Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

académie Versailles
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

UNIVERSITÉ DE VERSAILLES ST-QUENTIN-EN-YVELINES

Inria INVENTEURS DU MONDE NUMÉRIQUE
Inria Paris Rocquencourt

Stage ouvert aux candidats au Concours général des lycées 20 et 21 février 2012

MathC2+

La **Pépinière académique de mathématiques** est une initiative de l'académie de Versailles et de ses partenaires, l'INRIA (Centres de Paris Rocquencourt et de Saclay Île de France) et l'Université de Versailles Saint Quentin en Yvelines. Elle a reçu le soutien de l'Institut des hautes études scientifiques. Elle organise grâce à des bénévoles des stages destinés aux élèves intéressés et talentueux *désignés par leurs établissements*. Son action est strictement institutionnelle. Elle s'inscrit dans le Plan sciences ministériel, et notamment dans le projet MathC2+.

Emploi du temps

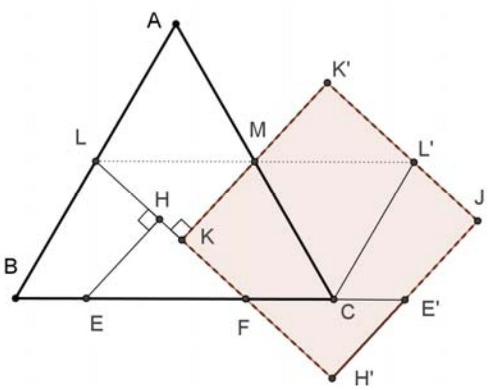
<table>
<tr><th>Lundi 20 février</th><th>Groupe 1</th><th>Groupe 2</th><th>Groupe 3</th></tr>
<tr><td>10 heures</td><td rowspan="2">Égalités et équations
MA</td><td>Calcul numérique,
Calcul formel RB</td><td rowspan="2">Ordre et convexité
KZ+MT</td></tr>
<tr><td>11 heures</td><td rowspan="2">Suites et fonctions
CL+AC</td></tr>
<tr><td>12 heures</td><td>Repas</td><td>Repas</td></tr>
<tr><td>13 heures</td><td>Calcul numérique,
Calcul formel RB</td><td>Repas</td><td>La treizième sphère
PM</td></tr>
<tr><td>14 heures</td><td rowspan="2">Ordre et convexité
KZ+MT</td><td>La treizième sphère
PM</td><td rowspan="2">Suites et fonctions
CL+AC</td></tr>
<tr><td>15 heures</td><td rowspan="2">Égalités et équations
MA</td></tr>
<tr><td>16 heures</td><td>La treizième sphère
PM</td><td>Calcul numérique,
Calcul formel RB</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Mardi 21 février</th><th>Groupe 1</th><th>Groupe 2</th><th>Groupe 3</th></tr>
<tr><td>10 heures</td><td rowspan="2">Suites et fonctions
CW+CH</td><td rowspan="2">Géométrie
AA+MS</td><td rowspan="2">Arithmétique
AV</td></tr>
<tr><td>11 heures</td></tr>
<tr><td>12 heures</td><td>Repas</td><td>Repas</td><td>Repas</td></tr>
<tr><td>13 heures</td><td rowspan="2">Arithmétique
AV</td><td rowspan="2">Ordre et convexité
BB+CW</td><td rowspan="2">Géométrie
AA+MS</td></tr>
<tr><td>14 heures</td></tr>
<tr><td>15 heures</td><td rowspan="2">Géométrie
AA+MS</td><td rowspan="2">Arithmétique
AV</td><td rowspan="2">Égalités et équations
CH+BB</td></tr>
<tr><td>16 heures</td></tr>
</table>

Organisation : Florence GOEHRS (UVSQ)**,** Frédérique CHAUVIN (Rectorat de Versailles), Pierre MICHALAK (Rectorat de Versailles). **Responsables :** Marie-Françoise BOURDEAU, Véronique MESSEANT, Évelyne ROUDNEFF, Pierre MICHALAK (Inspection Pédagogique régionale de mathématiques). **Intervenants :** Catherine HOUARD, Bruno BAUDIN, Karim ZAYANA, Anne ALLARD, Martine SALMON, Aude CHUPIN , Michel ABADIE, Richard BREHERET, Christine WEILL, Carine LILETTE, Monique TALEB, Alexandra VIALE

Thème : Problèmes classiques en géométrie

Exercice 1 Un puzzle de Dudeney (1905)

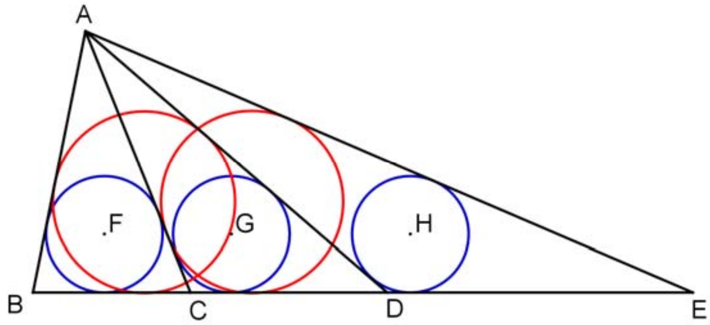


Sur les côtés du triangle équilatéral ABC, on a placé les points L, milieu de [AB] et M, milieu de [AC]. Les points E et F sont des points du segment [BC] tels que EF = BC / 2.

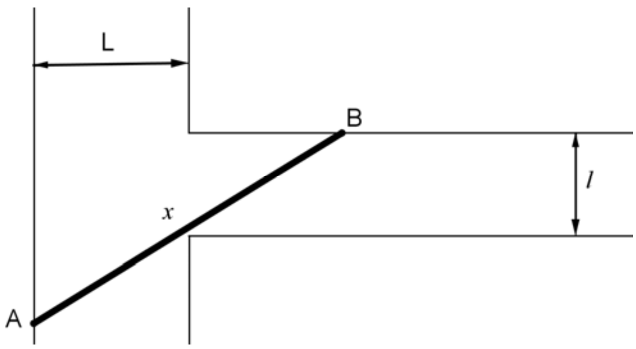
Les points H' et E' sont les symétriques de H et E par rapport à F. Le point L'est le symétrique de L par rapport à M. Le point J est le quatrième sommet du rectangle KK'JH'.

1. Montrer que ce rectangle a la même aire que le triangle ABC.
2. Où faut-il placer F pour que KK'JH' soit un carré ? Comment réaliser la construction ?

Exercice 2 Le théorème des cercles inscrits



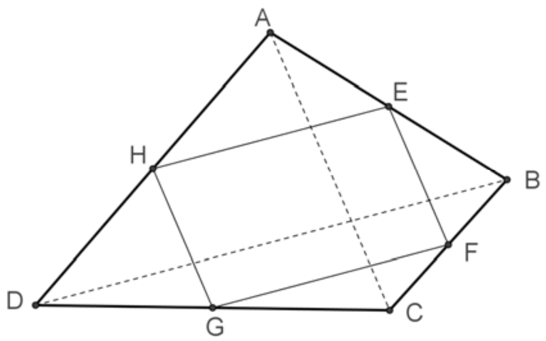
Les côtés [BC], [CD] et [DE] des triangles ABC, ACD et ADE ont même support. On suppose que les cercles inscrits dans ces triangles ont le même rayon.
Montrer que les cercles inscrits dans les triangles ABD et ACE ont le même rayon.



Exercice 3 Le problème de la péniche

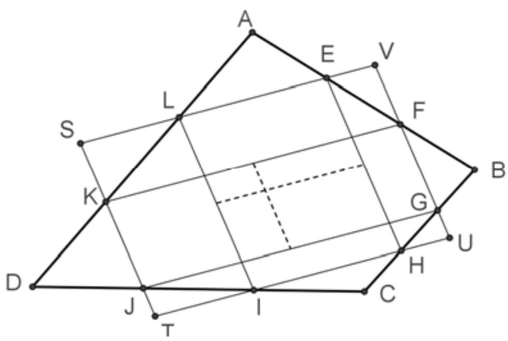
Une péniche, assimilée à un segment de longueur *x* circule dans un canal de largeur L et s'engage dans un canal de largeur *l*.
À quelle condition le virage est-il possible ?

Exercice 4 Parallélogramme de Varignon, parallélogramme de Wittenbauer



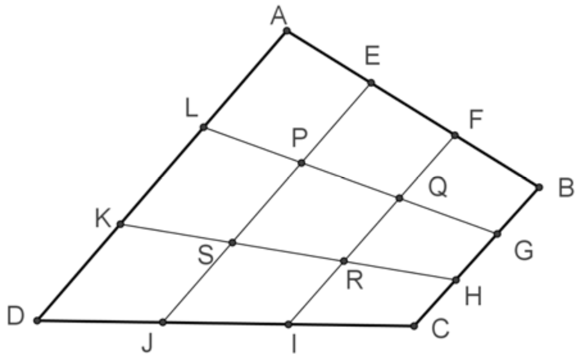
1. (*Rappel*) L'isobarycentre des sommets du quadrilatère ABCD est le centre du parallélogramme de Varignon, dont les sommets sont les milieux des côtés de ABCD.

2. Le centre de gravité de la plaque homogène ABCD est le centre du parallélogramme de Wittenbauer, dont les



côtés passent par les points qui divisent en trois les côtés de ABCD
.3. Pour quels quadrilatères ABCD ces deux points coïncident-ils ?

Exercice 5 La case du milieu



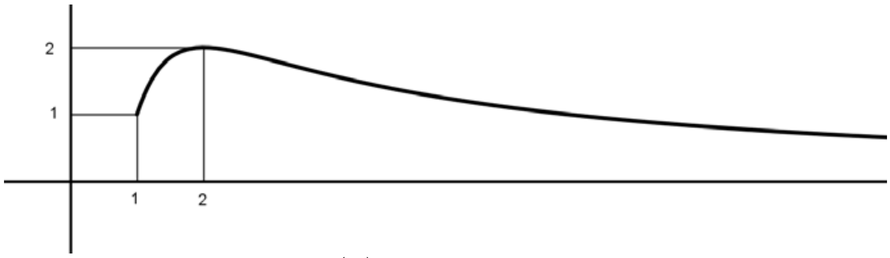
Sur les côtés du quadrilatère convexe ABCD on a placé les points E,F,G,H,I,J,K et L qui divisent respectivement ces côtés en trois.
Le quadrilatère se trouve ainsi divisé en neuf cases.
Montrer que l'aire de la case PQRS est le neuvième de l'aire de ABCD.

Exercice 6 Carrés cocycliques
Dans le plan, on considère un triangle ABC et les six points D,E, F, G,H, I tels que ABED, BCGF et ACHI soient des carrés extérieurs à ABC.
Montrer que les points D, E, F, G, H, I sont cocycliques si et seulement si on est dans l'un des deux cas suivants :
• le triangle ABC est équilatéral ;
• le triangle ABC est rectangle et isocèle.

concours général 1996 - exercice 1

Thème : Suites et fonctions

Exercice 1 Modélisation
Un phénomène physique est représenté par un graphique ayant l'allure ci-contre.
L'analyse des propriétés importantes de ce graphique conduit à rechercher une fonction continue $f:[1,+\infty[\to \mathbf{R}$ telle que $f(1)=1$, $f(2)=2$, *f* admet un maximum en 2 et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.



En supposant que *f* est un quotient de deux fonctions polynômes restreintes à l'intervalle considéré, donner un exemple d'une fonction ayant ces propriétés.

Exercice 2 Détermination de l'ensemble image d'une fonction
Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la fonction $f: x \mapsto \dfrac{3+2\sin x}{\sqrt{1+\cos x}+\sqrt{1-\cos x}}$ lorsque x décrit **R.**

Exercice 3 Soit $(u_n)_{n\in N}$ la suite de nombres entiers définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ (\forall n \in N) \quad u_{2n} = u_n \text{ et } u_{2n+1} = 1-u_n \end{cases}$

1. Calculer u_{2012}.
2. Déterminer le nombre d'indices n, inférieurs ou égaux à 2012, tels que $u_n = 0$.
3. Soit p un nombre entier naturel et $N = (2^p - 1)^2$. Calculer u_N.

Exercice 4 À tout entier naturel n non nul, on associe la fonction f_n de la variable réelle x, définie pour $x \geq n$ par : $f_n(x) = \sqrt{x-n}+\sqrt{x-n+1}+...+\sqrt{x-1}+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}+...+\sqrt{x+n}-(2n+1)\sqrt{x}$.
1. Dans cette question, l'entier n est fixé.
Montrer que f_n est croissante et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)=0$.
2. Déterminer la limite de la suite de terme général $f_n(n)$.

Exercice 5 Soit N un entier strictement compris entre 100 et 1 000.

On note $f(N)$ le nombre entier naturel formé par les 3e, 4e et 5e décimales de $\frac{1}{N}$ (dans le système décimal) après la virgule. Démontrer que $f\left(f\left(f\left(N\right)\right)\right)=f\left(N\right)$.

Indications : On pourra exprimer $f(N)$ à l'aide de la fonction « partie entière » et démontrer que f est une fonction décroissante sur son ensemble de définition.

Exercice 6 ***Olympiade de Croatie 1996***

Soit t un réel strictement compris entre – 1 et 1. On veut déterminer toutes les fonctions f : R → R vérifiant pour tout réel x : $\begin{cases} f(x)-2f(tx)+f(t^2x)=x^2 \\ \lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0) \\ f(0)=0 \end{cases}$

1. Soit f une solution éventuelle. Montrer l'égalité suivante : Pour tout x réel $f(x)-f(tx)=\frac{x^2}{1-t^2}$

2. En déduire que pour tout entier naturel n non nul : $f(x)-f(t^nx)=x^2\frac{1-t^{2n}}{\left(1-t^2\right)^2}$

3. En déduire que f est définie sur R par : $f(x)=\frac{x^2}{\left(1-t^2\right)^2}$

Exercice 7 ***Olympiades Suisse 1999***

Déterminer toutes les fonctions $f:\mathbf{R}^*\to\mathbf{R}$ telles que pour tout réel x non nul, $\frac{1}{x}f\left(-x\right)+f\left(\frac{1}{x}\right)=x$.

Exercice 8 Exercice (Olympiades Ukraine 1997)

Déterminer toutes les fonctions $f:\mathbf{Q}^{+}*\to\mathbf{Q}^{+}*$ telles que, pour tout rationnel x strictement positif : $f(x+1)=f(x)+1$ et $f\left(x^2\right)=\left(f(x)\right)^2$.

Exercice 9 Soit f et g deux fonctions continues définies sur un même intervalle I.

Pour tout réel m, on pose $\phi(m)=\sup\limits_{x\in I}\left(f(x)+mg(x)\right)$.

Calculer $\phi(m)$ puis représenter la fonction ϕ dans les cas suivants :

1. $f(x) = x + 1$ et $g(x) = 2x – 1$ pour $x \in [0 ; 1]$
2. $f(x) = x + 1$ et $g(x) = x^2 – 3x + 2$ pour $x \in [0 ; 1]$

La fonction ϕ est-elle continue ?

Thème : Égalités, Équations

Exercice 1 Combien de solutions ?

On considère la fonction $f:x\mapsto x^3+3x^2-1$.

Combien l'équation $f\left(f\left(x\right)\right)=0$ a-t-elle de solutions ?

Exercice 2 Soit x, y, z trois réels non nuls tels que $\begin{cases} x+y+z=1 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0 \end{cases}$. Calculer $x^2+y^2+z^2$.

Exercice 3 Sommes de racines

Soit $a = \sqrt{2} + 1$. Montrer qu'il existe pour chaque entier naturel n, un naturel $k \geq 1$ tel que : $a^n = \sqrt{k} + \sqrt{k-1}$

Exercice 4

Représenter graphiquement l'ensemble des points $M(x, y)$ d'un plan rapporté à un repère orthonormé tels que $\left(x-|x|\right)^2+\left(y-|y|\right)^2=4$

Exercice 5

1. Trouver trois nombres entiers naturels a, b, c, distincts ou non, tels que : $\frac{1}{4}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$

2. Déterminer tous les nombres entiers naturels n tels qu'il existe n nombres entiers $x_1, x_2, ..., x_n$ naturels distincts ou non, vérifiant : $1=\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+...+\frac{1}{x_n^2}$

Exercice 6

1. Montrer que $\forall\ n \in \mathbf{N}^*$, $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\frac{1}{2\sqrt{n}}<\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$

2. En déduire la partie entière de $\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{10\,000}}\right)$.

Exercice 7 Soit A (x) = $x^3 + x - 2$, dont les racines sont 1, α et β.

Déterminer un polynôme B (x) de degré 2 tel que B (1) = 1, B (α) = β et B (β) = α.

Montrer qu'alors B (B (x)) – x est divisible par A (x).

Thème : Ordre, inégalités, convexité

Exercice 1 Soit x, y, z trois réels strictement positifs .

On pose $A=\frac{x}{x+y}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+x}$.

Montrer que l'ensemble des valeurs prises par A est l'intervalle]1, 2[.

Exercice 2 Soit n un entier naturel. Comparer n^{n+1} et $(n+1)^n$

Exercice 3 ***Inégalité de Cauchy-Schwarz***

Soit n un entier naturel non nul et $(a_k)_{1\le k\le n}, (b_k)_{1\le k\le n}$ deux familles de nombres réels non tous nuls.

Soit f la fonction qui, à tout réel x associe $f(x)=\sum_{k=1}^{n}(a_k x-b_k)^2$

1. Montrer que f est un trinôme du second degré et que pour tout réel x, $f(x)\ge 0$.
2. En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\left|\sum_{k=1}^{n}a_k b_k\right| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}\times\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}$.
3. Dans quel cas a-t-on $\left|\sum_{k=1}^{n}a_k b_k\right| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}\times\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}$?
4. Interpréter géométriquement l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans les cas n = 2 et n = 3.

Exercice 3bis ***Comparaison d'écarts***

Soit m la moyenne de la série $(x_i)_{1\le i\le n}$.

On pose $e=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|m-x_i|$ (moyenne des écarts à la moyenne) et $\sigma=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(m-x_i)^2}$ (écart-type de la série statistique)

a) Comparer e et σ.
b) Peut-on avoir $e=\sigma$?

Parties convexes et fonctions convexes

Définition 1

Soit D une partie d'un plan $\mathscr{P}$. D est une partie convexe de $\mathscr{P}$ si et seulement si, pour tous points A et B de $\mathscr{P}$, le segment [AB] est inclus dans $\mathscr{P}$.

Définition 2

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I de **R**.

- f est convexe sur I si, et seulement si, pour tous réels a et b de I et tout réel t compris entre 0 et 1 : $f\left(ta+(1-t)b\right)\le tf(a)+(1-t)f(b)$

f est **concave** si et seulement si $-f$ est convexe.

1. **Interprétation géométrique**.

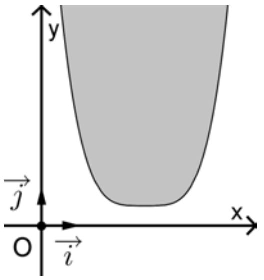
Soit f une fonction convexe sur un intervalle I de R, a et b deux réels de l'intervalle I tels que $a < b$ et t un réel compris entre 0 et 1. On pose $c = ta + (1-t)b$ et on note respectivement A, B, C et D les points de coordonnées $\left(a, f(a)\right), \left(b, f(b)\right), \left(c, f(c)\right)$ et $(c, tf(a) + (1-t)f(b))$.

a) Quelle est la position de D par rapport à C ?

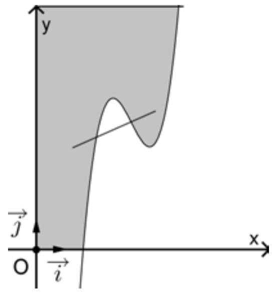
b) Quels sont les lieux de C et D lorsque t parcourt l'intervalle [0, 1] ? Conclure.

Remarque : On démontre qu'une fonction f est **convexe** sur I si, et seulement si, son **épigraphe** est convexe.

(on appelle *épigraphe* d'une fonction f définie sur un intervalle I, l'ensemble des couples (x, y) de réels tels que $\begin{cases} x \in I \\ y \geq f(x) \end{cases}$



La partie grisée représente l'épigraphe d'une fonction convexe



Fonction ni convexe ni concave

2. Démontrer que si f est une fonction convexe sur un intervalle I, alors, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, pour tous réels $\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ appartenant à I et tous réels $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ strictement positifs de somme 1, $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$.

3. **Quelques propriétés des fonctions convexes :**

a) Démontrer qu'une fonction f est convexe sur un intervalle I de R si et seulement si pour tout réel a, b, c de I tels que $a < c < b$: $\dfrac{f(c) - f(a)}{c - a} < \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} < \dfrac{f(b) - f(c)}{b - c}$.

b) On admet la propriété suivante : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. f est convexe sur I si, et seulement si, sa dérivée est croissante sur I.Démontrer qu'une fonction f dérivable sur I est convexe si, et seulement si, sa courbe représentative est au dessus de chacune de ses tangentes.

Exercice 4 ***Comparaison de moyennes.***

1. Étudier la convexité des fonctions f, g, h, k définies sur]0, + ∞[respectivement par :

$f(x) = x,\ g(x) = \dfrac{1}{x},\ h(x) = x^2,\ k(x) = \ln x$.

2. En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 2 et tout n-uplets $\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ de réels strictement positifs :

$$\min\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \leq \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \leq \max\left(x_1, x_2, ..., x_n\right).$$

$\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$, $\sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n}$, $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ et $\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ sont les moyennes respectivement harmonique, géométrique, arithmétique et quadratique des n réels $x_1, x_2, ..., x_n$.

Thème : Arithmétique, stratégie, probabilité

Exercice 1

On recouvre un échiquier carré de 36 cases avec des dominos dont chacun peut recouvrir exactement deux cases.

Montrer que, quel que soit le recouvrement exact de l'échiquier, il existe une droite parallèle à l'un des bords de l'échiquier, traversant l'échiquier, et qui ne coupe aucun domino.

Exercice 2

On considère quatre points A_1, A_2, A_3, A_4 de l'espace tels que toutes leurs distances mutuelles soient supérieures ou égales à 2. Démontrer qu'il n'existe aucune boule de rayon strictement inférieur à $\sqrt{\frac{3}{2}}$ qui contienne ces quatre points.

Exercice 3

Partie A.

Deux joueurs A et B ont devant eux un tas de 10 allumettes. Chacun à leur tour, il retire une ou deux allumettes du paquet. Celui qui est contraint de prendre la dernière allumette a perdu.

Dans tout le problème, c'est A qui commence. Le but du jeu est de déterminer une stratégie pour le joueur A ou pour le joueur B lui permettant de gagner.

Pour schématiser le problème, on décrit les différentes positions possibles du jeu par une lettre (A ou B) suivie d'un nombre entre 1 et 10.Par exemple A5 signifie : il reste 5 allumettes et c'est à A de jouer.

1) Déterminer la liste des différentes positions du jeu. En particulier il y a une position initiale, A10 et deux positions finales, A1 et B1.

2) Une position est dite gagnante pour B si et seulement si quelque soit le jeu de A, B a une stratégie gagnante. Une position est perdante pour B si et seulement si, quelque soit le jeu de B, A a une stratégie gagnante .Par exemple A1 est une position gagnante pour B, tandis que B1 est une position perdante pour B.
Pour chaque position du jeu : A2, B2, A3, B3 etc.., déterminer si elle est gagnante ou perdante pour B.
Qui va gagner ? Autrement dit, A10 est-elle une position gagnante ou perdante pour B ?

Partie B.

On généralise le problème avec un tas de n allumettes ($n \in \mathbb{N}^*$).

1) $n = 11$.Qui va gagner ?
2) $n = 15$.Qui va gagner ?
3) Déterminer suivant les valeurs de n, le vainqueur de la partie.

Partie C.

On généralise encore : on a un tas de n allumettes, et chaque joueur peut à son tour retirer 1, ou 2, ou 3, ou….., ou m allumettes : n et m sont des entiers naturels tels que $1 < m < n$.

Déterminer suivant les valeurs de n et de m, le vainqueur de la partie.

N.B. On admet bien sûr que A et B ont compris le jeu et qu'ils appliquent la stratégie gagnante dès qu'ils sont dans une position gagnante.

Probabilités *concours général 2000* –

On dispose de b boules blanches et n boules noire -au moins une de chaque-, que l'on répartit entre deux urnes de façon qu'aucune d'elle ne soit vide ; on note s le nombre de boules dans la première , et r celui de ces boules qui sont blanches. L'événement considéré est le tirage d'une boule au hasard dans l'une des urnes choisies au hasard ; le but de l'exercice est de déterminer les répartitions rendant maximale la probabilité p de tirer une boule blanche.

1. Exprimez p en fonction de b, n, r et s.
2. Dans cette question on fixe la valeur de s ; comment choisir r pour augmenter p ?
3. Résoudre l'exercice.
4. Quelles généralisations proposez-vous en augmentant les nombres de couleurs et d'urnes ?

Exercice 1 : *(Olympiades Internationales 2011)*

Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}^*$ telle que :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},\ f(m-n)/f(m) - f(n)$$

Montrer que pour tous $m, n \in \mathbb{Z}$ tels que $f(m) \leq f(n)$, $f(n)$ est divisible par $f(m)$.

Exercice 2 :

1) Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation $a^2 + b^2 = c^2$.
2) Un triangle est dit *pythagoréen* lorsqu'il est rectangle et que les longueurs de ses côtés sont entières.
Il est dit *pythagoréen primitif* lorsque ces longueurs sont en plus des nombres deux à deux premiers entre eux.
Montrer que le nombre de triangles pythagoréens primitifs dont le rayon du cercle inscrit est fixé est une puissance de deux.

On pourra admettre que le rayon r du cercle inscrit dans un triangle rectangle est égal à $\dfrac{a+b-c}{2}$, où a, b et c sont respectivement les longueurs des deux cotés et de l'hypoténuse du triangle.

Exercice 3 : *(Concours général 1991)*

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_0^3 + x_1^3 + ... + x_n^3 = (x_0 + x_1 + ... + x_n)^2$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que :

$$x_0 + x_1 + ... + x_n = \frac{m(m+1)}{2}$$

2) Si n et p sont deux entiers naturels non nuls, on pose $S_{n,p} = 1^p + 2^p + ... + n^p$. Déterminer les entiers naturels p non nuls tels que, quel que soit l'entier naturel non nul n, $S_{n,p}$ soit le carré d'un entier naturel.

Exercice 4 : *(Olympiades internationales 1975)*

Soit A la somme des chiffres de 4444^{4444} et B la somme des chiffres de A. Déterminer la somme des chiffres de B. *(Le système de numération utilisé est le système décimal.)*