Thème : Suites
Thème : nombres complexes

Exercice S1

Montrer que, pour tout entier naturel n, il existe deux entiers naturels a_n et b_n tels que $\left(1+\sqrt{6}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{6}$.

Montrer que a_n et b_n sont premiers entre eux.

Exercice S2

Introduction : On cherche tous les couples $(x\ ,\ y)$ d'entiers naturels vérifiant l'équation suivante :

$$\left|x^2 - 2y^2\right| = 1.$$

On considère A = $\mathbf{Z} + \sqrt{2}\,\mathbf{Z}$, c'est-à-dire A = $\left\{z \in \mathbf{R} \,/\, \exists\,(a,b) \in \mathbf{Z}^2 \quad z = a + \sqrt{2}\ b\right\}$.

1. a. Montrer que le produit de deux éléments de A appartient à A.

1. b. Soit z appartenant à A. Montrer qu'il existe un unique couple (a,b) de $\mathbf{Z}^2$ tel que $z = a + \sqrt{2}\ b$.

On pose désormais $c(z) = a - \sqrt{2}\ b$ et $N(z) = a^2 - 2\ b^2$.

1. c. Montrer que pour tous z et z' de A, on a $N(zz') = N(z)N(z')$.

1. d. Montrer que $a + \sqrt{2}\ b$ est inversible dans A si et seulement si $N(z) =\ 1$ ou -1, c'est-à-dire si et seulement si $\left|a^2 - 2\ b^2\right| = 1$.

2. On considère l'ensemble $\mathrm{I} = \left\{n \in \mathbf{Z} \,/\, \exists\,(a,b) \in \mathbf{Z}^2 \quad n = a^2 - 2\ b^2\right\}$.

a. Montrer que I est stable par produit.

b. Montrer que 3 n'appartient pas à I.

Indication : on pourra considérer les congruences modulo 8.

3. Pour tout n entier naturel, on note $(a_n\ ,\ b_n)$ l'unique couple d'entiers naturels tel que $(1+\sqrt{2})^n = a_n + \sqrt{2}\ b_n$.

a. On note H l'ensemble des couples $(x\ ,\ y)$ de réels tels que $\left|x^2 - 2y^2\right| = 1$.

On note H^+ l'ensemble des couples $(x\ ,\ y)$ de réels tels que $x^2 - 2y^2 = 1$ et H^- l'ensemble des couples $(x\ ,\ y)$ de réels tels que $x^2 - 2y^2 = -1$

On a ainsi $H = H^+ \cup H^-$. Représenter graphiquement l'ensemble H.

b. Montrer que pour tout n entier naturel $(a_n\ ,\ b_n)$ appartient à H.

c. On considère l'application φ de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$ qui à $(x\ ,\ y)$ associe $(x+2y\ ,\ x+y)$.

Montrer que φ est bijective et expliciter φ^{-1}.

d. Montrer que pour tout n entier naturel, $(a_{n+1}\ ,\ b_{n+1}) = \varphi((a_n\ ,\ b_n))$**.**

4. a. Soit $(x\ ,\ y) \in \mathbf{N}^2 \cap H$ tel que $(x\ ,\ y) \neq (1\ ,\ 0)$. Montrer que $(2y - x, x - y) \in \mathbf{N}^2 \cap H$**.**

b. Soit $(x\ ,\ y) \in \mathbf{N}^2 \cap H$. On définit la suite $((x_n, y_n))_{n\geq 0}$ par $(x_0\ ,\ y_0) = (x\ ,\ y)$ et pour tout n entier naturel, $(x_{n+1}\ ,\ y_{n+1}) = (2y_n - x_n, x_n - y_n)$. En utilisant **4. a**, montrer qu'il existe un entier naturel n tel que $(x_n\ ,\ y_n) = (1\ ,\ 0)$.

c. Démontrer que les couples $(x\ ,\ y)$ d'entiers naturels vérifiant l'équation $\left|x^2 - 2y^2\right| = 1$ sont les couples $(a_n\ ,\ b_n)$ avec n entier naturel.

Exercice S3

Soit $\left(u_n\right)$ la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier n : $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$. Prouver que $u_{1000} > 45$

Exercice S4
On considère une suite de réels définie par a_0 arbitraire et $a_{n+1} = [a_n].\{a_n\}$, où $[x]$ désigne la partie entière du réel x (le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x) et $\{x\}$ la mantisse du réel x, c'est-à-dire la différence $\{x\} = x - [x]$. Prouver qu'il existe un entier n_0 tel que $a_{n+2} = a_n$ pour tout n supérieur ou égal à n_0

Exercice C1
Soit OAB, OCD et OEF trois triangles équilatéraux. On appelle M le milieu de [BC], N le milieu de [DE] et P le milieu de [FA].
Quelle est la nature du triangle MNP ?

Exercice C2
Soient A; B et C trois points du plan d'affixes respectives a, b et c.
Montrer l'équivalence entre les propositions suivantes :

(i) ABC est un triangle équilatéral
(ii) j ou j^2 est une racine du polynôme complexe $P(z) = az^2 + bz + c$
(iii) $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$
(iv) $\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} = 0$

Exercice C3
Pour tout réel θ et tout entier naturel n non nul, calculer :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \cos^k \theta . \cos(k\theta)$$