## Pépinière de mathématiques février 2011 – Éléments de solution

### Thème 1 : algèbre et théorie des nombres

**Exercice 1**

**a.** Nécessairement l'un des nombres $a^2$, $b^2$, $c^2$ est inférieur ou égal 12 sinon $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}<\frac{1}{4}$.

Si $a$ est le plus petit (au sens large) des trois nombres, alors $a^2 \leqslant 12$ donc $a \leqslant 3$.

Comme de plus $\frac{1}{a^2}<\frac{1}{4}$, on a en fait $a=3$ et donc $\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{5}{36}$.

On montre de même que si $b \leqslant c$, alors $\frac{36}{5}<b^2<\frac{72}{5}$ d'où $7 \leqslant b^2 \leqslant 14$ et donc $b=3$.

On a donc $a=b=3$ et $c=6$.

**b.** *Remarques :* d'après le a, $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}=1$ donc $n=4$ est solution.

$n=1$ est aussi solution, en prenant $x_1=1$.

$n=6$ est solution car $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{6^2}=1$.

Si $n \geqslant 2$, alors , pour tout $i$ compris entre 1 et $n$, $\frac{1}{x_i^2}<1$ donc $x_i \geqslant 2$ et comme $1=\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+....+\frac{1}{x_n^2}$,

$1 \leqslant \frac{n}{4}$ donc $n \geqslant 4$.

Si $n$ est solution, alors $n+3$ est solution car si $1=\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+....+\frac{1}{x_n^2}$ alors

$1=\frac{1}{4x_1^2}+\frac{1}{4x_1^2}+\frac{1}{4x_1^2}+\frac{1}{4x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+....+\frac{1}{x_n^2}$. Donc, comme $n=4$ et $n=6$ sont solutions, il en est de même de tous les entiers supérieurs ou égaux à 4 et congrus à 0 ou à 1 modulo 3.
Il ne reste plus qu'à étudier les entiers congrus à 2 modulo 3.

$n=5$ n'est pas solution car si on suppose que les nombres $x_1$, $x_2$, …, $x_n$ sont rangés dans l'ordre croissant, alors $\frac{n}{x_n^2} \leqslant 1 \leqslant \frac{n}{x_1^2}$ d'où $\frac{x_1^2}{n} \leqslant 1 \leqslant \frac{x_n^2}{n}$ et donc, pour $n=5$, $x_1^2 \leqslant 5$ et donc $x_1=2$ (car pour tout $i$ compris entre 1 et $n$, $x_i \geqslant 2$). En reprenant le raisonnement pour $x_2$, $x_3$, $x_4$ et $x_5$, on obtient :

$\frac{4}{x_5^2} \leqslant 1-\frac{1}{4} \leqslant \frac{4}{x_2^2}$ ce qui donne $x_2^2 \leqslant \frac{16}{3} \leqslant x_5^2$ d'où $x_2=2$.

$\frac{3}{x_5^2} \leqslant 1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4} \leqslant \frac{3}{x_3^2}$ ce qui donne … $x_3=2$ ; $\frac{2}{x_5^2} \leqslant \frac{1}{4} \leqslant \frac{2}{x_4^2}$ ce qui donne … $x_4=2$ et donc $x_5=0$, ce qui est impossible.

Par contre, $n=8$ est solution car $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{18^2}=1$.

Finalement tous les entiers naturels autres que 2, 3 et 5 sont solutions.

**Exercice 2**

**a.** Par récurrence, pour $n=0$, l'égalité $(E_n)$ : $x_0^3+x_1^3+...+x_n^3=(x_0+x_1+...+x_n)^2$ s'écrit $x_0^3=(x_0)^2$.

On a donc $x_0=0=\frac{0(0+1)}{2}$ ou $x_0=1=\frac{1(1+1)}{2}$.

Si pour un entier naturel $n$, il existe un entier naturel $m$ tel que $x_0+x_1+...+x_n=\frac{m(m+1)}{2}$, alors comme $x_{n+1}=0$ ou $x_{n+1}{}^2-x_n=2(x_0+x_1+...+x_n)$, on a $x_{n+1}{}^2-x_n=m(m+1)$ soit $(x_{n+1}+m)(x_{n+1}-(m+1))=0$ donc $x_{n+1}=-m$ ou $x_{n+1}=m+1$.

On en déduit que $x_0+x_1+...+x_n+x_{n+1}=\frac{m(m-1)}{2}$ ou $x_0+x_1+...+x_n+x_{n+1}=\frac{(m+1)(m+2)}{2}$ et la propriété est encore vraie au rang $n+1$.

**b.** Si, pour tout entier naturel non nul $n$, $S_{n,p}=1^p+2^p+...+n^p$ est un carré alors pour $n=2$ et donc il existe un entier $a$ tel que $2^p+1=a^2$ soit $2^p=(a-1)(a+1)$. Par conséquent $a-1$ et $a+1$ sont des puissances de 2. En fait la seule possibilité est $a=3=p$.

**c.** Or $S_{n,3}=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$. Donc le seul entier $p$ qui convient est 3.

**Exercice 3**

Soit $n$ le nombre de chiffres de $x$ en écriture décimale et $p(x)$ le produit de ses chiffres.

- si $n=1$, $p(x)=x$ et $x$ doit être solution de $x^2-10x-22=0$ qui n'a pas de solution entière.
- si $n=2$, $x\geqslant 10$ et $p(x)\leqslant 81$.

Comme $x^2-10x-22=p(x)$, on a $x^2-10x-103\leqslant 0$. Comme de plus $x\geqslant 10$, les seules possibilités pour $x$ sont 10, 11, 12, 13, 14, 15 et 16. On peut alors écrire $x=10+y$ où $0\leqslant y\leqslant 6$. Alors $p(x)=y$ soit $(10+y)^2-10(10+y)-22=y$ c'est-à-dire $y^2+9y-22=0$ ce qui donne $y=2$ et $x=12$.

- si $n\geqslant 3$, alors montrons qu'il ne peut y avoir de solution.

On sait que $p(x)\leqslant 9^n$ et $x\geqslant 10^{n-1}$.

Donc $x^2-10x-22-p(x)=x(x-10)-p(x)\geqslant 10^{n-1}(10^{n-1}-10)-9^n-22$

D'où $x^2-10x-22-p(x)>10^{n-1}(10^{n-1}-10)-10^n-22=10^{n-1}(10^{n-1}-20)-22>100(100-20)-22>0$

Finalement la seule solution est $x=12$.

**Exercice 4**

**a.** $50^n<7^p<50^{n+1}\Leftrightarrow n\ln 50<p\ln 7<(n+1)\ln 50\Leftrightarrow n<p\frac{\ln 7}{\ln 50}<n+1$.

Comme $\frac{\ln 7}{\ln 50}<\frac{1}{2}$ (car $7^2<50$), $I_n\geqslant 2$ et comme $\frac{\ln 7}{\ln 50}>\frac{1}{3}$ (car $7^3>50$), $I_n\leqslant 3$.

**b.** Si, pour tout entier $n$, $I_n=2$, alors comme $50^0<7^1<7^2<50^1$ et $50^1<7^3<7^4<50^2$, on aurait, pour tout entier $n$, $50^n<7^{2n+1}<7^{2n+2}<50^{n+1}$. En particulier $\left(\frac{50}{49}\right)^n<7$. Ceci est impossible car $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{50}{49}\right)^n=+\infty$.

Il existe donc au moins un entier $n_0$ tel que $I_{n_0} = 3$. Il existe alors un entier $p$ tel que $50^{n_0} < 7^p < 7^{p+1} < 7^{p+2} < 50^{n_0+1}$. En élevant tout au carré on a aussi :
$50^{2n_0} < 7^{2p} < 7^{2p+1} < 7^{2p+2} < 7^{2p+3} < 7^{2p+4} < 50^{2n_0+2}$ ce qui implique que $I_{2n_0} + I_{2n_0+1} = 5$ d'où $I_{2n_0} = 3$ ou $I_{2n_0+1} = 3$. Dans les deux c as, il existe un entier $n$ strictement supérieur à $n_0$ tel que $I_n = 3$.

**Exercice 5**

1. a) Si le produit des éléments de chaque ligne est inférieur ou égal à 71, en effectuant le produit des 9 éléments du tableau on obtient $9! \leqslant 71^3$, ce qui est faux. Donc il existe au moins une ligne dont le produit des éléments est supérieur ou égal à 72.

b) Un exemple :

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 8 | 9 |
| 2 | 5 | 7 |
| 3 | 4 | 6 |

.

2. Supposons que le produit des éléments de chaque ligne et de chaque colonne soit inférieur ou égal à 89 et notons P le plus grand produit des éléments d'une ligne ou d'une colonne. On a $\mathrm{P} \leqslant 89$ et, d'après 1) a), $\mathrm{P} \geqslant 72$

D'autre part, en multipliant trois entiers distincts compris entre 1 et 9 on ne peut obtenir que trois entiers compris entre 72 et 89 : 72, 80 et 84.

Si P = 72 , en supposant que P est le produit des éléments d'une ligne, à l'ordre près des lignes et à l'ordre près des éléments d'une ligne, il n'y a qu'un tableau possible :

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 8 | 9 |
| 2 | 5 | 7 |
| 3 | 4 | 6 |

déjà vu en 1) b).

On peut alors remarquer que, si, dans une colonne, 9 est associé à 2, dans une autre, 8 est associé à 5 ou 7. Dans tous les cas il existe une colonne dont le produit des éléments est supérieur à P. D'où une contradiction.

De même, Si P = 80 , il n'y a qu'un tableau possible :

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 5 | 8 |
| 1 | 7 | 9 |
| 3 | 4 | 6 |

Et il existe une colonne dont le produit des éléments est supérieur à P.

## Thème 2 : géométrie et calcul

**Exercice 1**

**a.** Il suffit de d'utiliser $u = \dfrac{u+v}{2} + \dfrac{u-v}{2}$ et $v = \dfrac{u+v}{2} - \dfrac{u-v}{2}$ puis d'appliquer l'inégalité triangulaire.

**b.** On pose $S = |u_1| + |u_2| + |u_3| + |u_4|$.

En appliquant deux fois le résultat précédent on a tout de suite $S \leqslant |u_1+u_2|+|u_1-u_2|+|u_3+u_4|+|u_3-u_4|$ .

Or, d'après le a, $|u_1-u_2|+|u_3-u_4| \leqslant |u_1-u_2+u_3-u_4|+|u_1-u_2-u_3+u_4|$

d'où $|u_1-u_2|+|u_3-u_4| \leqslant |u_1+u_3-(u_2+u_4)|+|u_1+u_4-(u_2+u_3)|$

d'où $|u_1-u_2|+|u_3-u_4| \leqslant |u_1+u_3|+|u_2+u_4|+|u_1+u_4|+|u_2+u_3|$.

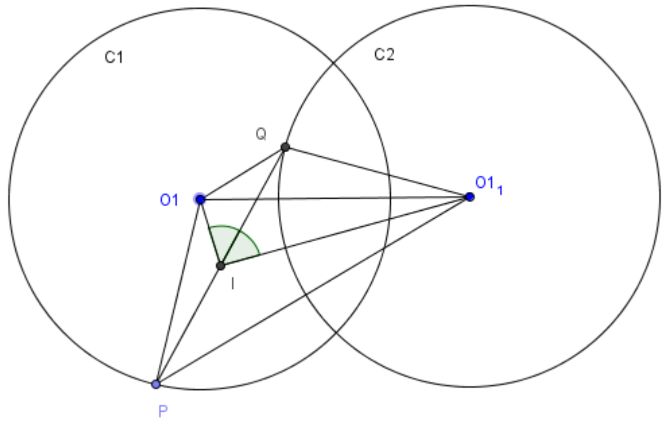
En ajoutant $|u_1+u_2|+|u_3+u_4|$ à chaque membre de l'inégalité on obtient le résultat demandé..

**Exercice 2**

**a.** La condition $z_1 z_2 = 1$ impose $z_1 \neq 0$ et s'écrit $z_2 = \frac{1}{z_1}$. La condition $|z_1 - z_2| = 2$ s'écrit alors $|z_1-1||z_1+1| = 2|z|$ soit $\mathrm{AM_1} \times \mathrm{BM_1} = 2\mathrm{OM_1}$ si O est l'origine du repère.
Or la propriété de la médiane donne, puisque O est le milieu de [AB] : $\mathrm{AM_1}^2 + \mathrm{BM_1}^2 = 2\mathrm{OM_1}^2 + \frac{1}{2}\mathrm{AB}^2 = 2\left(\mathrm{OM_1}^2+1\right)$.
On doit donc résoudre le système $\begin{cases} \mathrm{AM_1} \times \mathrm{BM_1} = 2\mathrm{OM_1} \\ \mathrm{AM_1}^2 + \mathrm{BM_1}^2 = 2\left(\mathrm{OM_1}^2+1\right) \end{cases}$ qui équivaut à $\begin{cases} \mathrm{AM_1}^2 = 2 \\ \mathrm{BM_1}^2 = 2\mathrm{OM_1}^2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} \mathrm{BM_1}^2 = 2 \\ \mathrm{AM_1}^2 = 2\mathrm{OM_1}^2 \end{cases}$. La seconde solution revient à la première par symétrie de centre O. On ne travaille donc que dans le deuxième cas, c'est-à-dire $\begin{cases} \mathrm{AM_1} = \sqrt{2} \\ \mathrm{BM_1} = \sqrt{2}\mathrm{OM_1} \end{cases}$.
On a alors $\mathrm{BM_2} = \left|\frac{1}{z_1} - 1\right| = \frac{|z_1-1|}{|z_1|} = \frac{\mathrm{BM_1}}{\mathrm{OM_1}} = \sqrt{2} = \mathrm{AM_1}$ et $|z_1 - z_2| = 2$ qui s'écrit $\mathrm{AB} = \mathrm{M_1M_2}$. Les triangles $\mathrm{ABM_1}$ et $\mathrm{M_2M_1B}$ sont donc isométriques et distincts. La condition $z_2 = \frac{1}{z_1}$ nécessitant d'avoir $\mathrm{M_1}$ et $\mathrm{M_2}$ de part et d'autre de (AB), la seule configuration, hors cas particuliers ($\mathrm{M_1}$ est sur la droite (AB) et alors $z_1 = \sqrt{2}-1$ et $z_2 = 1+\sqrt{2}$) est celle dans laquelle les triangles $\mathrm{ABM_1}$ et $\mathrm{M_2M_1B}$ sont symétriques par rapport à la médiatrice de $[\mathrm{BM_1}]$ et $\mathrm{AM_1BM_2}$ est un trapèze isocèle avec $\mathrm{AM_1} = \mathrm{BM_2} = \sqrt{2}$, $\mathrm{BM_1} = \sqrt{2}\mathrm{OM_1}$ et $\mathrm{AM_2} = \sqrt{2}\mathrm{OM_2}$.

**b.** À une similitude près le quadrilatère $\mathrm{PO_1QO_2}$ a les mêmes caractéristiques que le quadrilatère $\mathrm{AM_1BM_2}$. On peut donc écrire que $\mathrm{PO_1QO_2}$ est un trapèze isocèle ayant deux côtés de longueur $\sqrt{2}$ et deux diagonales de longueur 2.
(on peut vérifier que tout trapèze ayant ces caractéristiques peut être obtenu comme au a. car un tel trapèze est déterminé par la longueur de sa base et $\mathrm{AM_2} = \sqrt{2}\mathrm{OM_2} = 2|z_2|$. Or $|z_2|$ peut être choisi arbitrairement)

Le point I jouant le rôle du point O du **a**, l'égalité $z_2 = \dfrac{1}{z_1}$ du **a** devient (en utilisant les modules et une similitude) $\mathrm{IO}_1 \times \mathrm{IO}_2 = d^2$. On a de plus, à $2\pi$ près, (en utilisant les arguments et la même similitude) $\left(\overrightarrow{\mathrm{IQ}}, \overrightarrow{\mathrm{IO}_1}\right) = -\left(\overrightarrow{\mathrm{IQ}}, \overrightarrow{\mathrm{IO}_2}\right)$ soit $\left(\overrightarrow{\mathrm{IO}_1}, \overrightarrow{\mathrm{IQ}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{IQ}}, \overrightarrow{\mathrm{IO}_2}\right)$.




Réciproquement, soit M un point de la ligne de niveau $d^2$ de l'application $f : \mathrm{M} \mapsto \mathrm{MO}_1 \cdot \mathrm{MO}_2$. Les relations $\left(\overrightarrow{\mathrm{MO}_1}, \overrightarrow{\mathrm{MX}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{MX}}, \overrightarrow{\mathrm{MO}_2}\right)$ et $\mathrm{MX} = d$ définissent deux points P et Q. On considère alors le plan complexe d'origine M dans le quel P a pour affixe *d*. Si $o_1$ et $o_2$ désignent alors les affixes respectives de $\mathrm{O}_1$ et $\mathrm{O}_2$, on a donc $o_1 o_2 = d^2$. Comme de plus $|o_1 - o_2| = 2d$, on en déduit, en utilisant le a et une similitude de rapport *d,* que $\mathrm{O}_1\mathrm{P} = \mathrm{O}_2\mathrm{Q} = \sqrt{2}d$ c'est-à-dire $\mathrm{P} \in (\mathrm{C}_1)$ et $\mathrm{Q} \in (\mathrm{C}_2)$. Comme $\mathrm{PQ} = 2d$ et M est le milieu de [PQ], M est bien un point du lieu de I.

Par conséquent le lieu de I est bien la ligne de niveau de l'application $f : \mathrm{M} \mapsto \mathrm{MO}_1 \cdot \mathrm{MO}_2$

**Exercice 3**

Soit O le centre et *r* le rayon du cercle $\Gamma$. L'aire S(ABC) est égale à l'aire *t* du quadrilatère AB'OC' privée de l'aire *s* du secteur angulaire OB'C' qui contient le point A'.

Or $t = \mathrm{Aire}(\mathrm{AOB'}) + \mathrm{Aire}(\mathrm{AOC'}) = \dfrac{1}{2} r\,\mathrm{AB'} + \dfrac{1}{2} r\,\mathrm{AC'}$.

Le cercle $\Gamma$ étant exinscrit dans l'angle du triangle de sommet A, on a des angles droits aux points de contact de $\Gamma$ avec les droites (BC), (CA) et (AB). Les triangles OB'A et OC'A sont isométriques (triangles rectangles ayant deux côtés de même longueur). On en déduit que le triangle AB'C' est isocèle en A. On montre de même que les triangles BA'C' et CA'B' sont isocèles respectivement en B et C.

On en déduit que $\mathrm{AB'} = \mathrm{AC} + \mathrm{CB'} = \mathrm{AC} + \mathrm{CA'}$ et $\mathrm{AC'} = \mathrm{AB} + \mathrm{BC'} = \mathrm{AB} + \mathrm{BA'}$

D'où $\mathrm{AB'} + \mathrm{AC'} = \mathrm{AB} + \mathrm{AC} + \mathrm{CA'} + \mathrm{CB'} = \mathrm{AB} + \mathrm{AC} + \mathrm{BC} = p$ et $t = rp$.

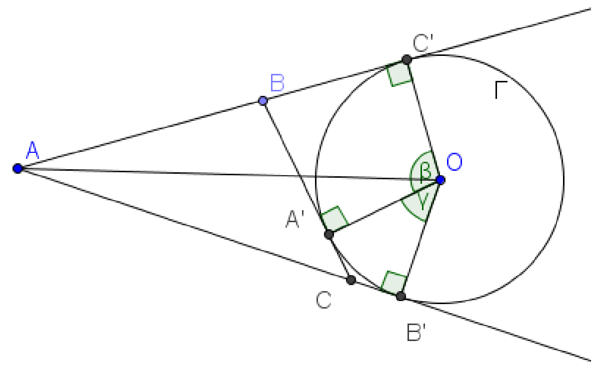
De plus, avec des côtés perpendiculaires deux à deux,

$\widehat{\mathrm{ABC}} = \widehat{\mathrm{C'OA'}}$. De même $\widehat{\mathrm{ACB}} = \widehat{\mathrm{B'OA'}}$.

D'où $s = \dfrac{\beta r^2}{2} + \dfrac{\gamma r^2}{2} = \dfrac{(\beta+\gamma) r^2}{2} = \dfrac{(\pi-\alpha) r^2}{2}$

Donc $\mathrm{S}(\mathrm{ABC}) = \dfrac{1}{2}\left(2pr - (\pi-\alpha) r^2\right)$.

Comme de plus, (OA) est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$, $r = p \tan\dfrac{\alpha}{2}$ et :




$$\mathrm{S}(\mathrm{ABC}) = \frac{1}{2} p^2 \left(2\tan\frac{\alpha}{2} - (\pi-\alpha)\tan^2\frac{\alpha}{2}\right).$$

On pose $x=\dfrac{\alpha}{2}$ et $f(x)=\tan x+\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\tan^2 x$. Alors $\mathrm{S}(\mathrm{ABC})=p^2 f\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

*f* est dérivable sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $f'(x)=\dfrac{1}{\cos^3 x}\left(\cos x\left(1+\sin^2 x\right)+(2x-\pi)\sin x\right)=\dfrac{u(x)}{\cos^3 x}$.

$u'(x)=\cos x\ v(x)$ où $v(x)=3\sin x\cos x+2x-\pi$. Alors $v'(x)=3\cos 2x+2$.

On peut tracer le tableau des variations suivant :

| $X$ | $0$ | $x_3$ | $x_2$ | $x_1$ | | $\dfrac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $v'(x)$ | $5$ | $+$ | | $0$ | $-$ | $-1$ |
| $v(x)$ | $-\pi$ ↗ | | $0$ ↗ | | ↘ | $0$ |
| $u(x)$ | $1$ ↘ | $0$ ↘ | $<0$ ↗ | | | $0$ |
| $f(x)$ | $0$ ↗ | ↘ | | | | |

On en déduit que *f* admet un maximum en $x_3$. On trouve en fait $x_3\approx 33°$ donc $\alpha\approx 66°$.

**Exercice 4**

**a.** On pose $f(\mathrm{M})=\mathrm{MA}^2+\mathrm{MB}^2+\mathrm{MC}^2$. Si G est le centre de gravité du triangle ABC, alors on montre que $f(\mathrm{M})=f(\mathrm{G})+3\mathrm{MG}^2$.

Alors $\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2=\dfrac{1}{2}\left(f(\mathrm{A})+f(\mathrm{B})+f(\mathrm{C})\right)=\dfrac{3}{2}f(\mathrm{G})+\dfrac{3}{2}\left(\mathrm{AG}^2+\mathrm{BG}^2+\mathrm{CG}^2\right)$

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2=3f(G)=3\left(f(O)-3\mathrm{OG}^2\right)=9\left(R^2-\mathrm{OG}^2\right)$$

où $R$ désigne le rayon et O le centre du cercle (C). $\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2$ est donc maximale quand O et G sont confondus, c'est-à-dire ABC est équilatéral.

**b.** Soit G le centre de gravité du quadrilatère ABCD et soit $f(\mathrm{M})=\mathrm{MA}^2+\mathrm{MB}^2+\mathrm{MC}^2+\mathrm{MD}^2$

On montre comme au **a** que $f(\mathrm{M})=f(\mathrm{G})+4\mathrm{MG}^2$ et

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2+\mathrm{AD}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{BD}^2+\mathrm{CD}^2=4f(\mathrm{G})=16\left(R^2-\mathrm{OG}^2\right)$$

où $R$ désigne le rayon et O le centre du cercle (C).

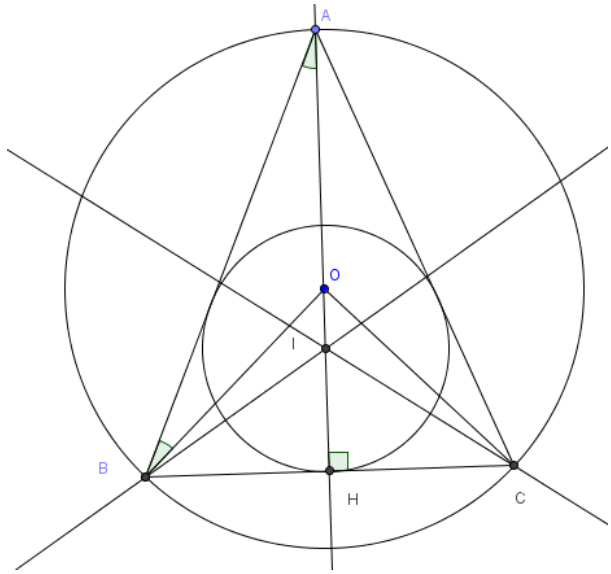
$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2+\mathrm{AD}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{BD}^2+\mathrm{CD}^2$ est donc maximale lorsque O et G sont confondus.

Par associativité du barycentre, si I et J désignent les milieux respectifs de [AB] et [CD], alors O appartient à la droite (IJ) qui est alors la médiatrice commune de [AB] et [CD]. On en déduit que les droites (AB) et (CD) sont parallèles. On montre de même que les droites (AD) et (BC) sont parallèles. Comme de plus O est équidistant des points A, B, C et D, on peut affirmer alors que le quadrilatère ABCD est un rectangle. La réciproque est immédiate.

## Exercice 5

On suppose ABC isocèle en A et on appelle H le pied de la hauteur issue de A et $x$ la distance OI.

Il y a plusieurs cas de figures selon la disposition relative des points O, I et H : soit O est entre I et A, soit I et H sont entre O et A, soit I est entre O et A et H lui, n'est pas entre O et A.




Supposons O entre I et A. En notant u la mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{BAO}}$ on a tout de suite $\sin u = \dfrac{r}{R+x}$ et $\sin \widehat{\mathrm{OBC}} = \dfrac{x+r}{R}$.

Or, comme les triangles ABC et OBC sont isocèles respectivement en A et O, $\widehat{\mathrm{OBC}} = \widehat{\mathrm{ABC}} - u$ et $\widehat{\mathrm{ABC}} = \dfrac{\pi - 2u}{2}$ d'où $\widehat{\mathrm{OBC}} = \dfrac{\pi}{2} - 2u$.

On a donc $\cos 2u = \dfrac{x+r}{R}$ et, comme $\cos 2u = 1 - 2\sin^2 u$, $x$ est solution de l'équation $\dfrac{x+r}{R} = 1 - 2\left(\dfrac{r}{R+x}\right)^2$

Cette équation s'écrit aussi : $x^3 + x^2\left(r+R\right) + xR\left(2r-R\right) + R\left(rR + 2r^2 - R^2\right)$.

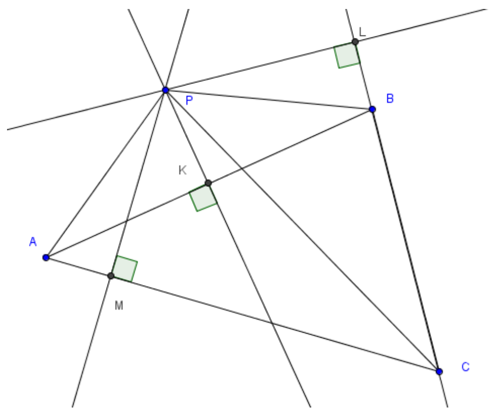
En constatant que $rR + 2r^2 - R^2 = \left(r+R\right)\left(2r-R\right)$, on peut écrire aussi l'équation :

$x^2\left(x+r+R\right) + R\left(2r-R\right)\left(x+r+R\right) = 0$ soit $\left(x+r+R\right)\left(x^2 + R\left(2r-R\right)\right) = 0$.

Comme $x > 0$, on obtient bien $\mathrm{OI} = x = \sqrt{R\left(R-2r\right)}$.

Les 2 autres cas donnent la même équation, $x$ étant changé en $-x$. Comme $x < R$, la solution $-x = -\left(r+R\right)$ est impossible et donc on retrouve $\mathrm{OI} = x = \sqrt{R\left(R-2r\right)}$.

## Exercice 6




D'après le théorème de Pythagore,

$$\begin{cases} \mathrm{BL}^2 = \mathrm{PB}^2 - \mathrm{PL}^2 \\ \mathrm{CM}^2 = \mathrm{PC}^2 - \mathrm{PM}^2 \\ \mathrm{AN}^2 = \mathrm{PA}^2 - \mathrm{PN}^2 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \mathrm{CL}^2 = \mathrm{PC}^2 - \mathrm{PL}^2 \\ \mathrm{AM}^2 = \mathrm{PA}^2 - \mathrm{PM}^2 \\ \mathrm{BN}^2 = \mathrm{PB}^2 - \mathrm{PN}^2 \end{cases}.$$

En additionnant ces égalités 3 par 3, on constate que $\mathrm{BL}^2 + \mathrm{CM}^2 + \mathrm{AN}^2 = \mathrm{CL}^2 + \mathrm{AM}^2 + \mathrm{BN}^2$.

D'où $\mathrm{BL}^2 + \mathrm{CM}^2 + \mathrm{AN}^2 = \dfrac{1}{2}\left(\left(\mathrm{BL}^2 + \mathrm{CL}^2\right) + \left(\mathrm{CM}^2 + \mathrm{AM}^2\right) + \left(\mathrm{AN}^2 + \mathrm{BN}^2\right)\right)$.

Soit $a$ un réel positif et f la fonction définie par $f\left(x\right) = x^2 + \left(a-x\right)^2 = 2x^2 - 2ax + a^2$.

La fonction $f$ admet un minimum en $x=\dfrac{a}{2}$. Les quantités $\mathrm{BL}^2+\mathrm{CL}^2$, $\mathrm{CM}^2+\mathrm{AM}^2$ et $\mathrm{AN}^2+\mathrm{BN}^2$ sont donc minimales lorsque L, M et N sont respectivement les milieux des segments [BC], [CA] et [AB], c'est-à-dire lorsque P est le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC.

## Thème 3 : équations

### Exercice 1

- Si $n=1$, l'équation s'écrit $\cos x-\sin x=1$ soit $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ soit $x=2k\pi$ ou $x=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ ($k$ décrivant **Z**).
- Si $n=2$, l'équation s'écrit $\cos^2 x-\sin^2 x=1$. Comme $\cos^2 x+\sin^2 x=1$, on obtient $\cos x=1$ ou $\cos x=-1$ et $\sin x=0$, soit $x=k\pi$.
- Si $n\geqslant 3$, on utilise le résultat suivant : si $0<x<1$, alors $x^{n+1}<x^n$.

Supposons $0<|\cos x|<1$. Alors $0<|\sin x|<1$ d'où $|\cos x|^n<|\cos x|^2$ et $|\sin x|^n<|\sin x|^2$.

On a donc $\cos^n x-\sin^n x\leqslant|\cos x|^n+|\sin x|^n<|\cos x|^2+|\sin x|^2$

Or $|\cos x|^2+|\sin x|^2=\cos^2 x+\sin^2 x=1$.

Donc $\cos^n x-\sin^n x<1$ et l'équation proposée n'a pas de solutions.

Si $n\geqslant 3$, l'équation ne peut admettre des solutions que si $|\cos x|=0$ ou $|\cos x|=1$.

Si $\cos x=0$ alors $\sin x=1$ ou $\sin x=-1$.

Si $\sin x=1$, l'équation s'écrit $-(1)^n=1$, ce qui est impossible.

Si $\sin x=-1$, l'équation s'écrit $-(-1)^n=1$, ce qui n'est possible que si $n$ est impair.

Si $\cos x=1$ alors $\sin x=0$ et l'équation est effectivement vérifiée pour tout entier $n$.

Si $\cos x=-1$ alors $\sin x=0$ et l'équation s'écrit $(-1)^n=1$ et elle n'est vérifiée que si $n$ est pair

Finalement il y a 3 sortes de solutions :

- $n$ est impair et $\cos x=0$ et $\sin x=-1$ soit $x=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$
- $n$ est pair et $\cos x=-1$ et $\sin x=0$ soit $x=\pi+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$
- $n$ est quelconque et $\cos x=1$ et $\sin x=0$ soit $x=2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$

Donc si $n \geqslant 3$, les solutions de l'équation proposée sont

si $n$ est pair : $x = k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$ et si $n$ est impair $x = 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$ ou $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$ (en fait on peut vérifier, voir plus haut, que c'est vrai aussi pour $n = 1$ et $n = 2$)

**Exercice 2**

Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = (x-n)^3 + (x-n+1)^3 + \ldots + x^3 - (x+1)^3 - \ldots - (x+n)^3$.
On a alors, pour tout entier $k$ compris entre 1 et $n$, $(x-k)^3 - (x+k)^3 = -6x^2k - k^3$.
d'où $f(x) = x^3 - 6x^2(1+2+\ldots+n) - (1^3 + 2^3 + \ldots + n^3)$
soit $f(x) = x^3 - 3x^2n(n+1) - \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$ On en déduit que $f'(x) = 3x^2 - 6xn(n+1)$.
Donc $f'(x) > 0$ équivaut à $x(x - 2n(n+1)) > 0$.
On en déduit le tableau de variations de $f$ suivant :

| $X$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2n(n+1)$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | $f(0)$ | $\searrow$ | $f(2n(n+1))$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Or $f(0) = -2(1^3 + 2^3 + \ldots + n^3)$ donc $f(0) < 0$. On en déduit l'existence d'un unique nombre réel $x_n$ tel que $f(x_n) = 0$ et $x_n > n(n+1)$.

De plus, en utilisant l'égalité $f(x) = x^3 - 3x^2n(n+1) - \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$, on peut constater que :

- $f(3n(n+1)) = -\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$ donc $f(3n(n+1)) < 0$
- $f(3n(n+1)+1) = \dfrac{17}{2}n^2(n+1)^2 - 6n(n+1) + 1$ et on peut montrer que $f(3n(n+1)+1) > 0$.

On en déduit que $3n(n+1) < x_n < 3n(n+1)+1$. Ce ne peut être un entier.
Il n'existe donc pas $2n+1$ entiers naturels consécutifs $a_0$, $a_1$, …, $a_{2n}$ rangés dans l'ordre croissant et vérifiant : $a_0^3 + a_1^3 + \ldots + a_n^3 = a_{n+1}^3 + a_{n+2}^3 + \ldots + a_{2n}^3$.

**Exercice 3**

La somme $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ s'annule pour les racines cinquièmes de l'unité qu'on va noter 1, $\omega$, $\omega^2$, $\omega^3$, $\omega^4$ en posant $\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}$.

On a donc $P(1)+\omega Q(1)+\omega^2 R(1)=0 \quad (1)$

$P(1)+\omega^2 Q(1)+\omega^4 R(1)=0 \quad (2)$

$P(1)+\omega^3 Q(1)+\omega R(1)=0 \quad (3)$

$P(1)+\omega^4 Q(1)+\omega^2 R(1)=0 \quad (4)$

En ajoutant membre à membre ces égalités, on obtient $4P(1)-Q(1)-R(1)=0$

En considérant la combinaison $\omega\times(1)+\omega^2\times(2)+\omega^3\times(3)+\omega^4\times(4)$, on obtient $-P(1)-Q(1)-R(1)=0$.

On en déduit que $P(1)=0$.

**Exercice 4**

L'égalité $f(a+b,c)+f(b+c,a)+f(c+a,b)=0$ donne, en prenant $a=b=c$, $f(2a,a)=0$ pour tout réel *a*. Le polynôme *f* est donc factorisable par $x-2y$, c'est-à-dire, il existe un polynôme *g* tel que $f(x,y)=(x-2y)g(x,y)$. La condition (i) entraine que *g* est un polynôme homogène de degré $n-1$.

La condition (iii) donne de plus $g(1,0)=f(1,0)=1$.

On va montrer que si $x+y=1$ alors $f(x,y)=(x-2y)$. On pose $z=x-2y=3x-2$ et $f(x,1-x)=P(x-2(1-x))=P(3x-2)=P(z)$.

En appliquant (ii) à $a=b=\dfrac{x}{2}$ et $c=1-x$, on obtient $f(x,1-x)+f\left(1-\dfrac{x}{2},\dfrac{x}{2}\right)+f\left(1-\dfrac{x}{2},\dfrac{x}{2}\right)=0$

soit $P(z)=f(x,1-x)=-2f\left(1-\dfrac{x}{2},\dfrac{x}{2}\right)=-2P\left(1-\dfrac{x}{2}-2\dfrac{x}{2}\right)=-2P\left(-\dfrac{3x-2}{2}\right)=-2P\left(-\dfrac{z}{2}\right)$ .

On déduit que pour tout entier *k*, $P\left(2^{2k}\right)=2^{2k}$. L'unique polynôme satisfaisant cette condition est $P(z)=z$. On a donc bien $f(x,y)=(x-2y)$ si $x+y=1$.

Si $x+y\neq 0$, alors, comme $\dfrac{x}{x+y}+\dfrac{y}{x+y}=1$, $f(x,y)=(x+y)^n f\left(\dfrac{x}{x+y},\dfrac{y}{x+y}\right)=(x+y)^{n-1}(x-2y)$

Par continuité de *f*, on a, pour tous réels *x* et *y*, $f(x,y)=(x+y)^{n-1}(x-2y)$.

**Exercice 5**

Étude préliminaire : appelons *a*, *b*, *c* et *d* les quatre premiers éléments d'une telle suite. On a : $c=\dfrac{ab}{2a-b}$, puis $d=\dfrac{ab}{3a-2b}$. Une récurrence est possible, qui conduit à $x_n=\dfrac{ab}{(n-1)a-(n-2)b}$ pour le terme de rang *n*. Ce résultat permet de trouver *b* avec *a* et $x_{21}$, puis $x_{15}=\dfrac{10}{1007}$.

**Exercice 6**

On peut commencer par essayer de déterminer les variations du polynôme *P*. On dresse le tableau suivant, dans lequel on a tenu compte du fait que si un polynôme de degré 4 a quatre racines son polynôme dérivé en a trois :

| $x$ | | 0 | | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $P''(x)$ | positif | 0 | négatif | 0 | positif |
| $P'(x)$ | Croissant<br>*Passe du négatif au positif* | $\boxed{p}$ | décroissant<br>*passe du positif au négatif* | $\boxed{p-2}$ | Croissant<br>*Passe du négatif au positif* |
| $P(x)$ | ↘ $m$ ↗ | | M ↘ | | $m'$ ↗ |

Il ressort de cette première étude que $0 < p < 2$ est une condition nécessaire pour que le polynôme *P* ait quatre racines.

Continuer dans cette voie (l'étude des variations) est possible, mais dans un cas comme celui-ci, il faut penser aux *relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme*. En particulier, si *P* a quatre racines, notées *a*, *b*, *c*, *d* telles que $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$, il s'écrit $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$, d'où il ressort que $\begin{cases} a+b+c+d=2 \\ \text{et } ab+bc+cd+da+ac+cd=0 \end{cases}$. On a donc $\begin{cases} (a+b+c+d)^2 = 4 \\ \text{et } ab+bc+cd+da+ac+cd=0 \end{cases}$. Finalement $a^2+b^2+c^2+d^2=4$, ce qui interdit à toute racine d'être supérieure à 2.

**Exercice 7**

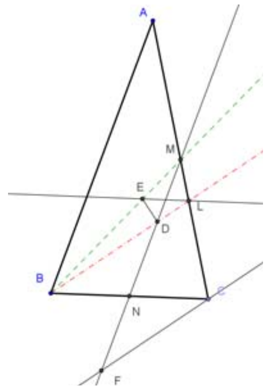
Les nombres *a* et *b* sont des racines de l'équation polynômiale $x^4 - 90x^2 + x + 2\,004 = 0$, les nombres *c* et *d* sont des racines de $x^4 - 90x^2 - x + 2\,004 = 0$. On remarque que si un nombre est solution de la première équation, son opposé est solution de la seconde. Mais les deux équations n'ont pas de solution commune (la seule envisageable est 0, mais elle ne convient pas). Les solutions de la première équation sont donc *a*, *b*, $-c$, $-d$. Leur produit est 2 004 (cela peut se trouver même sans connaître les relations entre les coefficients et les racines. D'où le résultat.

## Pépinière de mathématiques février 2011 – Éléments de solution (2)

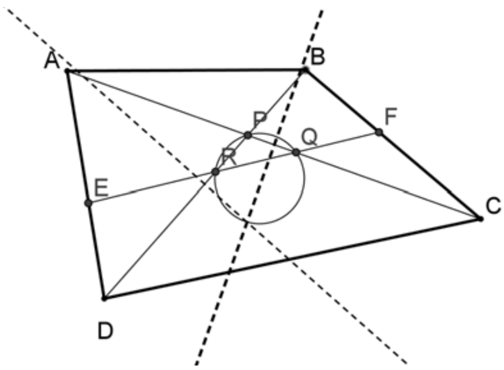
### Thème 4 : géométrie des transformations

**Exercice 1**

L'homothétie $h$ de centre M qui transforme E en B transforme aussi L en C (parallélisme). L'image de D par $h$ appartient à la droite (MD) et à la parallèle à (LD) passant par C. C'est donc le point F. La droite (MF) coupe (BC) en son milieu N.Les parallélismes fournissent les égalités d'angles $\widehat{\mathrm{ABL}} = \widehat{\mathrm{NFC}}$ et $\widehat{\mathrm{LBC}} = \widehat{\mathrm{NCF}}$. Les premiers cités dans chaque égalité sont eux aussi égaux. Le triangle NCF est donc isocèle de sommet principal N. Et comme N est le milieu de [BC] on en déduit que le triangle BFC est rectangle en F. Ce triangle étant l'image de EDL par $h$, il s'ensuit que EDL est rectangle en D, ce qu'il fallait démontrer.




**Exercice 2**




Il existe une unique similitude (qui ici est une rotation) qui transforme A en C et D en B. Appelons O son centre (intersection des médiatrices de [AC] et [BD]). D'après une propriété des similitudes, les projetés orthogonaux de O sur (AC), (BD), (AD) et (BC) sont alignés.

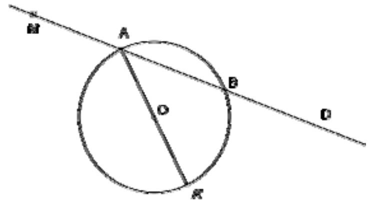
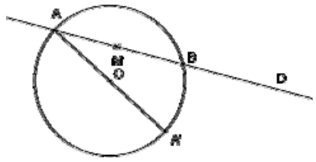
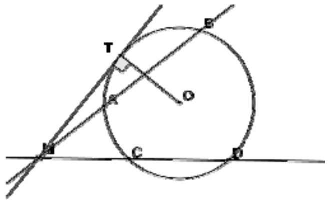
La même transformation transforme aussi E en F. La droite précédente passe aussi par le projeté orthogonal de O sur (EF). Les autres sont déjà cités.

Il s'ensuit que les projetés orthogonaux de O sur (PQ), (QR) et (RP) sont alignés. Cette propriété caractérise O comme point du cercle circonscrit au triangle PQR (et la droite sur laquelle ils sont comme droite de Simson).

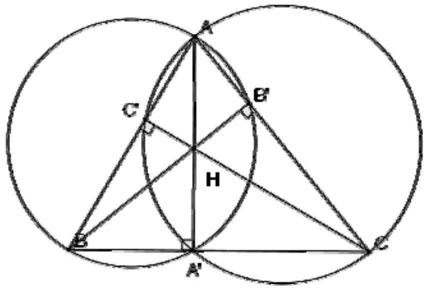
**Exercice 3 Puissance d'un point par rapport à un cercle**

Soit Γ un cercle de centre O et de rayon $R$, M un point quelconque du plan et D une droite passant par M rencontrant le cercle Γ en A et B. On appelle A′ le point de Γ diamétralement opposé à A.

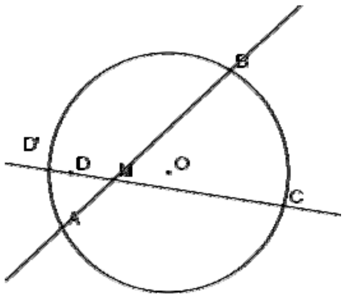
Remarquons tout d'abord que $\mathrm{MO}^2 = \overrightarrow{\mathrm{MO}}^2$ , $R^2 = \overrightarrow{\mathrm{OA}}^2$ .et que $\overrightarrow{\mathrm{OA'}} = -\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ Donc :
$\mathrm{MO}^2 - R^2 = \left(\overrightarrow{\mathrm{MO}} + \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right).\left(\overrightarrow{\mathrm{MO}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)$, ou encore $\mathrm{MO}^2 - R^2 = \left(\overrightarrow{\mathrm{MO}} + \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right).\left(\overrightarrow{\mathrm{MO}} + \overrightarrow{\mathrm{OA'}}\right)$
$\mathrm{MO}^2 - R^2 = \overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MA'}}$ . Or B est le projeté orthogonal de A' sur (MA) (car le triangle AA'B est rectangle en B et M est un point de (AB)). Donc $\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MA'}} = \overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MB}}$. En conclusion : $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MB}} = \mathrm{MO}^2 - R^2}$.
Le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MB}}$ ne dépend donc que de la distance MO et du rayon du cercle Γ.
Remarque : Si la droite D est tangente au cercle Γ en T (alors A = B = T), on a : $\mathrm{MT}^2 = \mathrm{MO}^2 - R^2$.

| | | |
|---|---|---|
|  |  |  |
| $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ | $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ | $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} = MT^2 = MO^2 - R^2$ |

1. On pose $P_\Gamma(M) = MO^2 - R^2$
   $P_\Gamma(M) = 0$ équivaut à MO = R. L'ensemble des points M tels que $P_\Gamma(M) = 0$ est le cercle Γ.
   $P_\Gamma(M) < 0$ équivaut à MO < R. L'ensemble des points M tels que $P_\Gamma(M) < 0$ est le disque ouvert de frontière Γ. L'ensemble des points M tels que $P_\Gamma(M) > 0$ est l'extérieur du disque fermé de frontière Γ.
2. **Application** : On considère un triangle ABC d'orthocentre H ; Soit A', B' et C' les pieds des hauteurs de ce triangle, respectivement issues de A, B et C.




   Les triangles AB'B et AA'B sont rectangles respectivement en B' et A'. Ils sont donc inscriptibles dans le cercle de diamètre [AB]. Considérons la puissance du point H par rapport à ce cercle :
   $P_\Gamma(H) = \overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HA'} = \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HB'}$ . Puisque H, B, B' d'une part et H, A, A' d'autre part sont alignés, on en déduit que :
   $HB \times HB' = HA \times HA'$ .
   De même, les points A, A', C, C' appartiennent au cercle de diamètre [AC] d'où : HA × HA' = HC × HC'.
   En conclusion : HA × HA' = HB × HB' = HC × HC'
3. Soit quatre points A, B, C et D, dont trois d'entre eux ne sont pas alignés et tels que (AB) et (CD) se coupent en M.
   D'après 1, si les points A, B, C, D sont cocycliques, on a $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}$ .
   *<u>Réciproquement</u>* : Supposons que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}$ et que les trois points A, B et C ne sont pas alignés. On peut donc considérer le cercle Γ circonscrit au triangle ABC. Soit D' le deuxième point d'intersection de la droite (CD) avec Γ.




   Alors $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD'}$ . On en déduit que $\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD'}$ .
   D'où : $\overrightarrow{MC}.\left(\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MD'}\right) = 0$ soit $\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{DD'} = 0$
   Si l'on suppose D ≠ D', alors : $\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{DD'} = 0 \Rightarrow (MC) \perp (DD')$ .
   Ce qui est absurde puisque D et D' sont deux points de (MC). Donc D = D' et $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}$

**En conclusion :** Soit quatre points A, B, C et D, dont trois d'entre eux ne sont pas alignés et tels que (AB) et (CD) se coupent en M. A, B, C, D sont cocycliques si, et seulement si $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}$ .

**Exercice 4 Inversion géométrique**

1. a) $f$(M) est le point M' de (OM) tel que $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} = k$ et $f(f$(M)) est le point M'' de (OM') tel que $\overrightarrow{OM'}.\overrightarrow{OM''} = k$ . M' et M'' sont donc deux points de (OM) tels que $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM'}.\overrightarrow{OM''}$ .
   D'où $\overrightarrow{OM'}.\left(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM''}\right) = 0$. Par un raisonnement analogue à celui de l'exercice 1 (question 3), on établit que M = M''. Donc, $\boxed{\text{pour tout point M de P* : } f(f(\text{M})) = \text{M}}$.

b) Les points invariants de $f$ sont les points M de P* tels que $f$(M) = M ce qui équivaut à $\overline{\mathrm{OM}}^2 = k$.
Si $k \leq 0$ , $f$ n'admet aucun point invariant.
Si $k > 0$ , $\overline{\mathrm{OM}}^2 = k \Leftrightarrow \mathrm{OM} = \sqrt{k}$ .

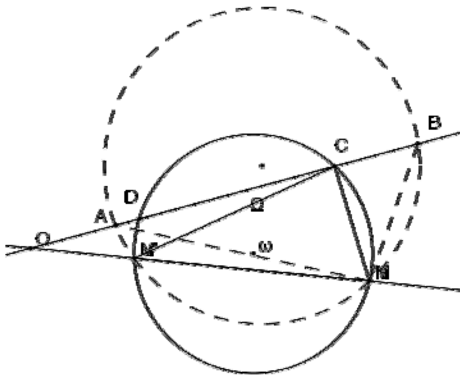
$\boxed{\text{L'ensemble des points invariants de } f \text{ est donc le cercle de centre O et de rayon } \sqrt{k}}$.

2. Soit O, A et B trois points alignés du plan deux et deux distincts. Construisons l'image D de C par l'inversion de pôle O qui transforme A en B.

Par définition de l'inversion de pôle O qui transforme A en B et C en D, on a : $\overrightarrow{\mathrm{OA}}.\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}.\overrightarrow{\mathrm{OD}}$

<u>Premier cas</u> : Supposons que le point C n'appartienne pas à la droite (OA). Les points A, B, C et D sont donc cocycliques et D est le deuxième point d'intersection de (OC) avec le cercle circonscrit au triangle ABC.

<u>Deuxième cas</u> : Si le point C appartient à la droite (OA) (figure ci-contre), on construit tout d'abord l'image M' d'un point M n'appartenant pas à la droite (OA) à l'aide du cercle circonscrit triangle ABM. l'image D du point C est alors le deuxième point d'intersection de la droite (OC) avec le cercle circonscrit au triangle CMM'.

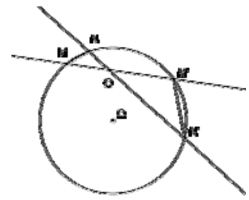



3. Soit M et N deux points du plan, M' et N' leurs images par l'inversion $f$ de pôle O et de rapport $k$. Exprimons la distance M'N' en fonction de $k$, MN, OM et ON.

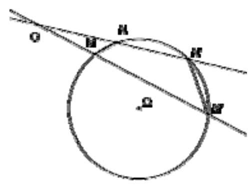
$\begin{cases} \mathrm{M}' \in (\mathrm{OM}) \\ \overrightarrow{\mathrm{OM}}.\overrightarrow{\mathrm{OM}'} = k \end{cases}$ et $\begin{cases} \mathrm{N}' \in (\mathrm{ON}) \\ \overrightarrow{\mathrm{ON}}.\overrightarrow{\mathrm{ON}'} = k \end{cases}$ .On en déduit que OM × OM' = ON × ON' = $|k|$.

*Premier cas* : N n'appartient pas à la droite (OM). Alors les points M, M', N, N' sont cocycliques et les triangles OMN et ON′M′ sont semblables car $\widehat{\mathrm{NOM}} = \widehat{\mathrm{N'OM'}}$ (angles opposés par le sommet si $k < 0$ ou communs si $k > 0$) et $\widehat{\mathrm{MNO}} = \widehat{\mathrm{OM'N'}}$ ( si $k < 0$, $\widehat{\mathrm{MNO}}$ et $\widehat{\mathrm{OM'N'}}$ interceptent le même arc d'extrémités M et N' , si $k > 0$, on a $\widehat{\mathrm{MNO}} = \pi - \widehat{\mathrm{MNN'}}$, or $\widehat{\mathrm{MNN'}} = \pi - \widehat{\mathrm{MM'N'}}$ car $\widehat{\mathrm{MNN'}}$ et $\widehat{\mathrm{MM'N'}}$ sont deux angles opposés du quadrilatère inscriptible MNN'M' et $\widehat{\mathrm{MNN'}} = \pi - \widehat{\mathrm{OM'N'}}$ .

On en déduit que : $\dfrac{\mathrm{OM}}{\mathrm{ON'}} = \dfrac{\mathrm{MN}}{\mathrm{M'N'}} = \dfrac{\mathrm{ON}}{\mathrm{OM'}}$. D'où $\mathrm{M'N'} = \mathrm{MN} \times \dfrac{\mathrm{ON'}}{\mathrm{OM}}$. Or $\mathrm{ON'} = \dfrac{|k|}{\mathrm{ON}}$.



$k < 0$

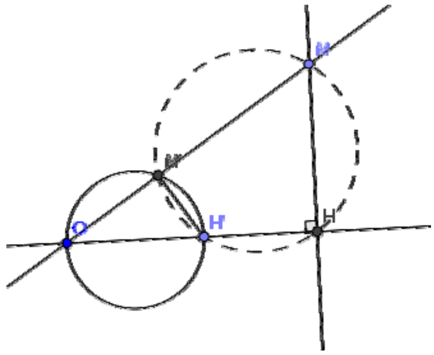


$k > 0$

Par conséquent : $\boxed{\mathrm{M'N'} = \dfrac{|k|\,\mathrm{MN}}{\mathrm{OM} \times \mathrm{ON}}}$

*Deuxième cas* : Si N est un point de (OM), $\overline{\mathrm{M'N'}} = \overline{\mathrm{ON'}} - \overline{\mathrm{OM'}} = \dfrac{k}{\overline{\mathrm{ON}}} - \dfrac{k}{\overline{\mathrm{OM}}}$ (on considère ici les mesures algébriques)soit $\overline{\mathrm{M'N'}} == \dfrac{k\left(\overline{\mathrm{OM}} - \overline{\mathrm{ON}}\right)}{\overline{\mathrm{OM}} \times \overline{\mathrm{ON}}} = \dfrac{-k\overline{\mathrm{MN}}}{\overline{\mathrm{OM}} \times \overline{\mathrm{ON}}}$ d'où $\mathrm{M'N'} = \dfrac{|k|\,\mathrm{MN}}{\mathrm{OM} \times \mathrm{ON}}$.

a) *Image d'une droite* : Soit $\Delta$ une droite ne passant pas par O et H le projeté orthogonal de O sur $\Delta$. Soit M un point de $\Delta$ distinct de H. Démontrons que son image M' par *f* appartient au cercle de diamètre [OH'] où H' désigne l'image de H par *f*. Puisque *f* (H) = H' et *f* (M) = M' et que M, H et H' ne sont pas alignés; les points M, M', H et H' sont cocycliques. Les deux triangles H'M'M et H'HM sont donc inscrits dans un même cercle et, puisque $\widehat{\text{H'HM}} = \frac{\pi}{2}$, [H'M] est un diamètre de ce cercle. On en déduit que $\widehat{\text{H'M'M}} = \frac{\pi}{2}$.




D'où $\widehat{\text{OM'H'}} = \frac{\pi}{2}$. M' appartient donc au cercle de diamètre [OH']. On a donc $f(\Delta) \subset \Gamma$.

Démontrons que $f(\Delta)=\Gamma$.

On a vu que tout point image d'un point de $\Delta$ par *f* appartient à $\Gamma$. Montrons que tout point de $\Gamma$ est image d'un point de $\Delta$ :

Soit N' un point du cercle de diamètre (OH'] distinct de O. Les droite (OM') et $\Delta$ sont donc sécantes (sinon (O'N') serait perpendiculaire à (OH') en O. Elle serait donc tangente au cercle de diamètre [OH'], ce qui est absurde puisque N' est un point de ce cercle, distinct de O). Soit N le point d'intersection des droites (ON') et $\Delta$. On sait que l'image de N par *f* appartient au cercle de diamètre [OH'] et à (ON) donc N' = *f* (N).

b) *Image d'un cercle* :

Soit $\Gamma$ un cercle passant par le pôle d'inversion, K le point de $\Gamma$ diamétralement opposé à O, K' = *f*(K) et $\Delta$ la droite passant par K' et perpendiculaire à (OK).

D'après la question 4. a), on a $f(\Delta)=\Gamma$ et, comme *f* est involutive, on en déduit que $f(\Gamma)=\Delta$.

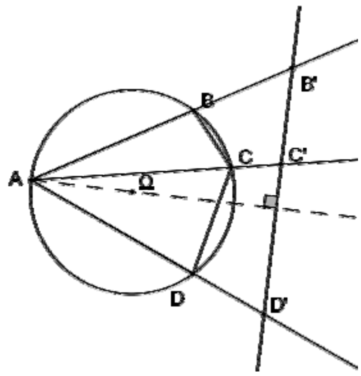
**Exercice 5 Théorème de Ptolémée**

Soit ABCD un quadrilatère convexe.

Supposons que ce quadrilatère soit inscriptible dans un cercle $\Gamma$.

Considérons l' inversion *f* de pôle A et de rapport 1. L'image par *f* de $\Gamma$ est une droite. Donc trois points de $\Gamma$ ont pour images trois points alignés.

Puisque B ; C et D sont trois points de $\Gamma$ dans cet ordre , les points B', C' et D' sont alignés dans cet ordre. Donc : B'D' = B'C' + C'D'.




Or $\text{B'C'} = \dfrac{\text{BC}}{\text{AB}\times\text{AC}}$, $\text{C'D'} = \dfrac{\text{CD}}{\text{AC}\times\text{AD}}$ et $\text{B'D'} = \dfrac{\text{BD}}{\text{AB}\times\text{AD}}$.

D'où : $\dfrac{\text{BD}}{\text{AB}\times\text{AD}} = \dfrac{\text{BC}}{\text{AB}\times\text{AC}} + \dfrac{\text{CD}}{\text{AC}\times\text{AD}}$.

En multipliant les deux membres par $\text{AB}\times\text{AD}\times\text{AC}$, on en déduit que : $\text{BD}\times\text{AC} = \text{BC}\times\text{AD}+\text{CD}\times\text{AB}$.

<u>*Réciproquement*</u>

Soit ABCD un quadrilatère convexe tel que $\text{BD}\times\text{AC} = \text{BC}\times\text{AD}+\text{CD}\times\text{AB}$.

En divisant les deux membres de cette égalité par $\text{AB}\times\text{AD}\times\text{AC}$, on obtient :

$$\frac{BD}{AB\times AD}=\frac{BC}{AB\times AC}+\frac{CD}{AC\times AD}\ (1)$$

Considérons l'inversion $f$ de pôle A et de rapport 1, qui transforme B en B', C en C' et D en D'. On a donc $B'C'=\frac{BC}{AB\times AC}$, $C'D'=\frac{CD}{AC\times AD}$ et $B'D'=\frac{BD}{AB\times AD}$. En remplaçant dans (1) $\frac{BC}{AB\times AC}$ par B'C', $\frac{CD}{AC\times AD}$ par C'D' et $\frac{BD}{AB\times AD}$ par B'D', il vient : B'D' = B'C' + C'D'.

Les points B', C' et D' sont donc alignés. Comme $f$ est involutive, B, C et D sont les images par $f$ de B', C' et D'. Ils appartiennent donc à l'image par $f$ de la droite Δ contenant B', C' et D'. Or $f$(Δ) est un cercle passant par A. Les points B, C et D appartiennent donc à ce cercle. On en déduit que le quadrilatère ABCD est inscriptible.

**Exercice 6 Une formule pour calculer des aires planes**

**1.** Soit D la droite d'intersection des plans P et $P_0$, A et B des points de D, C un point de P, C' le projeté orthogonal de C sur le plan $P_0$ et enfin H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

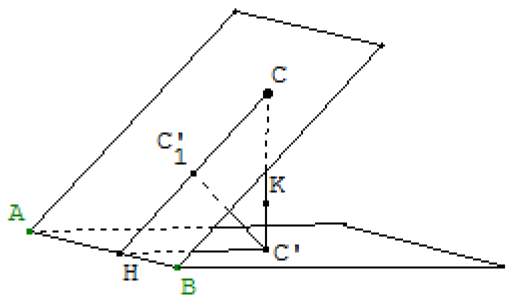
**(a)** Montrons que H est le projeté orthogonal de C' sur la droite (AB).
La droite (CH) est orthogonale à (AB).

La droite (CC') est orthogonale à toute droite contenue dans le plan $P_0$ donc (CC') est orthogonale à (AB).

$$\left.\begin{matrix}(AB)\perp(CC')\\(AB)\perp(CH)\end{matrix}\right\}\Rightarrow(AB)\perp(CC'H)\Rightarrow(AB)\perp(C'H).$$

**(b)** Soit $C'_1$ le pied de la hauteur issue de C' dans le triangle CC'H.
(AB) est orthogonale au plan (CC'H) donc (AB) est orthogonale à (C' $C'_1$).

$$\left.\begin{matrix}(AB)\perp(C'C'_1)\\(CH)\perp(C'C'_1)\end{matrix}\right\}\Rightarrow(C'C'_1)\perp P$$ (puisque P est le plan qui contient les points A, B, C et H).




$\vec{n}$ et $\overrightarrow{C'C'_1}$ sont donc colinéaires.

Puisque la droite (CC') est orthogonale au plan $P_0$ de vecteur normal $\vec{k}$, $\vec{k}$ et $\overrightarrow{C'C}$ sont colinéaires.

Le rapport de projection orthogonale de (CC') sur C' $C'_1$ est donc |cos γ| et comme $C'_1$ est le projeté orthogonal de C' sur (HC), C' $C'_1$ = |cos γ| × C'C.

Dans le plan (CC'H), $\widehat{CC'C'_1}=\widehat{C'HC}$ (car (CC') ⊥(C'H), (C' $C'_1$) ⊥ (CH)) donc le rapport de projection orthogonale de (CH) sur (C'H) est |cos γ|.

C' est le projeté orthogonal de C sur (HC') donc $\boxed{C'H = |\cos\gamma|\ CH}$.

2 × aire (ABC) = CH × AB et 2 × aire (ABC') = C'H × AB donc $\boxed{S' = |\cos\gamma| \times S}$.

## Thème 5 : fonctions

**Exercice 1**

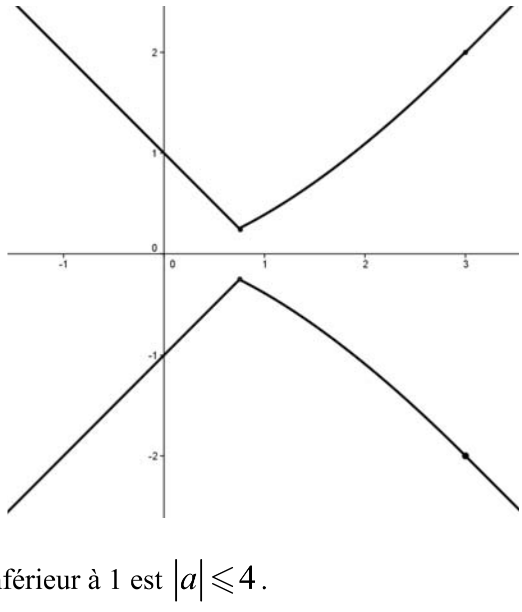
1. L'étude du signe de la fonction dérivée de $f_\alpha$ conduit aux résultats suivants concernant les variations de $f_\alpha$ :

- si $\alpha \leqslant 0$, $f_\alpha$ est monotone croissante (et continue, bien sûr) et l'image de $[-1,1]$ est $[\alpha-1, 1-\alpha]$.
- si $\alpha \geqslant 0$, $f_\alpha$ suit le tableau de variation :

| $x$ | | $-\sqrt{\frac{\alpha}{3}}$ | | $\sqrt{\frac{\alpha}{3}}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_\alpha'(x)$ | positif | 0 | négatif | 0 | positif |
| $f_\alpha(x)$ | $\nearrow$ | $\frac{2\alpha}{3}\sqrt{\frac{\alpha}{3}}$ | $\searrow$ | $-\frac{2\alpha}{3}\sqrt{\frac{\alpha}{3}}$ | $\nearrow$ |

Comparons $\sqrt{\frac{\alpha}{3}}$ et 1 : Si $1 \leqslant \sqrt{\frac{\alpha}{3}}$, c'est-à-dire si $\alpha \geqslant 3$, la fonction $f_\alpha$ est monotone sur l'intervalle $[-1,1]$ et l'image de $[-1,1]$ est $[1-\alpha, \alpha-1]$

Si $1 > \sqrt{\frac{\alpha}{3}}$, le maximum et le minimum relatifs de $f_\alpha$ sont atteints en des réels de $[-1,1]$. Il faut comparer $\frac{2\alpha}{3}\sqrt{\frac{\alpha}{3}}$ et $1-\alpha$. L'inéquation $1-\alpha \leqslant \frac{2\alpha}{3}\sqrt{\frac{\alpha}{3}}$ s'écrit $2\beta^3 + 3\beta^2 - 1 \geqslant 0$ en posant $\beta = \sqrt{\frac{\alpha}{3}}$. Mais $2\beta^3 + 3\beta^2 - 1 = 2(\beta+1)^2\left(\beta - \frac{1}{2}\right)$ et donc ce n'est que pour $\alpha \geqslant \frac{3}{4}$ que l'image de $[-1,1]$ diffère de $[1-\alpha, \alpha-1]$, étant égale à $\left[-2\frac{\alpha}{3}\sqrt{\frac{\alpha}{3}}, 2\frac{\alpha}{3}\sqrt{\frac{\alpha}{3}}\right]$.




2. On a vu que pour $\alpha = \frac{3}{4}$, l'image du segment $[-1,1]$ est $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$.

3. On connaît une condition nécessaire pour rendre $\left|x^3 + \frac{b}{a}x\right|$ inférieur à $\frac{1}{4}$. Une condition nécessaire pour rendre $|a|\left|x^3 + \frac{b}{a}x\right|$ inférieur à 1 est $|a| \leqslant 4$.

4. Si, pour tout $x$ de $[-1,1]$, $P(x)$ est dans $[-1,1]$, alors $\frac{1}{2}(P(x)+P(-x))$ l'est, et on est ramené au problème précédent.

**Exercice 2**

1. Si la fonction $f_n$ ne prend pas la valeur 0 sur $[0,1]$, comme elle est continue, elle a donc un signe constant. Supposons qu'elle est strictement positive. Mais alors

$$\sum_{k=0}^{n-1} f_n\left(\frac{k}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0) + f\left(\frac{2}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) + ... - f\left(\frac{n-2}{n}\right) + f(1) - f\left(\frac{n-1}{n}\right) = f(1) - f(0) = 0$$

Ce qui ne se peut pas pour une somme de nombres strictement positifs.

2. Calculons

$$f(x+\alpha) - f(x) = \cos\left(\frac{2\pi(x+\alpha)}{\alpha}\right) - (x+\alpha)\left(\cos\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right) - 1\right) - \cos\left(\frac{2\pi x}{\alpha}\right) + x\left(\cos\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right) - 1\right)$$

$$f(x+\alpha) - f(x) = -(\alpha)\left(\cos\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right) - 1\right)$$

Ce dernier résultat est non nul si $\alpha$ n'est pas l'inverse d'un naturel.

**Exercice 3**

On commence par remarquer que $f(n+1) \geqslant 1$, puisque $f(f(n)) \geqslant 0$. Étudions la fonction $g$ définie sur **N** par $g(n) = f(n+1) - 1$.

On trouve successivement (en s'autorisant des calculs enchaînés, ce qui n'est pas beau) :

$g(n) = f(n+1) - 1 > f(f(n)) - 1 = f(g(n-1)+1) - 1 = g(g(n-1)) + 1 - 1$

Ce qui prouve que si la fonction $f$ est solution du problème, la fonction $g$ l'est aussi.

On a en particulier $g(n+1) \geqslant 1$ et donc $f(n+2) - 1 \geqslant 1$, ou encore $f(n+2) \geqslant 2$. On montrerait par récurrence que pour tout $k$ entier, $f(n+k) \geqslant k$. Ce qui conduit à $f(k) \geqslant k$ pour tout $k$.

De là on déduit que la fonction $f$ est croissante, car $f(n+1) > f(f(n)) \geqslant f(n)$.

Cette dernière écriture, une fois qu'on a enregistré qu'elle prouve la croissance de $f$, montre aussi que pour tout $n$ : $n+1 > f(n) \geqslant n$.

Il ne reste plus que l'identité, $f(n) = n$, qui convient.

**Exercice 4**

Commençons par supposer $f(0) \geqslant f(1)$. Il s'ensuit que $\begin{array}{l} f(2) \leqslant 2f(1) - f(0) \\ f(2) \leqslant f(1) + (f(1) - f(0)) \end{array}$, ce qui prouve que $f(1) \geqslant f(2)$. On peut alors faire un raisonnement par récurrence qui prouve que la suite des $f(n)$, définie sur **N**, est décroissante. Comme elle est minorée, elle converge.

Mais on a aussi, pour tout $n$, $f(n) - f(n+1) \geqslant f(n-1) - f(n)$, qui prouve que les écarts entre deux termes consécutifs de cette suite sont croissants. Contradiction. Ils sont constants et nuls.

Le cas $f(0) \leqslant f(1)$ se traite de la même manière en étudiant la suite des $f(-n)$.

**Exercice 5**
Voir éléments de solution Pépinière décembre 2010

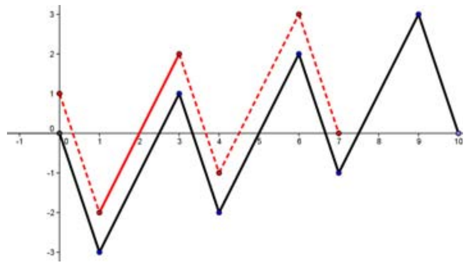
**Exercice 6**

Considérons la fonction $g$ définie sur $\left[0,\frac{7}{10}\right]$ par $g(x)=f\left(x+\frac{3}{10}\right)-f(x)$. Cette fonction est continue et ne prend pas la valeur 0. Elle est donc de signe constant. Considérons qu'elle est positive.

Cette positivité se traduit par $0<f\left(\frac{3}{10}\right)<f\left(\frac{6}{10}\right)<f\left(\frac{9}{10}\right)$ et $f\left(\frac{1}{10}\right)<f\left(\frac{4}{10}\right)<f\left(\frac{7}{10}\right)<0$

Le théorème des valeurs intermédiaires permet de localiser un zéro au moins de *f* chaque fois qu'il y a changement de signe, donc cinq zéros, plus 0 et 1, soit 7.

Graphiquement, on cherche une fonction telle que, par exemple $f\left(x+\frac{3}{10}\right)-f(x)=1$



**Exercice 7** Soit $x$ un élément de l'intervalle $[0,2[$. Calculons $f(x+2)=f(xf(2))f(2)=0$. On en déduit que les fonctions cherchées sont nulles sur $[2,+\infty[$.
Considérons des éléments x et $y$ de $[0,2[$. La condition $f(xf(y))f(y)=0$ est équivalente à $xf(y)\leqslant 2$.
D'après l'égalité donnant le problème, elle est aussi équivalente à $f(x+y)=0$, c'est-à-dire $x\leqslant 2-y$.

On a donc $\frac{2}{f(y)}=2-y$, qui définit la fonction *f*. Reste à montrer que cette fonction est bien solution du problème.

## Thème 6 : suites et arithmétique

**Exercice S1**
La suite $(u_n)_{n\in N}$ est entièrement définie par la donnée de $u_0$, $u_1$ et la relation de récurrence :
Pour tout $n$ entier naturel, $u_{n+2}=|u_{n+1}|-u_n$

Calculons les premiers termes de cette suite en envisageant les différents cas de valeurs initiales.
*Premier cas* : $u_0\leq 0$ et $u_1\leq 0$

| *Calculs* | Signe de $u_n$ | Expression de $u_n$ en fonction de $u_0$ et $u_1$ |
|---|---|---|
| $u_2=\lvert u_1\rvert-u_0=-u_1-u_0$<br>$-u_1\geq 0$ et $-u_0\geq 0$ | $u_2\geq 0$ | $u_2=-u_1-u_0$ |
| $u_3=u_2-u_1$<br>$u_2\geq 0$ et $-u_1\geq 0$ | $u_3\geq 0$ | $u_3=-2u_1-u_0$ |
| $u_4=u_3-u_2$<br>$u_4=-2u_1-u_0+u_1+u_0=-u_1$ | $u_4\geq 0$ | $u_4=-u_1$ |
| $u_5=u_4-u_3$<br>$u_5=-u_1+2u_1+u_0=u_1+u_0$ | $u_5\leq 0$ | $u_5=u_1+u_0$ |

| | | |
|---|---|---|
| $u_6 = -u_5 - u_4$<br>$u_6 = -u_1 - u_0 + u_1 = -u_0$ | $u_6 \geq 0$ | $u_6 = -u_0$ |
| $u_7 = u_6 - u_5$<br>$u_7 = -u_0 - u_1 - u_0 = -2u_0 - u_1$ | $-2u_0 \geq 0$ et $-u_1 \geq 0$<br>donc $u_7 \geq 0$ | $u_7 = -2u_0 - u_1$ |
| $u_8 = u_7 - u_6$<br>$u_8 = -2u_0 - u_1 + u_0 = = -u_0 - u_1$ | $u_8 \geq 0$ | $u_8 = -u_0 - u_1$ |
| $u_9 = u_8 - u_7$<br>$u_9 = -u_0 - u_1 + 2u_0 + u_1 = u_0$ | $u_9 \leq 0$ | $u_9 = u_0$ |
| $u_{10} = -u_9 - u_8$<br>$u_{10} = -u_0 + u_0 + u_1 = u_1$ | $u_{10} \leq 0$ | $u_{10} = u_1$ |

Démontrons par récurrence que si $u_0 \leq 0$ et $u_1 \leq 0$, alors, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+9} = u_n$.
$u_9 = u_0$ et $u_{10} = u_1$ : La propriété est donc vérifiée pour $n = 0$ et $n = 1$.
Soit $n$ un entier donné supérieur ou égal à 2. Supposons que la propriété soit vraie jusqu'au rang $n$.
Alors $u_{n+10} = |u_{n+9}| - u_{n+8}$. Or $u_{n+9} = u_n$ et $u_{n+8} = u_{n-1}$. Donc $u_{n+10} = |u_n| - u_{n-1}$ d'où $u_{n+10} = u_{n+1}$.
La propriété est donc vérifiée au rang $n + 1$.
En conclusion : Pour tout entier naturel $n$, $u_{n+9} = u_n$.

*Deuxième cas* : $u_0 \leq 0 \leq u_1$.

| *Calculs* | Signe de $u_n$ | Expression de $u_n$ en fonction de $u_0$ et $u_1$ |
|---|---|---|
| $u_2 = u_1 - u_0$<br>$u_1 \geq 0$ et $-u_0 \geq 0$ | $u_2 \geq 0$ | $u_2 = u_1 - u_0$ |
| $u_3 = u_2 - u_1$<br>$u_2 \geq 0$ et $-u_1 \geq 0$<br>$u_3 = u_1 - u_0 - u_1 = -u_0$ | $u_3 \geq 0$ | $u_3 = -u_0$ |
| $u_4 = u_3 - u_2$<br>$u_4 = -u_0 - u_1 + u_0 = -u_1$ | $u_4 \leq 0$ | $u_4 = -u_1$ |
| $u_5 = -u_4 - u_3$<br>$u_5 = u_1 + u_0$ | Si $0 \leq -u_0 \leq u_1$ alors $u_1 + u_0 \geq 0$ donc $u_5 \geq 0$.<br>Si $0 \leq u_1 \leq -u_0$ alors $u_1 + u_0 \leq 0$ donc $u_5 \leq 0$ | $u_5 = u_1 + u_0$ |

a) $0 \leq -u_0 \leq u_1$ alors $u_5 \geq 0$

| *Calculs* | Signe de $u_n$ | Expression de $u_n$ en fonction de $u_0$ et $u_1$ |
|---|---|---|
| $u_6 = u_5 - u_4$<br>$u_6 = u_1 + u_0 + u_1 = 2u_1 + u_0$ | $2u_1 \geq -2u_0$ donc<br>$2u_1 + u_0 \geq -u_0 \geq 0$ | $u_6 = 2u_1 + u_0$ |
| $u_7 = u_6 - u_5$<br>$u_7 = 2u_1 + u_0 - u_1 - u_0 = u_1$ | $u_7 \geq 0$ | $u_7 = u_1$ |
| $u_8 = u_7 - u_6$<br>$u_8 = u_1 - 2u_1 - u_0 = -u_1 - u_0$ | $u_1 + u_0 \geq 0$ donc<br>$-u_1 - u_0 \leq 0$ : $u_8 \leq 0$. | $u_8 = -u_1 - u_0$ |
| $u_9 = -u_8 - u_7$<br>$u_9 = u_1 + u_0 - u_1 = u_0$ | $u_9 \leq 0$ | $u_9 = u_0$ |
| $u_{10} = -u_9 - u_8$<br>$u_{10} = -u_0 + u_0 + u_1 = u_1$ | $u_{10} \geq 0$ | $u_{10} = u_1$ |

b) $0 \leq u_1 \leq -u_0$ alors $u_5 \leq 0$

| *Calculs* | Signe de $u_n$ | Expression de $u_n$ en fonction de $u_0$ |
|---|---|---|

| | | |
|---|---|---|
| | | et $u_1$ |
| $u_6 = - u_5 - u_4$<br>$u_6 = - u_1 - u_0 + u_1 = - u_0$ | $u_6 \geq 0$ | $u_6 = - u_0$ |
| $u_7 = u_6 - u_5$<br>$u_7 = - u_0 - u_1 - u_0 = - 2u_0 - u_1$ | $- 2u_0 \geq 2u_1$ donc<br>$- 2u_0 - u_1 \geq u_1 \geq 0$<br>$u_7 \geq 0$ | $u_7 = - 2u_0 - u_1$ |
| $u_8 = u_7 - u_6$<br>$u_8 = - 2u_0 - u_1 + u_0 = - u_1 - u_0$ | $u_1 + u_0 \leq 0$ donc<br>$- u_1 - u_0 \geq 0$ : $u_8 \geq 0$. | $u_8 = - u_1 - u_0$ |
| $u_9 = u_8 - u_7$<br>$u_9 = - u_1 - u_0 + 2u_0 + u_1 = u_0$ | $u_9 \leq 0$ | $u_9 = u_0$ |
| $u_{10} = - u_9 - u_8$<br>$u_{10} = - u_0 + u_0 + u_1 = u_1$ | $u_{10} \geq 0$ | $u_{10} = u_1$ |

Les deux autres cas ($u_1 \leq 0 \leq u_0$, $0 \leq u_0$ et $0 \leq u_1$ ) s'étudient de façon similaires (lorsque $0 \leq u_0$ et $0 \leq u_1$, on est amené à distinguer les sous cas $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 2u_0$, $0 \leq 2\, u_0 \leq u_1$, $0 \leq u_1 \leq u_0 \leq 2u_1$, $0 \leq 2\, u_1 \leq u_0$).

Dans tous les cas, on obtient $u_9 = u_0$ et $u_{10} = u_1$. On établit ensuite par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+9} = u_n$.

**Exercice S2**

Soit $(u_n)_{n \in N}$ la suite de nombres entiers définie par : $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel $n$, $\begin{cases} u_{2n} = u_n \\ \text{et} \\ u_{2n+1} = 1 - u_n \end{cases}$

1. Calcul de $u_{1990}$.

$1990 = 2 \times 995$ donc $u_{1990} = u_{995}$ ; $995 = 497 \times 2+1$ donc $u_{995} = 1 - u_{497}$ et $u_{1990} = 1 - u_{497}$ . On établit ensuite que :

$u_{497} = 1 - u_{248} = 1 - u_{124} = 1 - u_{62} = 1 - u_{31}$ d'où $u_{1990} = u_{31}$ puis $u_{31} = 1 - u_{15}$ ; $u_{15} = 1 - u_7$ ; $u_7 = 1 - u_3 = u_1$.
D'où $u_{1990} = u_1 = 1$.

2. Nombre d'indices $n$, inférieurs ou égaux à 1990, tels que $u_n = 0$.

$\left(\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_{2n} = u_n \text{ et } u_{2n+1} = 1 - u_n\right) \Rightarrow \left(\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_{2n+1} = 1 - u_{2n}\right)$

Donc, pour tout $n$, $u_{2n+1} + u_n = 1$.

Montrons par récurrence que, pour tout $n$ entier naturel $u_n \in \{0,1\}$ :

$u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ donc la propriété est vraie aux rangs 0 et 1.

Soit $n$ un entier naturel donné. Supposons que la propriété soit vraie jusqu'au rang $n$.

Si $n$ est pair, il existe un entier $k$ tel que $n = 2k$.

Si $u_{2k} \in \{0,1\}$ alors $u_{2k+1} = 1 - 0$ ou $u_{2k+1} = 1 - 1$ donc $u_{n+1} \in \{0,1\}$.

Si $n$ est impair, il existe un entier $k$ tel que $n = 2k + 1$. Alors $u_{2k+2} = u_{k+1}$ or $u_{k+1} \in \{0,1\}$ donc $u_{n+1} \in \{0,1\}$.

Conclusion : Pour tout entier naturel $n$, $u_n \in \{0,1\}$.

Dans ces conditions la somme $\sum_{k=0}^{1990} u_k$ est égale au nombre d'indices $n$, inférieurs ou égaux à 1990, tels que $u_n = 1$.

Or $\sum_{k=0}^{1990} u_k = \underbrace{\underbrace{(u_0 + u_1)}_{1} + \underbrace{(u_2 + u_3)}_{1} + \ldots + \underbrace{(u_{1988} + u_{1989})}_{1}}_{995} + \underbrace{u_{1990}}_{1} = 996$.

Il y a donc 995 d'indices $n$, inférieurs ou égaux à 1990, tels que $u_n = 1$ et donc (1990 – 996 + 1) soit 995 d'indices $n$, inférieurs ou égaux à 1990, tels que $u_n = 0$.

3. Soit $p$ un nombre entier naturel et $N = (2^p - 1)^2$. Calculons $u_N$.
Si $p = 0$, $N = 0$ et $u_0 = 0$ ; si $p = 1$, $N = 1$ et $u_1 = 1$ ; si $p = 2$, $N = 3$ et $u_3 = 1 - u_1 = 0$
$(2^p - 1)^2 = 2^{2p} - 2^{p+1} + 1$. Or $2^{2p} - 2^{p+1} = 2^{p+1}(2^{p-1} - 1) = 2^{p+1}(2^{p-2} + \ldots + 2 + 1)$.

D'où : $N = 1 + \sum_{j=p+1}^{2p-1} 2^j$ soit $N = 2^{p+1}\underbrace{\sum_{j=0}^{p-2} 2^j + 1}_{N_{p-2}}$. Comme, pour tout $n$, $u_{2n} = u_n$, on a, pour tout entier naturel $m$, $u_{2^m n} = u_n$.

On en déduit que $u_N = 1 - u_{N_{p-2}}$ .Or $N_{p-2} = 2\underbrace{\sum_{j=0}^{p-3} 2^j + 1}_{N_{p-3}}$ donc $u_{N_{p-2}} = 1 - u_{N_{p-3}}$ et $u_N = u_{N_{p-3}}$.

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $k$ impair tel que $3 \le k \le p$ et tel que $N_{p-k} = \sum_{j=0}^{p-k} 2^j$, on a $u_N = u_{N_{p-k}}$.

Soit $k$ un entier impair tel que $3 \le k \le p$. Il existe donc un entier $k'$ tel que $k = 2k'+1$.

La propriété $P_{k'}$ ( $u_N = u_{N_{p-2k'-1}}$ pour $N_{p-k} = \sum_{j=0}^{p-p-2k'-1} 2^j$ ) est vraie pour $k' = 1$.

Soit $k$ un entier impair tel que $3 \le k \le p$ et $k = 2k'+1$. Supposons que $u_N = u_{N_{p-k}}$.

$$N_{p-k} = 1 + 2\underbrace{\sum_{j=0}^{p-k-1} 2^j}_{N_{p-k-1}} = 1 + 2\left(1 + 2\underbrace{\sum_{j=0}^{p-k-2} 2^j}_{N_{p-k-2}}\right)$$

Comme $N_{p-k} = 1 + 2N_{p-k-1}$ et $N_{p-k-1} = 1 + 2N_{p-k-2}$, on a $u_N = 1 - u_{N_{p-k-1}} = 1 - \left(1 - u_{N_{p-k-2}}\right)$ d'où $u_N = u_{N_{p-2k'-3}}$ .$P_{k'+1}$ est vraie.

Conclusion : pour tout entier $k$ impair tel que $3 \le k \le p$ et tel que $N_{p-k} = \sum_{j=0}^{p-k} 2^j$, alors $u_N = u_{N_{p-k}}$.

Si $p$ est impair avec $k = p$, on a $u_N = u_{N_0}$. Or $N_0 = 1$. Donc si $p$ est impair, $u_N = u_1 = 1$
Si $p$ est pair, $p - 1$ est impair et avec $k = p - 1$ , on a $u_N = u_{N_1}$ . Or $N_1 = 3$. Donc si $p$ est pair, $u_N = u_3 = 0$.

D'où : $\boxed{u_N = \frac{1-(-1)^p}{2}}$.

**Exercice S3**

**1.** Si $x \in \left]0,1\right[$ et $y \in \left]0,1\right[$, alors $\sqrt{x} \in \left]0,1\right[$ et $\sqrt{y} \in \left]0,1\right[$ donc $\frac{1}{2}(x+y) \in \left]0,1\right[$.

On peut donc montrer par récurrence que, pour tout entier $n$, $u_n \in \left]0,1\right[$.

Si on avait $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$ alors $u_n$ serait égal à $u_0^{\frac{1}{2^n}}$ et la suite convergerait vers 1.

Ici, on a $u_{n+2} \geqslant \inf\left(\sqrt{u_n}, \sqrt{u_{n+1}}\right)$.

On va montrer que si $u_1 \geqslant u_0$ alors $u_n \geqslant u_0^{\frac{1}{2^{\left[\frac{n}{2}\right]}}}$.

C'est vérifié pour $n = 0$ et pour $n = 1$.

Si $u_n \geqslant u_0^{\frac{1}{2^{\left[\frac{n}{2}\right]}}}$ et $u_{n+1} \geqslant u_0^{\frac{1}{2^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}}}$ alors :

- Si $n$ est pair, il existe un entier $p$ tel que $n=2p$ et $u_{n+2} \geqslant \frac{1}{2}\left(u_0^{\frac{1}{2^{p+1}}}+u_0^{\frac{1}{2^{p+1}}}\right)$ soit $u_{n+1} \geqslant u_0^{\frac{1}{2^{p+1}}}$

c'est-à-dire $u_{n+1} \geqslant u_0^{\frac{1}{2^{\left[\frac{n+2}{2}\right]}}}$ ;

- Si $n$ est impair, il existe un entier $p$ tel que $n=2p-1$ et $u_{n+2} \geqslant \frac{1}{2}\left(u_0^{\frac{1}{2^{p-1+1}}}+u_0^{\frac{1}{2^{p+1}}}\right)$ soit $u_{n+1} \geqslant u_0^{\frac{1}{2^{p}}}$

c'est-à-dire $u_{n+1} \geqslant u_0^{\frac{1}{2^{\left[\frac{n+2}{2}\right]}}}$ .

On a alors, pour tout $n$, $u_0^{\frac{1}{2^{\left[\frac{n}{2}\right]}}} \leqslant u_n < 1$. Par encadrement, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$.

Si $u_1 < u_0$, alors $u_{n+2} - u_{n+1}$ et on est ramené au cas précédent.

**2.** On remarque que $u_{n+2}-u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{u_{n+1}}+\sqrt{u_n}-\sqrt{u_n}-\sqrt{u_{n-1}}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{u_{n+1}}-\sqrt{u_{n-1}}\right)$

Le signe de $u_{n+2}-u_{n+1}$ est celui de $u_{n+1}-u_{n-1}$. (2)

S'il existe un entier $N$ tel que $u_{N+1} \geqslant u_N$ et $u_{N+1} \geqslant u_{N-1}$, alors, d'après (2), $u_{N+2} \geqslant u_{N+1} \geqslant u_N$ et, toujours d'après (2), $u_{N+3} \geqslant u_{N+2}$. On peut ainsi montrer que la suite $(u_n)$ est croissante.

Si la suite $(u_n)$ n'est pas croissante à partir d'un certain rang, alors, pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_{n+1} < \sup(u_n, u_{n-1})$. Soit alors $a = \sup(u_0, u_1)$. On montre alors par récurrence que, pour tout entier $n$, $u_n \leqslant a < 1$, ce qui contredit le fait que la suite converge vers 1.

La suite $(u_n)$ est donc bien croissante à partir d'un certain rang.

**Exercice A1**

On remarque d'abord que :
$a\left((a+d)-(b+c)\right) = a(a-c)+ad-ab = a(a-c)+bc-ab = (a-c)(a-b)$, en utilisant (ii).

On en déduit que, dans (iii), $k > m$.

En combinant (ii) et (iii), on a alors $a\left(2^k - a\right) = b\left(2^m - b\right)$ soit $b^2 - a^2 = 2^m\left(b - 2^{k-m}a\right)$.

$2^m$ divise donc $b^2-a^2 = (b-a)(b+a)$. Or $b$ est impair donc $2b$ n'est pas divisible par 4, donc les deux entiers positifs (d'après (i)) $b-a$ et $b+a$, dont la somme est $2b$, ne peuvent être tous les deux divisibles par 4 . L'un des deux nombres est donc divisible par $2^{m-1}$ et s'écrit $n2^{m-1}$.

Comme $0 < b-a < b+a < b+c$ et $b+c = 2^m$, on obtient $0 < n2^{m-1} < 2^m$ d'où $n=1$.

On a donc $b+a = 2^{m-1}$ ou $b-a = 2^{m-1}$ (e)

On peut alors affirmer que $a$ et $b$ sont premiers entre eux. Sinon tout diviseur premier $p$ des deux diviserait $2^{m-1}$, ce qui est impossible car $a$ et $b$ étant impairs, $p$ est aussi impair.

D'autre part, $b+c-2^{m-1} = 2^m - 2^{m-1} = 2^{m-1}$. Suivant le cas dans (e), ce nombre vaut $c+a$
Ou $c-a$. On en déduit de même que $a$ et $c$ sont premiers entre eux.

Or $a$ divise $bc$ donc $a=1$.

**Exercice A2**

Si $mn-1$ divise $n^3+1$, alors $mn-1$ divise $m^3n^3+m^3=\left(m^3+1\right)+\left(m^3n^3-1\right)$. Comme $mn-1$ divise $m^3n^3-1$, cela implique que $mn-1$ divise $m^3+1$. Le problème est donc symétrique en $m$ et $n$ et il suffit d'étudier les deux cas $m=n$ et $m>n$.

Dans le premier cas, on a : $\dfrac{n^3+1}{n^2-1}=n+\dfrac{1}{n-1}$. Ceci n'est un entier que si $n=2$.

Dans le second cas, on remarque que $\dfrac{n^3+1}{n^2-1}\equiv -1\ (n)$ car $n^3+1\equiv 1\ (n)$ et $mn-1\equiv -1\ (n)$.

Il existe donc un entier $k$ tel que $\dfrac{n^3+1}{n^2-1}=kn-1$.

- Si $n>1$, alors $m>1$ et $kn-1<n+\dfrac{1}{n-1}$ ce qui s'écrit aussi $(k-1)n<\dfrac{1}{n-1}+1$ et implique $k=1$. On trouve alors $m=\dfrac{n^3+n}{n(n-1)}=n+1+\dfrac{2}{n-1}$

  ce qui implique $n=2$, $m=5$ ou $n=3$, $m=5$.
- Si $n=1$, alors $\dfrac{2}{m-1}$ doit être un entier, d'où $m=2$ ou $m=3$.

Finalement, on a neuf solutions : $(2,2),(2,1),(3,1),(1,2),(1,3),(2,5),(3,5),(5,2),(5,3)$ .

**Exercice A3**

On pose $R(a,b,c)=\dfrac{abc-1}{(a-1)(b-1)(c-1)}$ et on remarque que :

$R(a,b,c)=1+\dfrac{1}{a-1}+\dfrac{1}{b-1}+\dfrac{1}{c-1}+\dfrac{1}{(a-1)(b-1)}+\dfrac{1}{(b-1)(c-1)}+\dfrac{1}{(c-1)(a-1)}$ d'où $R(a,b,c)>1$.

On peut aussi remarquer que :

- si $1<a'\leqslant a$, $1<b'\leqslant b$ et $1<c'\leqslant c$, alors $R(a',b',c')\geqslant R(a,b,c)$
- $abc-1$ est impair sauf si *a*, *b* et *c* sont tous impairs et $(a-1)(b-1)(c-1)$ est pair sauf si *a*, *b* et *c* sont tous pairs. $R(a,b,c)$ étant un entier cela implique que *a*, *b* et *c* sont soit tous impairs, soit tous pairs.

➢ Si $a\geqslant 4$, alors $1<R(a,b,c)\leqslant R(4,6,8)$ . Or $R(4,6,8)=\dfrac{4\times6\times8-1}{3\times5\times7}=\dfrac{191}{105}$. Donc $1<R(a,b,c)<2$, ce qui est impossible pour un entier.

➢ Si $a=3$, alors $1<R(a,b,c)\leqslant R(3,5,7)$. Or $R(3,5,7)=\dfrac{3\times5\times7-1}{2\times4\times6}=\dfrac{104}{148}$, donc $1<R(a,b,c)<3$.

Et donc, dans ce cas, $2=R(a,b,c)=R(3,b,c)=\dfrac{3bc-1}{2(b-1)(c-1)}$. Cette équation s'écrit aussi $(b-4)(c-4)=11$. Comme 11 est premier et comme $1<a<b<c$, on a $b=5$ et $c=15$.

- Si $a=2$, alors $1<R(a,b,c)\leqslant R(2,4,6)$. Or $R(2,4,6)=\dfrac{2\times4\times6-1}{1\times3\times5}=\dfrac{47}{15}$, donc $1<R(a,b,c)<4$.

  On a donc $R(2,b,c)=2$ ou $R(2,b,c)=3$.

  Dans le premier cas, on a $2bc-1=2(b-1)(c-1)$ qui est impossible pour des questions de parité.

Dans le second cas, on a $2bc-1=3(b-1)(c-1)$ qui s'écrit aussi $(b-3)(c-3)=5$. Comme ( est premier et comme $1<a<b<c$, on a $b=4$ et $c=8$.

Finalement, il y a au maximum deux solutions au problème : $(3,5,15)$ et $(2,4,8)$. On vérifie qu'elles conviennent bien.

**Exercice A4**

**a.** Il suffit de prouver que $n^2$ ne peut pas s'écrire comme la somme de $n^2-13$ carrés parfaits.
Si $n^2=a_1^2+a_2^2+...+a_{n^2-13}^2$. S'il existe un entier *i,* compris entre 1 et $n^2-13$, tel que $a_i\geqslant 4$, alors, tous les autres entiers étant supérieurs ou égaux à 1, $n^2\geqslant n^2-12+16$ ce qui est impossible. Donc, pour tout entier $i$ compris entre 1 et $n^2-13$, on a $1\leqslant a_i\leqslant 3$ et on peut écrire $n^2=\underbrace{1^2+...+1^2}_{p\text{ termes}}+\underbrace{2^2+...+2^2}_{q\text{ termes}}+\underbrace{3^2+...+3^2}_{r\text{ termes}}$. On a alors $p+q+r=n^2-13$ et $p+4q+9r=n^2$. Ceci implique $3q+8r=13$, ce qui est impossible.

**b.** On montre que 13 est le plus petit entier $n$ tel que $S(n)=n^2-14$. En effet, les seuls carrés parfaits strictement inférieurs à 169 qui sont la somme de deux carrés parfaits sont 25 et 100. On peut de plus vérifier qu'ils ne peuvent pas s'écrire comme la somme de trois carrés parfaits.
De plus, pour montrer que $S(13)=13^2-14=155$, il faut prouver que 169 peut s'écrire comme la somme de $k$ carrés parfaits pour tout entier $k$ compris entre 1 et 155. Pour cela, on remarque que, pour tout entier $r$, $(2r)^2=r^2+r^2+r^2+r^2$. Ainsi, si $n^2$ est la somme de $k$ carrés parfaits, dont $(2r)^2$, alors $n^2$ est la somme de $k+3$ carrés parfaits.
Comme $169=8^2+8^2+4^2+4^2+3^2$, 169 est la somme de $2+3t$ carrés parfaits pour tout entier $t$ tel que $1\leqslant t\leqslant 53$. Par ailleurs, si on remplace $3^2$ par $2^2+2^2+1^2$, le même argument montre que 169 est la somme de $1+3t$ carrés parfaits pour tout entier $t$ tel que $2\leqslant t\leqslant 56$. De plus, de $169=12^2+4^2+3^2$, il s'ensuit que est la somme de $3t$ carrés parfaits pour tout entier $t$ tel que $1\leqslant t\leqslant 51$. Enfin, 169 est la somme de quatre carrés parfaits car $169=10^2+8^2+2^2+1^2$.

**c.** On va démontrer que si $S(n)=n^2-14$, alors $S(n)=4n^2-14$. L'égalité $(2r)^2=r^2+r^2+r^2+r^2$ implique que $(2n)^2$ peut s'écrire comme la somme de 1, 2, …, $4n^2-56$ carrés parfaits, soit $S(2n)\geqslant 4n^2-56$. Or $4n^2$ peut s'écrire comme la somme de $3n^2+k$ carrés parfaits avec $1\leqslant k\leqslant n^2-14$ :
$4n^2=\underbrace{1^2+...+1^2}_{3n^2\text{ termes}}+n^2$ soit $4n^2=\underbrace{1^2+...+1^2}_{3n^2\text{ termes}}+a_1^2+a_2^2+...+a_k^2$.
Comme $n\geqslant 13$, on a $4n^2-56>3n^2$, ce qui montre que $S(2n)=4n^2-14$.

**Exercice A5**

Si $n$ se décompose sous la forme $2^s q$, où $q$ est un nombre impair, alors :

$$m^n-1=m^{2^s q}-1=\left(m^{2^s}-1\right)\left(\left(m^{2^s}\right)^{q-1}+\left(m^{2^s}\right)^{q-2}+...+m^{2^s}+1\right).$$

On en déduit que 2 divise $m^n-1 \Leftrightarrow$ 2 divise $m^{2^s}-1$. Comme on cherche le plus petit exposant $n$, on peut supposer que $n=2^s$. On a alors deux cas :

- Si $m \equiv 1 \pmod 4$, alors la représentation de $m$ en base 2 est $m = 1...1\underbrace{00...01}_{k \text{ chiffres}}$, $k$ étant l'exposant maximal tel que $m \equiv 1 \pmod{2^k}$. On a alors $m^2 - 1 = (m-1)(m+1)$ qui est divisible par $2^{k+1}$ mais pas par $2^{k+2}$. On démontre par récurrence que $2^{k+s}$ est la plus grande puissance de 2 divisant $m^{2^s} - 1$.
- Si $m \equiv 3 \pmod 4$, alors la représentation de $m$ en base 2 est $m = 1...0\underbrace{11...1}_{k \text{ chiffres}}$, $k$ étant l'exposant maximal tel que $m \equiv -1 \pmod{2^k}$. En utilisant le même argument de récurrence, on trouve que $2^{k+s}$ est la plus grande puissance de 2 divisant $m^{2^s} - 1$.

Finalement, si k est l'invariant défini précédemment, le plus petit entier positif $n$ tel que $2^{1989}$ divise $m^n - 1$ est : $n = \begin{cases} 2^{1989-k} & \text{si } k \leqslant 1989 \\ 1 & \text{si } k > 1989 \end{cases}$.

**Exercice A6**

On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe un entier $k$ tel que $0 \leqslant k \leqslant n-2$ et $k^2 + k + n$ ne soit pas un nombre premier. Soit $y$ le plus petit $k$ tel que $k^2 + k + n$ n'est pas premier. On a alors $y > \sqrt{\frac{n}{3}}$ et, pour tout entier $k$ tel que $0 \leqslant k \leqslant y-1$, $k^2 + k + n$ n'est pas premier.

Pour tout $k$ tel que $0 \leqslant k \leqslant y-1$, on a $(y^2 + y + n) - (k^2 + k + n) = (y-k)(y+k+1)$ avec $1 \leqslant y-k \leqslant y$ et $y+1 \leqslant y+k \leqslant 2y$.

On considère alors le plus petit diviseur premier de $y^2 + y + n$ que l'on note $q$.

On a alors $q \leqslant 2y$ car, si $q \geqslant 2y+1$, alors $y^2 + y + n \geqslant q^2 \geqslant (2y+1)^2 > y^2 + y + n + 3y + 1$ puisque $y > \sqrt{\frac{n}{3}}$.

Ceci donnerait $3y + 1 < 0$, ce qui est impossible.

Or, si $q \leqslant 2y$, alors il existe un entier $k$ tel que $0 \leqslant k \leqslant y-1$ et $q = y-k$ ou $q = y+k+1$. On en déduit que $q$ divise $k^2 + k + n$, d'où $k^2 + k + n = q$.

Or $y - k \leqslant n - 1 - k < \underbrace{k^2 + k + n}_{q}$ et $y + k + 1 \leqslant n - 2 + k + 1 < \underbrace{k^2 + k + n}_{q}$, d'où la contradiction.

**Exercice A7**

Soit $p$ le plus petit nombre premier ne divisant pas $n$. On a alors $a_1 = 1$, $a_2 = p$ et $a_k = n-1$.

On en déduit que $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = ... = a_k - a_{k-1} = p - 1$

- Si $n$ est impair, alors $a_2 = 2$ et $p - 1 = 1$ donc la progression $(a_i)$ est en fait 1, 2, 3, …, $n-1$.
  On en déduit que $n$ est premier.
- Si $n$ est pair, alors $p \geqslant 3$.

  Si $p = 3$, alors $p - 1 = 2$ et la progression $(a_i)$ est en fait 1, 3, 5, …, $n-1$.

  Comme pour tout entier $q$ impair et strictement inférieur à $n$, $q$ est premier avec $n$, $n$ est une puissance de 2.

  Si $p > 3$, alors $n$ est un multiple de 3.

  Par ailleurs $a_k = a_1 + (p-1)(k-1)$ d'où l'on tire $n - 1 = 1 + (p-1)(k-1)$ Ainsi $p - 1$ divise $n - 2$.

Alors tout nombre premier $q$ divisant $p-1$ diviserait à la fois $n-2$ et $n$ (car $q < p$). Il existe alors un entier $l$ tel que $p-1=2^l$ soit $p=1+2^l$. L'entier $p$ étant un nombre premier, $l$ n'admet aucun diviseur impair et $p=1+2^{2^m}$. On a alors $a_3 = a_1 + 2\left(p-1\right) = 2p-1 = 2^{2^m+1}+1$ et 3 divise $a_3$. Comme 3 divise $n$, on a aune contradiction avec $n$ et $a_2$ premiers entre eux.