Géométrie du triangle

Exercice 1

Soit ABC un triangle **quelconque**. On appelle A', B', C' les milieux respectifs des côtés [BC], [CA] et [AB]. Soit G le centre de gravité du triangle ABC et O le centre de son cercle circonscrit.

1. Faire une figure.

On appelle H le point tel que $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

2. **a)** Démontrer les égalités vectorielles : $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA'}$.

b) En déduire que les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.

3. **a)** Démontrer que $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OB'}$.

b) Qu'en déduit-on pour les droites (BH) et (AC) ?

c) Que représente le point H pour le triangle ABC ?

4. On rappelle que le point G est tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

a) Démontrer que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$

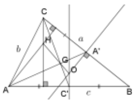
b) En déduire que les points O, H et G sont alignés.

*Lorsque les trois points O, H et G ne sont pas confondus, la droite qui contient les points O, G et H est appelée **droite d'Euler** du triangle ABC.*

Exercice 2 Relations dans le triangle

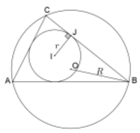
Soit un triangle *ABC*, on pose : *a* = BC, *b* = AC, c = AB ;
On désigne par :

- α, β, γ, les angles de sommets respectifs A, B, C.
- S, l'aire du triangle ABC
- *p*, le demi-périmètre : $p = \dfrac{a+b+c}{2}$



On note également :

- I le centre du cercle inscrit, de rayon *r*,
- G le centre de gravité,
- O le centre du cercle circonscrit, de rayon *R*,
- H l'orthocentre du triangle ABC.



Dans l'exercice 1, on a établi que $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.

Voici d'autres relations usuelles dans le triangle :

(1) Égalité des sinus : $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R$

(2) Produit des côtés : $abc = 4RS$

(3) Théorème de Pythagore généralisé ou Théorème d'Al-Kashi : $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times \cos\gamma$.

(4) Aire et formule de Héron $S = pr$ et $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

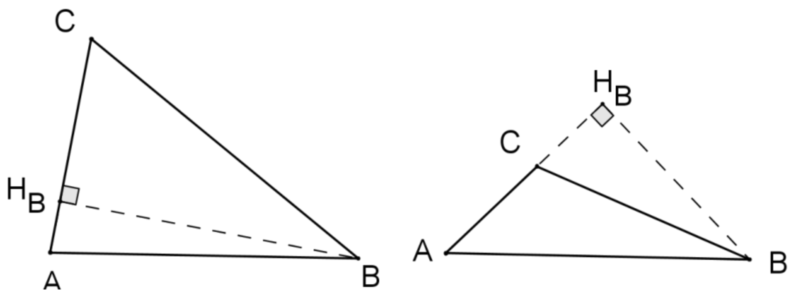
Démontrer ces égalités.

Quelques indications :

(1) Pour démontrer les égalités $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}$, exprimer l'aire du triangle ABC de trois façons différentes. Pour démontrer l'égalité $\dfrac{a}{\sin\alpha}=2R$, introduire le symétrique B' de B dans la symétrie de centre O et déterminer $\widehat{BB'C}$.

(2) Utiliser le (1).

(3) Envisager différents cas de figures (trois angles aigus ou un angle obtus..



(4) Pour démontrer l'égalité $S=pr$, « découper » le triangle ABC en trois triangles.

Pour démontrer la formule de Héron, exprimer $\cos^2\alpha$ en fonction de a, b, c à partir de (3).

En déduire $\sin^2\alpha$ puis calculer $\frac{1}{2}bc\sin\alpha$. $\dfrac{1}{2}bc\times\sin\alpha$.

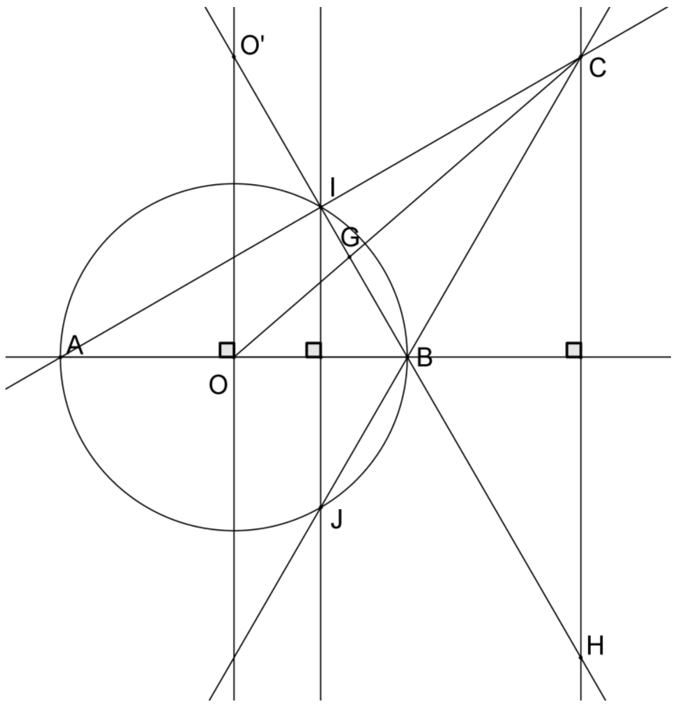
Exercice 3 Étude d'une configuration

On considère un cercle Γ de centre O et de rayon 4. Soit [AB] un diamètre de ce cercle et Δ la médiatrice du segment [OB].

On désigne par I et J les points d'intersection de Δ et Γ et par C le point d'intersection des droites (AI) et (BJ).

Soit O' le point d'intersection de la droite (BI) et de la médiatrice de [AB], H le point d'intersection de (BI) et de la perpendiculaire à (AB) passant par C.

Les droites (OC) et (BI) se coupent en G.



1. Quelle est la nature du quadrilatère OIBJ ?

2. Quelle est la nature du triangle AIJ ? et celle du triangle ABC ?

3. Quel est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC ?

Calculer le rayon de ce cercle.

4. Quel est l'orthocentre du triangle ABC ?

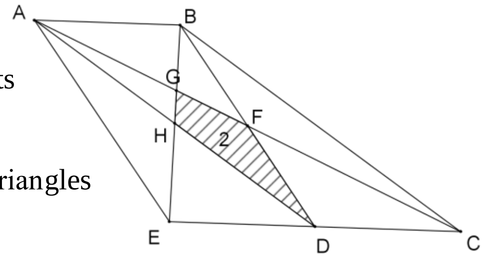
5. Quelle est la nature du triangle HAC ?

6. Quel est le centre de gravité du triangle ABC ?

7. Calculer $\dfrac{O'H}{O'G}$.

Géométrie et calculs

Exercice 1

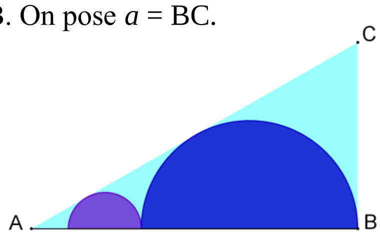


Soit ABCD et ABDE deux parallélogrammes. On désigne par F, G et H les points d'intersection respectifs de (BD) et (AC), (BE) et (AC), (BE) et (AD).
Sachant que l'aire du quadrilatère DFGH est égale à 2, calculer l'aire des sept triangles AGB, BGF, BFC, FCD, EHD, EHA et AHG.

Exercice 2

Le Sangaku (*) représenté ci-dessous est constitué de deux demi-disques de rayons respectifs r et R (R est le rayon du plus grand) tangents entre eux ainsi qu'à l'hypoténuse du triangle ABC rectangle en B. On pose a = BC.

1. Réaliser un programme de construction de la figure.
2. Démontrer que $\dfrac{R}{a} = \sqrt{\dfrac{r}{R}}$



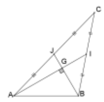
Indications : On pourra tout d'abord faire une figure à main levée et la compléter par symétrie autour de (AB).

(*) Les Sangaku ou San Gaku (littéralement : tablettes mathématiques) sont des énigmes géométriques japonaises gravées sur des tablettes de bois peintes, apparues entre 1600 et 1850. Ces tablettes de bois étaient suspendues à l'entrée de temples et d'autels en offrande aux divinités locales.

Exercice 3

Un triangle ABC est tel que les médianes issues de A et de B sont perpendiculaires.

1. Réaliser un programme de construction de la figure.
2. Démontrer que $CA^2 + CB^2 = 5\ AB^2$



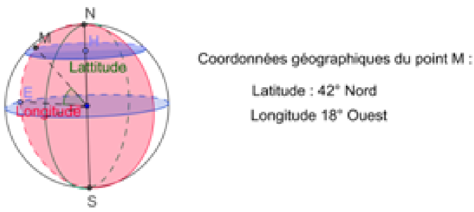
Exercice 4

L'état du Wyoming aux États Unis est limité :

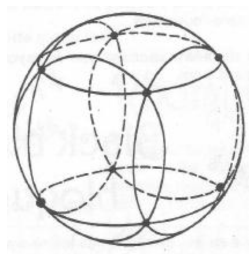
- à l'ouest par le méridien de longitude 111° Ouest,
- à l'est par le méridien de longitude 104° Ouest,
- au nord par le parallèle de latitude 45° Nord,
- au sud par le parallèle de latitude 41° Nord.

Calculer la longueur totale des frontières de cet état.

On supposera que la terre est une boule dont l'équateur mesure 40 000 km.



Exercice 5



Sur une boule de pétanque de rayon 37 mm, on veut tracer 6 cercles comme indiqué sur la figure ci-contre. Leurs 8 points d'intersection sont les sommets d'un cube.
Calculer le rayon de ces cercles.

Raisonnement, logique

Exercice 1 (Vrai-Faux)

On dit qu'une fonction f, définie sur un intervalle I de **R,** est strictement positive (resp négative) sur cet intervalle si, et seulement si, pour tout réel x de l'intervalle I, $f(x) > 0$ (resp $f(x) < 0$).

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0, 2]$, on considère les énoncés suivants :

P : « Pour tout $x \in [0, 2]$, $f(x) \neq 0$ »

Q : « f n'est pas positive sur l'intervalle $[0, 2]$».

Alors :

(a) P signifie : « f est strictement positive sur l'intervalle $[0, 2]$ ou f est strictement négative sur l'intervalle $[0, 2]$».

(b) P signifie : « Pour tout $x \in [0, 2]$, $f(x) > 0$ ou $f(x) < 0$ ».

(c) Q signifie : « f est négative sur $[0, 2]$ ».

(d) La négation de P peut s'écrire : « f est la fonction nulle sur $[0, 2]$ ».

(e) La négation de Q peut s'écrire : « f n'est pas négative sur $[0, 2]$ ».

Exercice 2. Un affichage digital est formé de 7 segments lumineux, chacun d'entre eux pouvant être soit allumé, soit éteint. Ainsi, on peut représenter tous les chiffres de 0 à 9, comme illustré ci-contre : 
On peut effectuer deux opérations sur un affichage.

L'opération « **Inverse** »	L'opération « **Combine** »
allume les segments qui étaient éteints et éteint les segments qui étaient allumés. Par exemple : Inverse () donne 	s'applique à deux affichages et produit un nouvel affichage où tous les segments allumés sur au moins un de ces deux affichages se retrouvent allumés, et seulement ceux-ci. Par exemple : Combine (,) donne .

Laquelle des opérations suivantes **ne donne pas**  ?

Combine(Inverse(), )	Combine(Inverse(), )	Combine( , )	Combine(Inverse(), )

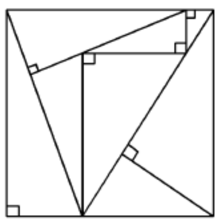
Exercice 3 Trois frères Alfred, Bernard et Claude ont des crayons de couleur différente bleu, rouge et vert. De plus, les assertions suivantes sont vraies :

1. Si le crayon d'Alfred est vert, alors le crayon de Bernard est bleu.
2. Si le crayon d'Alfred est bleu, alors le crayon de Bernard est rouge.
3. Si le crayon de Bernard n'est pas vert, alors le crayon de Claude est bleu.
4. Si le crayon de Claude est rouge, alors le crayon d'Alfred est bleu.

Que peut-on conclure sur la couleur respective des crayons d'Alfred, Bernard et Claude?

Y a-t-il plusieurs possibilités ?

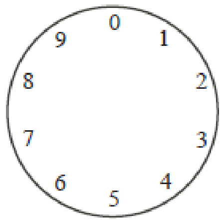
Exercice 4 On partage un carré en huit triangles rectangles tous différents les uns des autres, mais aussi tous semblables : la longueur du plus grand côté de l'angle droit est toujours égale au double de celle du petit.



La figure ci-contre, qui ne respecte pas les proportions montre le résultat obtenu. Toutes les aires des triangles, exprimées en cm^2, sont des nombres entiers.

Quelle est, au minimum, l'aire du carré, exprimée en cm carrés ?

Exercice 5 Stéphane place un jeton sur le 0 dans la figure ci-contre. À chaque étape, le jeton est déplacé dans le sens des aiguilles d'une montre. À la 1re étape, le jeton est déplacé de 1^1 place, aboutissant sur le 1. À la 2e étape, le jeton est déplacé de 2^2 places, aboutissant sur le 5. À la 3e étape, le jeton est déplacé de 3^3 places, aboutissant sur le 2.



Stéphane continue de la sorte, le jeton étant déplacé de n^n places à la *n*ième étape. Quelle sera la position du jeton après 1234 étapes ?

Exercice 6 Alice, Beatrice, Carine et Daphné constituent un groupe de rock dont l'organisation varie en fonction des représentations. La seule règle qui ne change jamais est que, si Alice ne joue pas de guitare basse, alors Carine ne joue pas de guitare électrique.

Aujourd'hui, à l'occasion de l'anniversaire de Michel :

• la chanteuse principale n'est ni Alice, ni Daphné ;

• Beatrice ne joue pas de batterie, ni de guitare basse ;

• ni Alice, ni Daphné ne jouent de guitare électrique ;

• Carine ne joue pas de guitare basse et n'est pas la chanteuse principale.

Que fait chacune ?

Probabilités, algorithmique

Exercice 1

Alice a posé sur la table six cartes présentant un verso identique. Au recto de chacune d'elles, figurent respectivement les nombres +1, +2, +3,–1,–2,–3. Alice propose alors à son ami Bob le jeu suivant : ils retournent simultanément chacun une carte. Si le produit des deux nombres qui apparaissent est négatif, alors Alice gagne, s'il est positif, c'est Bob qui gagne.

Après quelques parties, Bob observe qu'Alice gagne plus souvent que lui. Aussi, pour augmenter ses chances de gagner, il propose à Alice d'enlever une carte portant un nombre négatif et de reprendre le jeu avec les cinq cartes restantes. Bob a-t-il raison ?

Exercice 2

Un sac contient 2 billes rouges et 2 billes bleues. Un deuxième sac contient 2 billes rouges, 2 billes bleues et v billes vertes ($v > 0$). Pour chaque sac, Marie calcule la probabilité d'obtenir deux billes d'une même couleur en tirant au hasard deux billes du même sac, l'une après l'autre, sans remettre la première bille dans le sac. Sachant que ces deux probabilités sont égales, quelle est la valeur de v ?

Exercice 3

Deux nombres a et b ($0 \leq a \leq 1$ et $0 \leq b \leq 1$) sont choisis au hasard.

Le nombre c est défini par $c = 2a + 2b$. On note respectivement A, B, C les arrondis à l'unité de a, b, c.

exemple : si $a = 0{,}432$ et $b = 0{,}5$, alors $c = 1{,}864$ d'où $A = 0$, $B = 1$ et $C = 2$.

Quelle est la probabilité pour que $2A + 2B = C$?

Exercice 4

Roméo et Juliette se rendent aléatoirement, à partir de 12 heures, au musée. Chacun d'eux y reste douze minutes puis repart à 13 heures au plus tard. Quelle est la probabilité qu'ils se rencontrent ?

Exercice 5

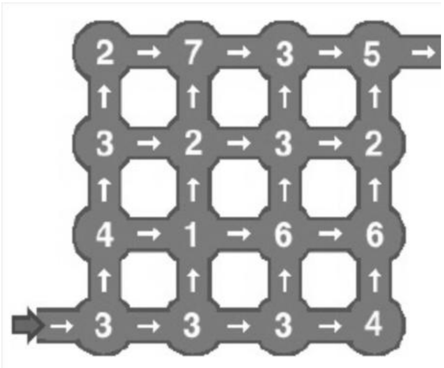
Les équipes d'un rallye mathématique doivent relever le défi suivant.

Chacune d'elles doit proposer un parcours dans le plan de labyrinthe ci-contre.

Le passage à chaque carrefour donne les points indiqués. Ainsi, à l'entrée, toutes les équipent marquent 3 points et à la sortie 5.

Le parcours doit suivre le sens des flèches et on ne peut revenir en arrière.

L'équipe gagnante sera celle qui aura marqué le plus de points.

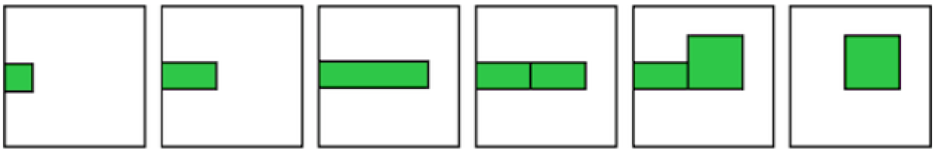


Combien de points peut-on obtenir au maximum en effectuant un parcours ?

Exercice 6 Sur la table sont disposées, côte à côte, cinq cartes portant les numéros 3 – 1 – 5 – 4 – 2.dans cet ordre. Il s'agit de les trier par ordre croissant en utilisant uniquement des déplacements qui consistent à échanger deux cartes voisines. Combien de déplacements faut-il au minimum pour classer ces cartes ?

Exercice 7 *D’après le Concours Castor informatique suisse - 2011*

Le castor aime la végétation. Il a inventé un langage de programmation basé sur la vie végétale.
Ce langage sert à représenter des images à partir d’objets visuels. Chaque objet visuel peut exécuter trois opérations : « doubler », « diviser » et « supprimer ». Chaque image commence par un carré appelé « a ».
Exemple : le programme composé des cinq opérations suivantes
a. doubler (est) ; a doubler (est) ; [b, c] ← a. diviser () ; c. doubler (nord) ; b. supprimer () crée cette suite d’images :

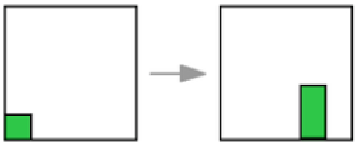


1. Représenter la suite d’image correspondant aux programmes suivants :

Programme n° 1 : a. doubler (nord) ; a doubler (est) ; a doubler (est) ; [b, c] ← a. diviser () ; b. supprimer ().

Programme n°2 : a. doubler (est) ; [b,c] ← a. diviser () ; c. doubler (nord) ; c. doubler (est) ; b. supprimer ()

2. Quelles pourraient être les instructions d’un programme qui transfère la figure de droite à la figure de gauche représentées ci-contre ?



Fonctions, nombres

Exercice 1 Trouver un nombre entier *N* dont la racine carrée admet pour premiers chiffres après la virgule la suite 2013…soit $\sqrt{N} = ...,2013...$

Exercice 2 Soit k un entier. Dans un repère du plan, on considère les deux droites d'équations respectives $kx-5y+7=0$ et $k^2x-5y+1=0$. Combien y a-t-il de valeurs entières de k pour lesquelles ces deux droites se coupent en un point à coordonnées entières ?

Exercice 3 On considère la fonction définie sur l'intervalle]0, 1[de la façon suivante :

$$\begin{cases} f(x)=2x \text{ pour } 0 < x \leq \dfrac{1}{2} \\ f(x)=2(1-x) \text{ pour } \dfrac{1}{2} < x < 1 \end{cases}.$$

1. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle]0, 1[, $f(x)$ appartient à l'intervalle]0, 1].

2. En calculant les images successives de $\dfrac{3}{11}$ par f, on obtient : $\dfrac{3}{11} \mapsto \dfrac{6}{11} \mapsto \dfrac{10}{11} \mapsto \dfrac{2}{11} \mapsto ... \mapsto ... \mapsto ... \mapsto ...$

On a donc $f\left(\dfrac{3}{11}\right)=\dfrac{6}{11}, f\left(f\left(\dfrac{3}{11}\right)\right)=f\left(\dfrac{6}{11}\right)=\dfrac{10}{11}, f\left(f\left(f\left(\dfrac{3}{11}\right)\right)\right)=f\left(\dfrac{10}{11}\right)=\dfrac{2}{11}$. On note $f^{(2)}\left(\dfrac{3}{11}\right)=\dfrac{10}{11}, f^{(3)}\left(\dfrac{3}{11}\right)=\dfrac{2}{11}$ …

Calculer , s'ils sont définis, les réels $f^{(4)}\left(\dfrac{3}{11}\right), f^{(5)}\left(\dfrac{3}{11}\right), f^{(6)}\left(\dfrac{3}{11}\right), f^{(7)}\left(\dfrac{3}{11}\right)$.

3. Existe-t-il un nombre a tel que $f(a)=a$?

4. Sachant que $f^{(3)}(x)=1$, déterminer toutes les valeurs possibles de x.

5. Il existe des entiers naturels m ($m > 3$) pour lesquels $f^{(7)}\left(\dfrac{2}{m}\right)=\dfrac{2}{m}$. Déterminer trois entiers naturels m pour lesquels cela est vrai.

Exercice 4 On connaît la somme S de trois nombres x, y et z. On connaît la somme T de leurs carrés et la somme U de leurs cubes. Exprimer leur produit xyz en fonction de S, T et U.

Exercice 5 On donne un nombre réel b et on considère la fonction $f : \begin{cases} [0,1] \to \mathbf{R} \\ x \mapsto x^2 - 2bx - 1 \end{cases}$

Est-il possible que la différence entre les valeurs maximum et minimum de cette fonction soit égale à 1?

Exercice 6 Calculer la somme $S=\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+\dfrac{1}{3\times 4}+...+\dfrac{1}{998\times 999}+\dfrac{1}{999\times 1000}$.

Exercice 7 Si $a+b=1$ et $a^2+b^2=2$, combien vaut a^3+b^3 ? et a^4+b^4 ?

Exercice 8 Prouver que si a, b et c sont des réels positifs tels que $ab+bc+ca=1$, alors :

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \geqslant \sqrt{3}+\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}.$$