}$

**P3** Je joue avec 4 dés à 20 faces. Chacun de ces dés, dont la forme est un icosaèdre, a ses faces numérotées de 1 à 20. Lorsqu'on le lance, chaque face apparaît sur le dessus avec la même probabilité de $\frac{1}{20}$.
Lorsque, parmi les 4 dés, une face apparaît au moins deux fois, je marque le nombre de points correspondant à cette face. Ainsi :
• avec la combinaison 3 - 4 - 12 - 16, je ne marque rien ;
• avec la combinaison 2 - 8 - 11 - 11, je marque 11 points ;
• avec la combinaison 4 - 9 - 9 - 9, je marque 9 points ;
• avec la combinaison 7 - 7 - 14 - 14, je marque 21 points ;
• avec la combinaison 2 - 2 - 2 - 2, je marque 2 points.
1. Quelle est la probabilité que je ne marque rien ?
2. Soit $a$ compris entre 1 et 20. Déterminer pour tout k ≤ 4 la probabilité d'avoir exactement k nombres $a$ parmi les dés lancés.
3. Pour tout $a$ on note $X_a$ la variable aléatoire qui vaut 1 s'il y a au moins deux dés égaux à $a$ parmi les quatre du lancer, et à 0 sinon.
Préciser la loi de $X_a$ et exprimer le gain G à l'aide de ces variables.
Combien de points puis-je espérer en moyenne ?
4. Quelle est la probabilité que je marque exactement 8 points ?
On suppose à partir de maintenant qu'après avoir lancé les 4 dés, je sois autorisé à relancer entre 0 et 4 dés pour améliorer mon score.
5. J'ai obtenu 11 - 7 - 2 - 2. J'hésite entre tout relancer, garder le 11, et garder les deux 2.Que dois-je faire ?
6. On suppose que j'ai obtenu 4 dés différents $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$. Quels dés dois-je relancer ?

*Concours général 2009*

**P4** $h$ est la fonction définie sur [0, 1] par : $h(0) = 0$ et, pour tout $x$ de ]0, 1], $h(x) = -\frac{x\ln(x)}{\ln(2)}$.
On admet que $h$ est continue sur [0, 1].
On définit également la fonction $h_1$ sur [0, 1] par $h_1(x) = h(x) + h(1-x)$.
Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in ]0,1[$. On appelle incertitude moyenne de $X$ la quantité $h_1(p)$ .
Donner la valeur de $p$ pour laquelle $h_1(p)$ est maximum. Commenter ce résultat.

# Nombres complexes

Exercice 1 : Soient $a, b$ et $c$ des nombres complexes. On considère l'équation

$$(E) : z^3 + az^2 + bz + c = 0$$

Soit $Z$ une racine complexe de $(E)$.

1) Montrer que : $|Z| \leq max(1, |a| + |b| + |c|)$.

2) Plus généralement, soit $r > 0$, montrer que : $|Z| \leq max\left(r, |a| + \frac{|b|}{r} + \frac{|c|}{r^2}\right)$.

3) Montrer que $(E)$ admet une unique solution, notée $\rho$, dans $\mathbb{R}_+^*$.

4) Montrer que $|Z| \leq \rho$.

Exercice 2 : Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2.
On considère un polygone $A_1A_2...A_n$ inscriptible dans un cercle, on note $G$ son centre de gravité et on désigne par $B_1, B_2, ..., B_n$ respectivement les points d'intersection des droites $(A_1G)$, $(A_2G)$,...,$(A_nG)$ avec le cercle circonscrit au polygone. Prouver que :

$$\frac{A_1G}{BG_1} + \frac{A_2G}{GB_2} + ... + \frac{A_nG}{GB_n} = n$$

Exercice 3 : On considère l'ensemble $U_m = \{e^{\frac{2ik\pi}{m}} / 0 \leq k \leq m-1\}$. On rappelle que c'est aussi l'ensemble des racines $m$-ièmes complexes de l'unité, c'est-à-dire l'ensemble des nombres complexes $z$ vérifiant $z^m = 1$.
On se donne une netier strictement positif $n$ et on cherche s'il existe une fonction $f : U_{2n} \to U_{2n}$ vérifiant $f(f(z)) = z^2$ pour tout $z$ dans $U_{2n}$.

1) Montrer que l'ensemble $\{z^2 / z \in U_{2n}\}$ est égal à $U_n$ et qu'il est inclu dans $u_{2n}$.

2) On suppose qu'il existe une solution $f$ au problème considéré.

   a) Vérifier que $f(z^2) = (f(z))^2$ pour tout $z$ dans $U_{2n}$.

   b) Montrer que $f(z) = f(z') \Rightarrow z = z'$ ou $z = -z'$ et que $f(1) = f(-1) = 1$.

3) Selon la valeur de $n$, existe-t-il un élement $z$ de $U_{2n}$ qui vérifie $z^2 = -1$ ? Si oui, vérifier qu'alors, il n'y a pas de fonction $f$ solution.

4) Selon la valeur de $n$, existe-t-il un élément $z$ de $U_{2n}$ qui vérifie $z^3 = 1$ avec $z \neq 1$ ? Si oui,, vérifier qu'alors il n'y a pas de fonction $f$ solution.

5) On suppose dans toute la suite de l'énoncé que l'entier $n$ esr impair.

   a) Vérifier que la fonction $g$ de $U_n$ dans lui-même qui à $z$ appartenant à $U_n$ associe $z^2$ est bijective.

   b) On suppose qu'il existe une solution $f$ au problème. Vérifier qu'il existe une application $\phi : U_n \to U_n$ telle que $\phi \circ \phi = g$. Construire alors une solution $f$ au problème.

   c) Exemple : on prend $n = 5$, dire s'il existe une solution au problème, si oui en construire une.

   d) Même question avec $n = 7$ puis $n = 9$.