Versailles, jeudi 26 février 2009.

Théorie des nombres

Claude Deschamps

Cette suite d'exercices a pour thème les nombres entiers absolument premiers. En deux heures, il ne sera possible que d'aborder les premiers exercices, mais rien n'interdit de continuer seul en faisant preuve de ténacité.
Dans tout ce qui suit N est un entier au moins égal à deux (en pratique même au moins égal à dix) et on envisage son écriture dans le système décimal qui comporte n chiffres (en pratique avec n supérieur ou égal à deux).

N est dit « absolument premier » s'il est premier, et si, prenant l'écriture décimale de N, tout entier dont l'écriture décimale est obtenue par permutation quelconque des n chiffres de N est lui aussi premier.
Evidemment, pour n=1 il s'agit simplement des nombres premiers 2, 3, 5, 7.
Les problèmes commencent pour n=2 où clairement 13 est absolument premier car 31 l'est aussi, mais, par contre, 19 est premier mais n'est pas absolument premier car 91 n'est pas premier.
De même 311 est absolument premier car 311, 131 et 113 sont tous les trois premiers.

Deux exemples faciles.

- Les « repunits » (de l'anglais repeated units).

  Exercice 1. On considère un entier N dont l'écriture décimale est constituée de n fois le chiffre 1. Il est clair que si N est premier, il est absolument premier. Montrer qu'une condition nécessaire pour que N soit premier est que n le soit. Cette condition est-elle suffisante ?

- Exercice 2. On considère un entier N, supérieur ou égal à 10, dont l'écriture décimale comporte exactement n-1 fois le chiffre 1 et une fois le chiffre 7. Déterminer tous les entiers N, de cette forme, qui sont absolument premiers.

Retour au cas général : évidemment N est un entier au moins égal à 10 et même en pratique au moins égal à 1.000 ou à 10.000

- Exercice 3. Quels sont les quatre seuls chiffres pouvant figurer dans l'écriture décimale d'un nombre absolument premier.

- Exercice 4. Prouver que si N est absolument premier son écriture décimale ne peut pas faire figurer simultanément les chiffres 1, 3, 7 et 9.

- Exercice 5. Prouver que si N est absolument premier son écriture décimale ne peut pas faire figurer simultanément trois fois un chiffre a et deux fois un chiffre b, différent de a .

- Exercice 6. Montrer qu'il n'existe aucun nombre absolument premier ayant 4, 5 ou 6 chiffres.
  Cet exercice nécessite quelques vérifications numériques un peu fastidieuses mais indispensables.

À ce stade, en utilisant les tables usuelles des nombres premiers, nous pouvons donner la liste des nombres absolument premiers ayant au plus six chiffres : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 31, 37, 71, 73, 79, 97, 113, 131, 199, 311, 337, 373, 733, 919, 991.
Désormais les entiers N envisagés ont donc au moins 7 chiffres.

- Exercice 7. Soit N un nombre absolument premier dont l'écriture décimale est :
  $$c_1c_2\ldots.c_{n-6}\ aaaaab$$
  avec a et b deux chiffres différents. Alors l'entier M dont l'écriture décimale est :
  $$c_1c_2\ldots.c_{n-6}$$
  est divisible par 7.

- Théorème. Tout nombre absolument premier est soit un « repunit », soit un nombre dont l'écriture décimale à n chiffres est obtenue par une permutation des chiffres du nombre représenté par :
  $$B_n\,(a,b) = aaa\ldots.aaab \qquad \text{(n-1 fois a et une fois b)}$$
  avec a différent de b et a et b éléments de $\{ 1, 3, 7, 9 \}$

Dans ce qui précède le nombre 7 a joué un rôle fondamental : on a constaté que, modulo 7, les puissances de10 engendraient les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6 . Il convient de s'interroger sur la possibilité d'utiliser d'autres nombres premiers.
Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 7. Par le petit théorème de Fermat, on sait que :
$$10^{p-1} \cong 1 \qquad (p)$$
On désigne alors par o(p) le plus petit entier supérieur ou égal à 1 tel que : $10^{o(p)} \cong 1 \quad (p)$
o(p) est un entier qui divise p-1. C'est l'ordre de 10 dans (Z/pZ)* et en outre on a $10^k \equiv 1$ (p) si et seulement si k est un multiple de o(p).
Un cas important est celui où o(p) = p-1 et dans ce cas 10 est une racine primitive de (Z/pZ)*.
Par exemple, pour p=13, o(p) = 6 et 10 n'est pas une racine primitive de (Z/13Z)* mais, pour p=17, on a o(p)=16, 10 est une racine primitive de (Z/17Z)* et les puissances de 10 vont engendrer les nombres 1, 2, ….., 16.

- Exercice 8. Soit R_n un « repunit » à n chiffres et p un nombre premier supérieur ou égal à 7. Alors $R_n \cong 0$ (p) si et seulement si n est un multiple de o(p).

- Exercice 9. Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 11 tel que 10 soit une racine primitive de (Z/pZ)* et n un entier au moins égal à p—1. Alors si :
  $$B_n\,(a,b) = aaa\ldots.aaab \qquad \text{(n-1 fois a et une fois b)}$$
  est absolument premier, n est un multiple de p-1.

- Exercice10. Pour $7\leq n\leq 16$ les nombres représentés par
  $$B_n\,(a,b) = aaa\ldots.aaab \qquad \text{(n-1 fois a et une fois b)}$$
  ne sont pas absolument premiers.

- Théorème. Si N est un nombre absolument premier qui n'est pas un « repunit » et qui contient n chiffres dans sa représentation décimale, avec $n \geq 4$, alors n est un multiple de 11088.