COMBINATOIRE.

Pierre Bornsztein, 27 Février 2009.

Exercice 1.

Prouver que, pour tous entiers n, p avec $0 \leq p \leq n$, on a

$$p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$$

et

$$p(p-1)\binom{n}{p} = n(n-1)\binom{n-2}{p-2}.$$

Solution.

On va compter de deux façons diffèrentes le nombre N de groupes (non ordonnés) de p personnes deux à deux distinctes, dont une est un chef, choisies dans une population de n personnes.
- Il y a $\binom{n}{p}$ façons de choisir le groupe de personnes. Pour chacun de ces choix, il y a p choix possibles du chef, parmi les p personnes du groupe. Ainsi, $N = p\binom{n}{p}$.
- Mais on peut aussi commencer par choisir le chef. Il y a alors n choix possibles. Pour chacun de ces choix, il y a $\binom{n-1}{p-1}$ façons de compléter le groupe en choisissant $p-1$ personnes parmi les $n-1$ restantes (toutes sauf le chef déjà choisi). Et ainsi, $N = n\binom{n-1}{p-1}$.
Pour conclure, il ne reste plus qu'à identifier les deux valeurs de N trouvées.

La seconde égalité se démontre de la même façon en comptant le nombre de groupes de p personnes, dont une est un chef et une autre est un sous-chef.

Exercice 2.

Dans un lycée, il y a b professeurs et c élèves. Chaque professeur enseigne à exactement k élèves et deux élèves quelconques ont toujours exactement h professeurs en commun. Prouver que

$$\frac{b}{h} = \frac{c(c-1)}{k(k-1)}.$$

Solution.

On va compter le nombre N d'ensembles de la forme $\{p, e_1, e_2\}$ où p est un professeur commun des élèves e_1 et e_2.
- Il y a b choix possibles pour le professeur. Pour chacun de ces choix, il y a $\binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$ choix de deux élèves du professeur choisi. Ainsi $N = b\frac{k(k-1)}{2}$.
- Mais on peut aussi commencer par choisir les deux élèves. Il y a $\binom{c}{2} = \frac{c(c-1)}{2}$ choix de deux élèves du lycée. Pour chacun de ces choix, il y a h choix possibles pour un professeur commun à ces deux élèves. Et donc $N = h\frac{c(c-1)}{2}$.

La conclusion découle alors immédiatement de l'identification des deux valeurs de N trouvées.

Exercice 3.

Prouver que, pour tous entiers i, j tels que $1 \leq j \leq i$, on a

$$\sum_{p=0}^{j} (-1)^p \binom{i}{p} \binom{i+j-p-1}{j-p} = 0.$$

Solution.

Dans l'égalité cherchée, il y a quand même deux choses désagréables : le 0 du membre de droite, difficile à faire apparaître dans un comptage, et l'alternance de signes dans la somme de gauche. On règle ces deux problèmes en séparant la somme en deux, selon la parité de p. En rappelant que $\binom{j}{p} = 0$ si $p > j$, il s'agit donc de démontrer que

$$\sum_{p \text{ pair}} \binom{i}{p} \binom{i+j-p-1}{j-p} = \sum_{p \text{ impair}} \binom{i}{p} \binom{i+j-p-1}{j-p}.$$

Dans chacun des termes de ces sommes, les occurences de p permettent de remarquer que l'on forme à chaque fois des groupes de $p + (j-p) = j$ personnes choisies dans une population totale de $i + j - 1$ personnes, et que certaines sont choisies dans une population particulière de i personnes.

L'idée est alors de s'intéresser aux groupes de j personnes choisies dans une population de i filles et $j-1$ garçons, et certaines de ces j personnes seront des chefs mais seules les filles pourront accéder à ce statut.
L'égalité ci-dessus traduit alors qu'il y a autant de groupes avec un nombre pair de chefs que de groupes avec un nombre impair de chefs.
Reste à le prouver...
Les termes que l'on somme sous-entendent que l'on commence par choisir les chefs puis que l'on complète le groupe. Or, comme dans l'exercice 1, on peut inverser la construction et commencer par choisir un groupe de j personnes. En fait, pour un tel groupe, on va prouver que le nombre de façons de choisir un nombre pair de chefs est égal au nombre de façons de choisir un nombre impair de chefs. Notons tout de suite que si l'on arrive à prouver cela alors, puisque ce sera vrai de tout groupe de j personnes de la population initiale, cela donnera directement l'égalité cherchée.
On note f le nombre de filles dans notre groupe de j personnes. On remarque tout d'abord que n'ayant en tout que $j-1$ garçons, notre groupe contient au moins une fille, soit donc que $f \geq 1$.
Le nombre de façons de choisir un nombre pair de chefs dans notre groupe est alors $\displaystyle\sum_{p \text{ pair}} \binom{f}{p}$.
Le nombre de façons de choisir un nombre impair de chefs dans notre groupe est alors $\displaystyle\sum_{p \text{ impair}} \binom{f}{p}$.
Il s'agit donc de prouver que $\displaystyle\sum_{p \text{ pair}} \binom{f}{p} = \sum_{p \text{ impair}} \binom{f}{p}$.
Mais cela est un résultat bien connu, cas particulier de la formule du binôme pour le développement de $(1-1)^f$. On note quand même que l'information $f \geq 1$ est ici essentielle.

Exercice 4.

Soit $n > 1$ un entier. Dans le plan, on considère n cercles de rayon 1, deux quelconques jamais tangents, et tels que chacun de ces cercles en intersecte au moins un autre. Prouver qu'ils définissent au moins n points d'intersections.

Solution.

La première idée qui vient est de se dire que ça doit bien marcher par récurrence, en prouvant que si l'on ajoute un cercle on ajoute sûrement au moins un point d'intersection. Sauf que non...il est laissé au lecteur le plaisir de prouver que si trois cercles de rayon 1 sont concourants en un point M alors le cercle circonscrit aux trois autres points d'intersection est également de rayon 1. Donc, ajouter ce cercle à la configuration ne fait pas apparaître de nouveau point. Bien sûr, la conclusion désirée n'est pas remise en cause parce qu'on avait déjà 4 points d'intersection.

En fait, la bonne idée est d'utiliser un double comptage (quelle surprise ici). Mais de quoi?
Tout d'abord, dans ce qui suit, chaque cercle considéré est l'un des n cercles de la configuration, et chaque point considéré est un point d'intersection de deux de ces cercles.
Si Γ est un cercle, on note $p(\Gamma)$ le nombre de points qui appartiennent Γ. Alors $p(\Gamma) \geq 2$ puisque Γ rencontre au moins un autre cercle et qu'il n'y a pas de tangence.
Si M est un point, on note $c(M)$ le nombre de cercles qui passent par M. Evidemment, on a $c(M) \geq 2$.
Soit m le nombre de points (d'intersection) de la configuration.

Dans notre comptage, on peut s'attendre à ce qu'interviennent les couples (Γ, M), où M est un point du cercle Γ.
Mais, si l'on fait un double-comptage sur ces couples, il ne vient que l'égalité $\displaystyle\sum_M c(M) = \sum_\Gamma p(\Gamma)$, qui n'est pas du tout ce que l'on veut.

On va donc considérer une somme de la forme $\displaystyle\sum_{(\Gamma,M)} f(\Gamma, M)$, où $f(\Gamma, M)$ est une expression à déterminer de sorte que l'on obtienne un résultat utile, en particulier que l'on fasse apparaître les nombres n et m qui nous intéressent.
On a $\displaystyle\sum_{(\Gamma,M)} f(\Gamma, M) = \sum_\Gamma (\sum_{M\in\Gamma} f(\Gamma, M))$.
Pour obtenir n, il suffit que, pour chaque cercle Γ, on ait $\displaystyle\sum_{M\in\Gamma} f(\Gamma, M) = 1$.

Pour cela, le choix le plus simple est de poser $f(\Gamma, M) = \dfrac{1}{p(\Gamma)}$ dans tous les cas. Ainsi :
$\displaystyle\sum_{(\Gamma,M)} \frac{1}{p(\Gamma)} = \sum_{\Gamma}(\sum_{M\in\Gamma} \frac{1}{p(\Gamma)}) = \sum_{\Gamma} p(\Gamma)\cdot\frac{1}{p(\Gamma)} = \sum_{\Gamma} 1 = n.$

On a aussi $\displaystyle\sum_{(\Gamma,M)} \frac{1}{p(\Gamma)} = \sum_{M}(\sum_{\Gamma \text{ tel que } M\in\Gamma} \frac{1}{p(\Gamma)})$, mais on ne sait pas dire grand chose de $\displaystyle\sum_{\Gamma \text{ tel que } M\in\Gamma} \frac{1}{p(\Gamma)}$...
Par contre, faire apparaître m est maintenant facile. Le raisonnement ci-dessus s'adapte pour prouver que
$\displaystyle\sum_{(\Gamma,M)} \frac{1}{c(M)} = \sum_{M}(\sum_{\Gamma \text{ tel que } M\in\Gamma} \frac{1}{c(M)}) = \sum_{M} c(M)\cdot\frac{1}{c(M)} = \sum_{M} 1 = m.$

Mais, ces deux sommes portent sur les mêmes couples, on se rend compte que, pour conclure, il suffit de prouver que, pour tout cercle Γ et tout point M appartenant à Γ, on a $\frac{1}{p(\Gamma)} \leq \frac{1}{c(M)}$, ou encore que $c(M) \leq p(\Gamma)$.
Soit donc Γ un cercle et M un point de Γ.
Chacun des $c(M) - 1$ cercles autres que Γ et qui passent par M rencontre Γ en un autre point (pas de tangence). Or, par deux points donnés il ne passe pas plus de deux cercles de rayon 1. Cela assure que ces $c(M) - 1$ cercles définissent sur Γ au moins $c(M) - 1$ points deux à deux distincts. Avec M, il vient bien $p(\Gamma) \geq c(M)$, comme désiré.

Exercice 5.

Soient $m, n \geq 2$ des entiers. Prouver que, pour tous réels positifs $x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_n$ tels que $x_i + y_i = 1$ pour tout $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, on a

$$(1 - x_1x_2\cdots x_n)^m + (1 - y_1^m)(1 - y_2^m)\cdots(1 - y_n^m) \geq 1.$$

Solution.

Soient donc $x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_n$ des réels positifs tels que $x_i + y_i = 1$ pour tout $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$

On considère n pièces $p_1, p_2, \cdots, p_n$ telles que, pour tout i, la probabilité que p_i donne Pile est x_i. Puisque $x_i + y_i = 1$, la probabilité que p_i donne Face est y_i.
On lance ces n pièces, en considérant que les lancers sont indépendants. Alors $x_1 x_2 \cdots x_n$ est la probabilité que ces n pièces donnent toutes Pile. Et donc $1 - x_1 x_2 \cdots x_n$ est la probabilité qu'au moins l'une des pièces donne Face.
On répéte alors m fois de suite et de façon indépendante ce lancer des n pièces. Le nombre $(1 - x_1 x_2 \cdots x_n)^m$ est donc la probabilité de l'événement A : "Lors de chacun de ces m lancers, au moins l'une des pièces donne Face".

Une fois cette expérience mise en place, on vérifie facilement que $(1 - y_1^m)(1 - y_2^m) \cdots (1 - y_n^m)$ est la probabilité de l'événement B : "Lors de ces m lancers, chacune des n pièces a donné au moins une fois Pile".

Il s'agit donc de prouver que $P(A) + P(B) \geq 1$.
Or, si l'événement A n'est pas réalisé, c'est que pour (au moins) un des m lancers, les n pièces ont toutes donné Pile. Dans ce cas, l'événement B est clairement réalisé. Cela assure que $\overline{A} \subset B$, et donc $A \cup B = \Omega$ (où Ω désigne un univers lié à cette expérience aléatoire). D'où
$P(A) + P(B) \geq P(A \cup B) = P(\Omega) = 1$, ce qui conclut.

Exercice 6.

Soit S un ensemble fini de points du plan, trois jamais alignés. Pour tout polygone convexe P dont les sommets appartiennent à S, on note $a(P)$ le nombre de sommets de P, et $b(P)$ le nombre de points de S qui sont extérieurs à P. Un segment, un point et l'ensemble vide sont considérés comme des polygones convexes à respectivement $2, 1, 0$ sommets.
Prouver que, pour tout réel x, on a

$$\sum_P x^{a(P)} (1-x)^{b(P)} = 1.$$

Solution.

Puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de points, il n'y a qu'un nombre fini de polygones convexes (ou non) dont les sommets sont parmi les points qui sont

dans S. Par conséquent, la somme à considérer est finie, et c'est une expression polynomiale par rapport à x. On en déduit que si l'égalité demandée est vraie pour tout $x \in]0;1[$ alors elle est vraie pour tout réel x.
On se donne donc $x \in]0;1[$.
Considérons qu'initialement chacun des points de S est blanc. Indépendamment, on colorie alors chacun de ces points en noir avec une probabilité x. Un point de S donné est alors blanc avec une probabilité $1-x$.
Soit Q un polygone convexe (éventuellement vide, ou réduit à 1 point ou à un segment, conformément à l'énoncé) dont les sommets sont dans S.
Alors $x^{a(Q)}(1-x)^{b(Q)}$ est la probabilité de l'événement A_Q : "le polygone Q a tous ses sommets noirs et tous les points de S qui lui sont extérieurs sont blancs".
Il est facile de voir que si Q et Q' sont deux polygones convexes différents, alors au moins un des sommets de Q est extérieur à Q' ou au moins un des sommets de Q' est extérieur à Q. On en déduit que les événements A_Q et $A_{Q'}$ sont incompatibles.
Par suite, $\displaystyle\sum_Q x^{a(Q)}(1-x)^{b(Q)} = \sum_Q P(A_Q) = P(\bigcup_Q A_Q)$.

Mais, quelle que soit la coloration obtenue, l'enveloppe convexe de l'ensemble des points noirs est un polygone convexe Q (éventuellement vide, ou réduit à 1 point ou à un segment) dont les sommets sont dans S et tous noirs, et tous les points qui lui sont extérieurs sont forcément blancs. Donc l'événement A_Q est réalisé.
Ainsi, on a $\displaystyle\bigcup_Q A_Q = \Omega$, l'événement certain. Et donc $P(\displaystyle\bigcup_Q A_Q) = 1$, ce qui conclut.

Exercice 7.

Soit $k \in \{1, 2, \cdots, 100\}$.
Les 100 passagers d'un avion de 100 places entrent dans l'appareil, l'un après l'autre, dans l'ordre du numéro de leur carte d'embarquement. Ils ont chacun une place réservée, mais la première personne à monter dans l'avion est une vieille folle qui s'assoit sur une place choisie au hasard (et de façon équiprobable). Puis, chacun des autres, à son tour, va s'assoir à sa place réservée si elle est encore libre ou, dans le cas contraire, s'installe au hasard (et de façon équiprobable) sur n'importe laquelle des places restantes.

Quelle est la probabilité que le 100^{ieme} passager se soit finalement assis à sa place réservée?

Solution.

Dans un tel énoncé, il convient de se demander si la valeur 100 est particulière ou n'est là que pour faire peur (ou pour rendre possible une application numérique). De toute façon, il faut toujours commencer avec peu de passagers pour se faire une idée de ce qui se passe.
On considère donc une assemblée de n passagers, dans les conditions de l'énoncé.
Si l'on étudie les cas $n = 2, 3, 4, 5$ (par exemple en utilisant des arbres), on constate que, dans chaque cas, la probabilité que le dernier passager se retrouve à sa place réservée est égale à $\frac{1}{2}$, ce qui peut laisser entrevoir un résultat général...
Mais, l'étude des cas $n = 3, 4, 5$ permettent aussi de voir que les arbres pondérés qui décrivent les situations correspondantes sont formés de sous-arbres qui sont ceux correspondants aux valeurs plus petites que le n choisi. Ce qui suggère une récurrence.
Et c'est bien ainsi que l'on va raisonner.
Comme on l'a dit, il est facile de vérifier que pour $n = 2$ la probabilité que le second passager se retrouve à sa place réservée est $\frac{1}{2}$.
Soit $n \geq 2$ un entier. Supposons que pour tout $k \in \{2, \cdots, n\}$ et pour toute assemblée de k personnes dans les conditions de l'énoncé, la probabilité que le k^{ieme} passager (le dernier donc) se retrouve à sa place réservée est $\frac{1}{2}$.
Soit maintenant une assemblée de $n + 1$ personnes dans les conditions de l'énoncé.
On note A l'évément "le $(n + 1)^{ieme}$ se retrouve à sa place réservée.
Pour tout $i \in \{1, 2, \cdots, n + 1\}$, on note E_i l'événement "la vieille folle s'est assise sur la place du i^{ieme} passager".
Clairement, les événements $E_1, E_2, \cdots, E_{n+1}$ forment un système complet d'événements et $P(E_i) = \frac{1}{n+1}$ pour tout i.
De plus, on a $P_{E_1}(A) = 1$ et $P_{E_{n+1}}(A) = 0$.
Soit $i \in \{2, \cdots, n\}$.
Si l'événement E_i est réalisé, alors chacun des passagers $2, 3, \cdots, i - 1$ va directement à sa place réservée. Lorsque vient son tour, le i^{ieme} passager trouve sa place réservée occupée par la vieille folle et va donc prendre une place au hasard. Mais alors, pour le groupe de passagers restants, il agit

exactement comme une vielle folle. On se retrouve donc exactement dans les conditions de l'énoncé, pour un groupe de $n+1-(i-1) = n+2-i$ personnes. Or, puisque $2 \leq i \leq n$, on a $2 \leq n+2-i \leq n$, ce qui assure que l'on peut utiliser l'hypothèse de récurrence et donc $P_{E_i}(A) = \frac{1}{2}$.
D'après la formule des probabilités totales, on a alors

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n+1} P(E_i)P_{E_i}(A) = \frac{1}{n+1}(1 + (n-1) \times \frac{1}{2} + 0) = \frac{1}{2}$$

ce qui prouve le résultat au rang $n+1$.