Exercice 1 : Soient a, b et c des nombres complexes. On considère l'équation

$$(E) : z^3 + az^2 + bz + c = 0$$

Soit Z une racine complexe de (E).

1) Montrer que : $|Z| \leq max(1, |a| + |b| + |c|)$.
2) Plus généralement, soit $r > 0$, montrer que : $|Z| \leq max\left(r, |a| + \frac{|b|}{r} + \frac{|c|}{r^2}\right)$.
3) Montrer que $(E') : x^3 - |a|x^2 - |b|x - |c| = 0$ admet une unique solution, notée ρ, dans $\mathbb{R}_+^*$.
4) Montrer que $|Z| \leq \rho$.

Exercice 2 : Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
On considère un polygone $A_1A_2...A_n$ inscriptible dans un cercle, on note G son centre de gravité et on désigne par $B_1, B_2, ..., B_n$ respectivement les points d'intersection des droites (A_1G), (A_2G),...,(A_nG) avec le cercle circonscrit au polygone. Prouver que :

$$\frac{A_1G}{GB_1} + \frac{A_2G}{GB_2} + ... + \frac{A_nG}{GB_n} = n$$

Exercice 3 : On considère l'ensemble $U_m = \{e^{\frac{2ik\pi}{m}} / 0 \leq k \leq m-1\}$. On rappelle que c'est aussi l'ensemble des racines m-ièmes complexes de l'unité, c'est-à-dire l'ensemble des nombres complexes z vérifiant $z^m = 1$.
On se donne une netier strictement positif n et on cherche s'il existe une fonction $f : U_{2n} \to U_{2n}$ vérifiant $f(f(z)) = z^2$ pour tout z dans U_{2n}.

1) Montrer que l'ensemble $\{z^2 / z \in U_{2n}\}$ est égal à U_n et qu'il est inclu dans U_{2n}.
2) On suppose qu'il existe une solution f au problème considéré.
   a) Vérifier que $f(z^2) = (f(z))^2$ pour tout z dans U_{2n}.
   b) Montrer que $f(z) = f(z') \Rightarrow z = z'$ ou $z = -z'$ et que $f(1) = f(-1) = 1$.
3) Selon la valeur de n, existe-t-il un élement z de U_{2n} qui vérifie $z^2 = -1$? Si oui, vérifier qu'alors, il n'y a pas de fonction f solution.
4) Selon la valeur de n, existe-t-il un élément z de U_{2n} qui vérifie $z^3 = 1$ avec $z \neq 1$? Si oui, vérifier qu'alors il n'y a pas de fonction f solution.
5) On suppose dans toute la suite de l'énoncé que l'entier n est impair.
   a) Vérifier que la fonction g de U_n dans lui-même qui à z appartenant à U_n associe z^2 est bijective.
   b) On suppose qu'il existe une solution f au problème. Vérifier qu'il existe une application $\phi : U_n \to U_n$ telle que $\phi \circ \phi = g$. Construire alors une solution f au problème.
   c) Exemple : on prend $n = 5$, dire s'il existe une solution au problème, si oui en construire une.
   d) Même question avec $n = 7$ puis $n = 9$.