Exercice 1 :

1) • 1er cas : $|Z| \leq 1$
On a clairement $|Z| \leq max\{1, |a|+|b|+|c|\}$.
• 2ème cas : $|Z| > 1$
Montrons alors que $|Z| \leq |a|+|b|+|c|$ :
$$\begin{array}{rcll} Z^3 & = & -aZ^2 - bZ - c & \\ Z & = & -a - \frac{b}{Z} - \frac{c}{Z^2} & \text{car } Z \neq 0 \\ |Z| & \leq & |a| + \frac{|b|}{|Z|} + \frac{|c|}{|Z|^2} & \\ |Z| & \leq & |a|+|b|+|c| & \text{car } |Z|>1 \end{array}$$
On en déduit que $max\{1, |a|+|b|+|c|\} = |a|+|b|+|c|$ et que $|Z| \leq max\{1, |a|+|b|+|c|\}$.

2) En procédant comme précédemment on obtient facilement $|Z| \leq max\left(r, |a| + \dfrac{|b|}{r} + \dfrac{|c|}{r^2}\right)$.

3) Sur $\mathbb{R}_+^*$, $(E') \Leftrightarrow 1 - \dfrac{|a|}{x} - \dfrac{|b|}{x^2} - \dfrac{|c|}{x^3}$.
Soit $f : x \mapsto 1 - \dfrac{|a|}{x} - \dfrac{|b|}{x^2} - \dfrac{|c|}{x^3}$.
$f$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$. On en déduit que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\rho$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $(E')$ admet bien une unique solution strictement positive.

*Il aurait été naturel de considérer la fonction $g : x \mapsto x^3 - |a|x^2 - |b|x - |c|$ mais l'étude de celle-ci ne permet de conclure quant à l'unicité d'une solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation $g(x) = 0$.*

4) D'après la question 2) $|Z| \leq max\left(\rho, |a| + \dfrac{|b|}{\rho} + \dfrac{|c|}{\rho^2}\right)$, or $\rho$ est solution de $(E')$ donc $|a| + \dfrac{|b|}{\rho} + \dfrac{|c|}{\rho^2} = \rho$ d'où le résultat.

Exercice 2 : Munissons le plan du repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de sorte que le cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au polygone soit de centre $O$ et de rayon 1.
On convient de noter par des lettres minuscules les affixes des points considérés dans le repère précédent.

- Pour tout $1 \leq i \leq n$, $A_i, B_i \in \mathcal{C}$ donc $|a_i| = |b_i| = 1$.
- $G$ est l'isobarycentre de $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ donc $g = \dfrac{a_1 + ... + a_n}{n}$.
- Pour tout $1 \leq i \leq n$, les points $A_i, B_i$ et $G$ sont alignés donc les affixes des vecteurs $\overrightarrow{A_iG}$ et $\overrightarrow{A_iB_i}$ ont le même argument. Etant donné un nombre complexe $z \neq 0$, $\dfrac{z}{\overline{z}} = e^{2iarg(z)}$ donc : $\dfrac{g-a_i}{\overline{g}-\overline{a_i}} = \dfrac{b_i - a_i}{\overline{b_i} - \overline{a_i}}$.

  On en déduit que $\dfrac{g-a_i}{\overline{g}-\overline{a_i}} = \dfrac{b_i - a_i}{\frac{1}{b_i} - \frac{1}{a_i}} = -a_ib_i$ d'où $b_i = \dfrac{g-a_i}{1-a_i\overline{g}}$.

Soit $1 \leq i \leq n$ :
$$\frac{A_iG^2}{GB_i^2} = \frac{(g-a_i)(\overline{g}-\overline{a_i})}{(b_i-g)(\overline{b_i}-\overline{g})} = \frac{(g-a_i)(\overline{g}-\overline{a_i})}{\left(\frac{g-a_i}{1-a_i\overline{g}} - g\right)\left(\frac{\overline{g}-\overline{a_i}}{1-\overline{a_i}g} - \overline{g}\right)} = \frac{(g-a_i)(\overline{g}-\overline{a_i})(1-a_i\overline{g})(1-\overline{a_i}g)}{a_i\overline{a_i}(1-g\overline{g})^2} = \frac{(g-a_i)^2(\overline{g}-\overline{a_i})^2}{(1-g\overline{g})^2}$$
On a donc : $\dfrac{A_iG}{GB_i} = \dfrac{(g-a_i)(\overline{g}-\overline{a_i})}{1-g\overline{g}} = \dfrac{g\overline{g}}{1-g\overline{g}} - a_i\dfrac{\overline{g}}{1-g\overline{g}} - \overline{a_i}\dfrac{g}{1-g\overline{g}} + \dfrac{1}{1-g\overline{g}}$

Et finalement :
$$\begin{aligned} \frac{A_1G}{GB_1} + \frac{A_2G}{GB_2} + ... + \frac{A_nG}{GB_n} &= \sum_{i=1}^n \frac{g\overline{g}}{1-g\overline{g}} - \frac{\overline{g}}{1-g\overline{g}}\sum_{i=1}^n a_i - \frac{g}{1-g\overline{g}}\sum_{i=1}^n \overline{a_i} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{1-g\overline{g}} \\ &= \frac{ng\overline{g}}{1-g\overline{g}} - \frac{ng\overline{g}}{1-g\overline{g}} - \frac{ng\overline{g}}{1-g\overline{g}} + \frac{n}{1-g\overline{g}} \\ &= n \end{aligned}$$

Exercice 3 :

1) Désignons par $F$ l'ensemble $\{z^2 / z \in U_{2n}\}$.
Soit $y \in F$ : $\exists z \in U_{2n}$ tel que $y = z^2$. $y^n = z^{2n} = 1$ car $z \in U_{2n}$ et donc $y \in U_n$.

Réciproquement soit $y \in U_n$ : $\exists k,\ 0 \leq k \leq n-1$ tel que $y = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$. $y = z^2$ avec $z = e^{\frac{2ik\pi}{2n}}$ et $0 \leq k \leq n-1 \leq 2n-1$ donc $z \in U_{2n}$ et $y \in F$. On a donc bien $F = U_n$.

De plus, si $y \in U_n$ alors $y^{2n} = (y^n)^2 = 1^2 = 1$ donc $y \in U_{2n}$ et $U_n \subset U_{2n}$.

2) a) Soit $z \in U_{2n}$ : $z^2 = f(f(z))$ et $f(z) \in U_{2n}$ donc on a aussi $f(f[f(z)]) = (f(z))^2$. Ainsi $f(z^2) = f[f(f(z))] = f(f[f(z)]) = (f(z))^2$.

   b) • Si $f(z) = f(z')$ alors $z^2 = z'^2$ donc $z = z'$ ou $z = -z'$.
   • $1 \in U_{2n}$ donc $f(1) \in U_{2n}$ et $f(1^2) = (f(1))^2$. Ainsi $f(1) = f(1^2) = f(1)^2$ et $f(1) = 1$ ou $f(1) = 0$. Comme $0 \notin U_{2n}$, on a bien $f(1) = 1$.
   • $1 = f(1) = f((-1)^2) = (f(-1))^2$ car $-1 \in U_{2n}$. On a donc $f(-1) = 1$ ou $f(-1) = -1$. Si $f(-1) = -1$ alors $f(f(-1)) = f(-1)$ c'est-à-dire $(-1)^2 = f(-1)$ ce qui est absurde donc $f(-1) = 1$.

3) Supposons que $n$ soit pair et soit $z = e^{\frac{2ik\pi}{2n}}$ avec $n = 2k$. On a bien $z^2 = -1$.
Réciproquement supposons qu'il existe $z \in U_{2n}$ tel que $z^2 = -1$. $z \in U_{2n}$ donc il existe $k \in \mathbb{N},\ 0 \leq k \leq 2n-1$ tel que $z = e^{\frac{2ik\pi}{2n}}$. On a $z^2 = e^{\frac{2ik\pi}{n}} = -1 = e^{i\pi}$ donc il existe $k' \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{2k\pi}{n} = \pi + 2k'\pi$. On en déduit que $n = 2(k-k')$ est pair.

Lorsque $n$ est pair, il existe donc un élement $z$ de $U_{2n}$ vérifiant $z^2 = -1$.

Plaçons que nous soyons dans ce cas et supposons qu'il existe une fonction $f$ solution au problème initial. Soit $z \in U_{2n}$ tel que $z^2 = -1$. $1 = f(-1) = f(z^2) = f(z)^2$ et donc $f(z) = 1$ ou $f(z) = -1$.
Si $f(z) = 1$ alors $f(z) = f(1)$ donc $z = 1$ ou $z = -1$ ce qui est impossible car $z^2 = -1$ ; on raisonne de même si $f(z) = -1$ et il n'existe donc pas de fonction $f$ solution.

4) Supposons que $n$ soit un multiple de 3 et soit $z = e^{\frac{2i\pi}{3}} = e^{\frac{2ki\pi}{3k}} = e^{\frac{2ki2\pi}{2n}}$ avec $n = 3k$. $z \in U_{2n}$ car $0 \leq k \leq 2n-1$ et $z^3 = 1$.
Réciproquement supposons qu'il existe $z \in U_{2n} - \{1\}$ tel que $z^3 = 1$. $z \in U_{2n} - \{1\}$ donc il existe $k \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq k \leq 2n-1$ tel que $z = e^{\frac{2ik\pi}{2n}} = e^{\frac{ik\pi}{n}}$. On a $z^3 = e^{\frac{3ik\pi}{n}} = e^{i\times 0}$ donc il existe $k' \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{3k\pi}{n} = 2k'\pi$.
Comme $0 < k \leq 2n-1$, $0 < \dfrac{3k}{n} < 5$ c'est-à-dire $0 < 2k' < 5$ et donc $k' = 1$ ou 2.
Si $k' = 1$ alors $3k = 2n$ et comme $n$ est entier, $k$ est nécessairement pair et $n$ est alors un multiple de 3.
Si $k' = 2$ alors $3k = 4n$ et comme $n$ est entier, $k$ est nécessairement un multiple de 4 et $n$ est alors un multiple de 3.

Lorsque $n$ est un multiple de 3, il existe donc un élement $z$ de $U_{2n}$ vérifiant $z^3 = 1$.

Plaçons que nous soyons dans ce cas et supposons qu'il existe une fonction $f$ solution au problème initial. Soit $z \in U_{2n} - \{1\}$ tel que $z^3 = 1$. $z^4 = z$ donc $f(z^4) = f(z)$ d'où $f(z^2)^2 = f(z)$ et finalement $f(z)^4 = f(z)$. $f(z) \in U_{2n}$ donc $f(z) \neq 0$ et donc $f(z)^3 = 1$. On en déduit que $f(z) \in U_3 = \{1, z, z^2\}$.
Si $f(z) = 1$ alors $f(z) = f(1)$ donc $z = 1$ ou $z = -1$ ce qui est impossible.
Si $f(z) = z$ alors $f(f(z)) = f(z)$ c'est-à-dire $f(z^2) = f(z)$ donc $z^2 = z$ ce qui est impossible ($z = 0$ ou $z = 1$).
Si $f(z) = z^2$ alors $f(z) = f(f(z))$ donc $f(z) = z$ ce qui est impossible ou $f(z) = -z$ ce qui est aussi impossible ($z = 0$ ou $z = -1$).

5) a) Soient $z, z' \in U_n$ tels que $g(z) = g(z')$. On a donc $z = z'$ ou $z = -z'$ or, $z^n = (z')^n = 1$ car $z, z' \in U_n$ et $n$ étant impair si $z = -z'$, $(z')^n = -z^n$ ce qui est impossible. On a donc $z = z'$ et chaque élément de $U_n$ ne peut donc être l'antécédent par $g$ d'un seul élément de $U_n$. $U_n$ étant un ensemble fini à $n$ éléments, chaque élément de $u_n$ est l'unique antécédent par $g$ d'un élément de $U_n$ et $g$ est bien bijective.

   b) Soit $f$ une solution au problème posé et posons $\phi = g^{-1} \circ f \circ g$.
   Si $z \in U_n$ alors $\phi(z) = g^{-1}(f(z^2)) = g^{-1}(f(z)^2)$. Comme $z \in U_n \subset U_{2n}$ donc $f(z) \in U_{2n}$ et d'après 1), $f(z) \in F = U_n$. $\phi$ est donc bien une application de $U_n$ dans $U_n$ et on a bien $\phi \circ \phi(z) = g^{-1} \circ f \circ f(z^2) = g^{-1}(z^4) = z^2 = g(z)$.

   On obtient une solution $f$ au problème posé en posant pour tout $z \in U_{2n}$, $f(z) = \phi \circ g^{-1}(z^2)$.

   c) D'après les questions précédentes, cela revient à déterminer une application $\phi : U_5 \to U_5$ telle que $\phi \circ \phi = g$. Pour tout $0 \leq k \leq 4$, notons $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{5}}$. On a $\phi \circ \phi(z_0) = z_0$, $\phi \circ \phi(z_1) = z_2$, $\phi \circ \phi(z_2) = z_4$, $\phi \circ \phi(z_3) = z_1$, $\phi \circ \phi(z_4) = z_3$.

   Si $\phi(z_0) = z_1$ alors $\phi(z_1) = z_0$ ce qui est impossible. En procédant de la même manière, on montre que $\phi(z_0) = z_0$.

   Si $\phi(z_1) = z_1$ alors $\phi(z_1) = z_2$ ce qui est contradictoire.
   Si $\phi(z_1) = z_2$ alors $\phi(z_2) = z_2$ et donc $\phi(z_2) = z_4$ ce qui est contradictoire. En poursuivant ainsi, on constate que l'on ne peut pas construire de fonction $\phi$ vérifiant les conditions imposées et il n'existe donc pas de solution au problème pour $n = 5$.

   d) Pour $n = 7$, en procédant comme si dessus, on construit une fonction $\phi$ convenable et on a donc une solution au problème posé.

Pour $n = 9$, on a vu à la question 4) qu'il n'y avait pas de solution au problème posé.