***THEME : géométrie plane***

## ***EXERCICE 1 :***

Soit ABC un triangle. Pour tout point M du segment [BC], on note B' et C' les projetés orthogonaux respectifs de M sur les droites (AC) et (AB).
Pour quel(s) point(s) M, la distance B'C' est-elle minimale ?

## ***EXERCICE 2 :***

Soit ABC un triangle équilatéral et soit M un point intérieur au triangle. Montrer que la somme des distances du point M aux droites (AB), (BC) et (CA) respectivement, est un réel indépendant de M que l'on calculera.

## ***EXERCICE 3:***

Le plan est rapporté à un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ orthonormal.
Soit (C) le cercle de centre O et de rayon 10 et soit (C') le cercle de centre O'(12;9) et de rayon 5.

1) Montrer que (C) et (C') sont tangents extérieurement en un point A, barycentre des points O et O' affectés de coefficients à déterminer.
2) Déterminer l'équation de la droite (T) tangente commune aux deux cercles en A.
3) Montrer que (C) et (C') ont deux autre tangentes communes dont on déterminera des équations (On commencera par déterminer le point d'intersection de ces deux tangentes).

## ***EXERCICE 4 :***

Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus.
Pour tout point P intérieur au triangle, on note L, M, N les projetés orthogonaux respectifs du point P sur les cotés [BC], [CA] et [AB].
Trouver le point P pour lequel la somme $(BL)^2+(CM)^2+(AN)^2$ est minimale.

## ***EXERCICE 5 :Différentes formules autour de l'aire du triangle.***

Soit ABC un triangle, p son demi périmètre, r et R les rayons respectifs du cercle inscrit et du cercle circonscrit; on notera : AB = c, AC = b, BC = a, $p = \frac{a+b+c}{2}$

Montrer que :
aire(ABC) = p.r
aire(ABC) = $2R^2 \sin(A).\sin(B).\sin(C)$
aire(ABC) = $\frac{abc}{4R}$
**Formule de Héron**: aire(ABC) = $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

***Aide*** : On pourra montrer que : $1 + \cos(A) = \frac{2p(p-a)}{bc}$ et $1 - \cos(A) = \frac{2(p-b)(p-c)}{bc}$, puis en déduire la valeur de sin(A) en fonction de p, a, b et c.

***<u>EXERCICE 6:</u>***

On reprend les notations de l'exercice 5.

1) Monter que: $(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c) \leq abc$
2) Interprétation géométrique:
   Déduire de l'inégalité ci-dessus et des différentes formules sur l'aire démontrées à l'exercice 5 que : $2r \leq R$ **( Inégalité d'Euler** )

***<u>EXERCICE 7 :</u>***

Soit ABC un triangle et soit ( C ) son cercle circonscrit (de rayon R).
Le cercle inscrit dans le triangle ABC a pour rayon r.
Les bissectrices intérieures des angles A, B, C du triangle ABC recoupent ( C ) en A', B', C' respectivement.
Montrer que l'aire du triangle A'B'C' est supérieure ou égale à l'aire du triangle ABC.