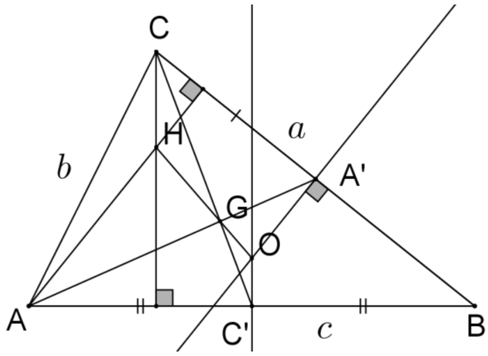
Pépinière Avril 2013 Éléments de correction

Géométrie du triangle

Exercice 1



2. a) et b) $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ donc $\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, d'où le résultat.

$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA'}$ car A' est le milieu de [BC]. On en déduit que (AH) //(OA'). Or (OA') est la médiatrice de [BC] donc (OA') $\perp$ (BC). D'où (AH) $\perp$ (BC).

3. a) et b) : Démonstrations analogues au 2.

c) H est l'intersection de deux hauteurs….

4. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GC}$ d'où le résultat.

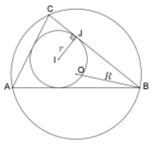
b) On établit que $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.

Exercice 2 Relations dans le triangle

(1) Égalité des sinus : $\boxed{\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R}$.

(a) Soit H_C le pied de la hauteur issue de C dans le triangle ABC.

$S = \dfrac{1}{2}AB \times CH_C = \dfrac{1}{2}cb \times \sin\alpha$. On obtient de même :

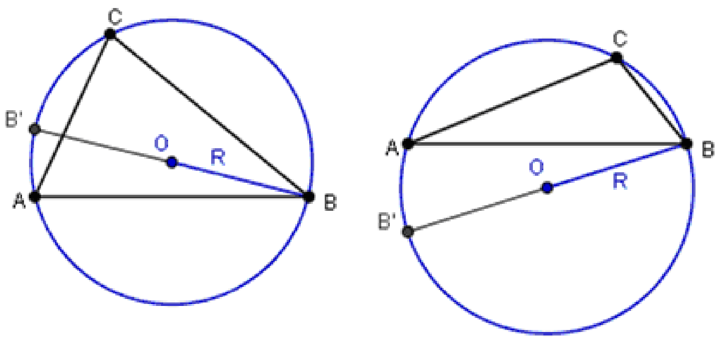


$S = \dfrac{1}{2}ac \times \sin\beta = \dfrac{1}{2}ab \times \sin\gamma$

On en déduit que $bc \times \sin\alpha = ac \times \sin\beta = ab \times \sin\gamma$. Puis en divisant les trois membres par abc : $\dfrac{\sin\alpha}{a} = \dfrac{\sin\beta}{b} = \dfrac{\sin\gamma}{c}$.

L'égalité demandée s'obtient par inversion des trois quotients.

(b) Soit B' le symétrique de B dans la symétrie de centre O. $\widehat{BB'C} = \widehat{BAC}$ (angles inscrits interceptant le même arc) donc $\widehat{BB'C} = \alpha$. Comme BB'C est un triangle rectangle en C ([BB'] est un diamètre), on a donc $\sin\alpha = \dfrac{BC}{BB'} = \dfrac{a}{2R}$. D'où $\boxed{\dfrac{a}{\sin\alpha} = 2R}$.

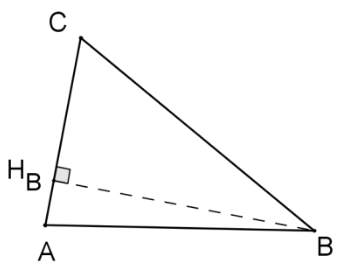


(2) Produit des côtés : $\boxed{abc = 4RS}$

$S = \dfrac{1}{2}bc \times \sin\alpha$ donc $bc = \dfrac{2S}{\sin\alpha}$. Comme $a = 2R\sin\alpha$, on en déduit que $\boxed{abc = 2R\sin\alpha \times \dfrac{2S}{\sin\alpha} = 4RS}$.

(3) Théorème d'Al-Kashi : $\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times \cos\gamma}$

Dans le cas où les trois angles sont aigus, on a :

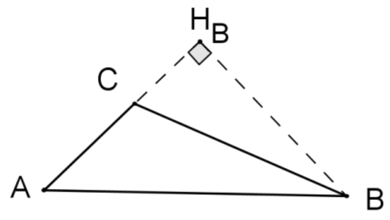


$AB^2 = (AC - CH_B)^2 + H_BB^2 = AC^2 + CH_B^2 - 2\times AC \times CH_B + H_BB^2$.

Or $CH_B^2 + H_BB^2 = CB^2$ et $CH_B = BC \times \cos\gamma$ donc

$AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2\times AC \times BC \times \cos\gamma$ soit : $\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times \cos\gamma}$

Le cas où l'angle de sommet C est obtus, on a :



$AB^2 = (AC + CH_B)^2 + H_BB^2$ soit $AB = AC^2 + CH_B{}^2 + 2\times AC \times CH_B + H_BB^2$.

Or $CH_B{}^2 + H_BB^2 = CB^2$ et $CH_B = BC \times \cos(\pi - \gamma)$ donc $AB^2 = AC^2 + CB^2 + 2\times AC \times BC \times \cos(\pi - \gamma)$ soit :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times \cos\gamma$$

(4) Aire et formule de Héron

S = aire (AIB) + aire (BIC) + aire (CIA) soit :

$$S = \frac{1}{2}ra + \frac{1}{2}rb + \frac{1}{2}rc = r \times \frac{a+b+c}{2} = rp.$$

D'après le théorème d'Al-Kashi, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos\alpha$. D'où : $\cos\alpha = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ et $\cos^2\alpha = \dfrac{\left(b^2+c^2-a^2\right)^2}{4b^2c^2}$.

$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ et, comme $\sin\alpha > 0$ α, on en déduit que $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \dfrac{\left(b^2+c^2-a^2\right)^2}{4b^2c^2}}$ soit :

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{4b^2c^2 - \left(b^2+c^2-a^2\right)^2}}{2bc} = \frac{\sqrt{\left(2bc - b^2 - c^2 + a^2\right)\left(2bc + b^2 + c^2 - a^2\right)}}{2bc},$$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{\left(a^2 - (b-c)^2\right)\left((b+c)^2 - a^2\right)}}{2bc} = \frac{\sqrt{(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(b+c+a)}}{2bc}.$$

On en déduit que $S = \dfrac{1}{2}bc \times \sin\alpha = \sqrt{\dfrac{(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(b+c+a)}{16}}$.

Or $b+c-a = 2(p-a)$, $a+c-b = 2(p-b)$ et $a+b-c = 2(p-c)$.

Donc $S = \sqrt{\dfrac{(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(b+c+a)}{16}} = \sqrt{\dfrac{2(p-b)\times 2(p-c)\times 2(p-a)\times 2p}{16}}$ soit :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Exercice 3 Étude d'une configuration

1. Nature du quadrilatère OIBJ ?

[OI] et [OB] sont deux rayons, donc., donc.

Le triangle OBI est équilatéral.

OI = OJ (rayons du cercle Γ), et OJ = JB (J est un point de la médiatrice de [OB]) et OI = IB (I est un point de la médiatrice de [OB]) donc les quatre côtés du quadrilatère OIBJ ont pour mesure le rayon du cercle Γ.

OIBJ est un losange.

2. Nature du triangle AIJ

$\mathbf{\widehat{IOJ}} = \widehat{IOB} + \widehat{BOJ}$. Et comme les triangles OBI et OBJ sont équilatéraux,

(chacun a trois côtés dont la mesure est égale au rayon du cercle Γ) alors : $\widehat{IOB} = \widehat{BOJ} = 60°$.

Par conséquent : $\mathbf{\widehat{IOJ} = 120°}$.

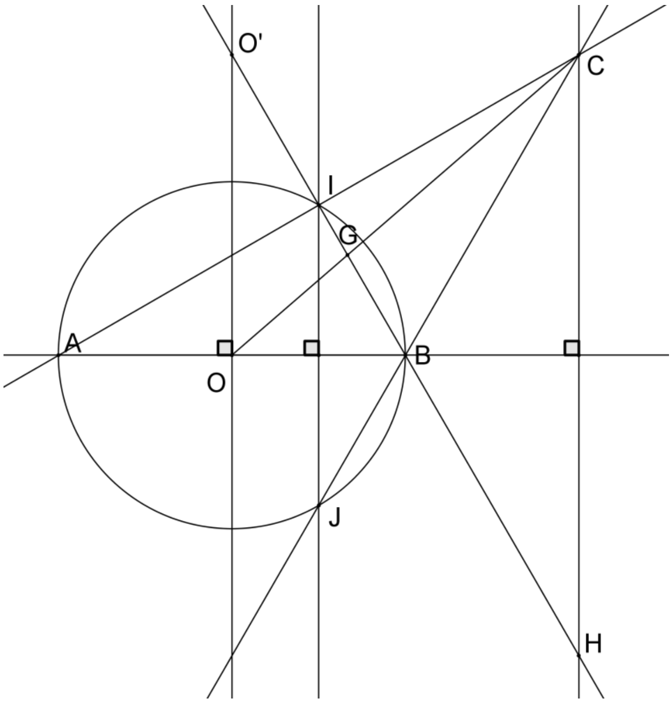
.$\widehat{IAJ}$ est un angle inscrit qui intercepte le même arc que l'angle au centre $\widehat{IOJ}$.

Par conséquent : $\widehat{IAJ} = \dfrac{1}{2}\widehat{IOJ}$ d'où : **$\widehat{IAJ}$ = 60°.**

Puisque OIBJ est un losange, ses diagonales sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu.(OB) est donc la médiatrice de [IJ].

A est un point de la médiatrice (OB) de [IJ donc AI = AJ]. D'autre part, $\widehat{IAJ}$ = 60°,.

le triangle AIJ est donc équilatéral.



<u>Nature du triangle ABC</u>

$\widehat{ABC} = \widehat{JBC} - \widehat{ABJ} = 180° - \widehat{ABJ}$

$\widehat{ABJ} = \widehat{OBJ} = 60°$ (OJB est équilatéral et O $\in$[AB])

Donc : $\widehat{ABC} = 180° - 60° = 120°$.

$\widehat{BAC} = \widehat{BAI}$ (I $\in$[AC]).

Or $\widehat{BAI} = \dfrac{1}{2}\widehat{JAI} = 30°$(AIJ est équilatéral donc la médiatrice (AB) du segment [IJ] est aussi la bissectrice de l'angle $\widehat{JAI}$.).

On en déduit que **$\widehat{BAC}$ = 30°**.

Il en résulte que $\widehat{ACB} = \widehat{BAC} = 30°$, **le triangle ABC est isocèle en B.**

3. <u>Centre du cercle circonscrit au triangle ABC</u>

Par construction, O' est le point d'intersection de la droite (BI) et de la médiatrice de [AB].

Montrons que (BI) est la médiatrice de [AC]:

(AC) $\perp$ (BI) car le triangle AIB est inscrit dans le cercle Γ et [AB] est un diamètre de ce cercle. (BI) est donc la hauteur issue de B du triangle ABC et comme Ba = BC (ABC isocèle en B), (BI) est aussi médiatrice du côté [AC].

O' est le point est l'intersection de deux médiatrices du triangle ABC.

Le centre du cercle circonscrit au triangle ABC est donc O'. Soit Γ' ce cercle.

<u>Calcul du rayon du cercle</u> Γ'

Le triangle O'AB est équilatéral. En effet : O'A = O'B (rayons de ce cercle) et l'angle $\widehat{ACB}$, inscrit dans le cercle Γ', intercepte le même arc que l'angle au centre $\widehat{AO'B}$. D'où : $\widehat{AO'B} = 2\,\widehat{ACB} = 60°$.

Par conséquent :O'A = AB = 8.

Conclusion : Le cercle circonscrit au triangle ABC a un rayon de 8.

4. <u>Orthocentre du triangle ABC</u>

(CH) est la hauteur issue de C dans le triangle ABC (par construction (CH) $\perp$ (AB)) et nous avons vu que la hauteur issue de B dans ce même triangle était (BI). Les droites (CH) et (BI) se coupent en H.

Donc **l'orthocentre du triangle ABC est H.**

D'autre part, puisque le triangle AJB est inscrit dans le cercle (C) de diamètre [AB], il est rectangle en J.

Comme (AJ) est perpendiculaire à (BC) et comme J est un point de (BC),

Alors (AJ) est une hauteur du triangle ABC. Elle passe donc par H. Donc les points A, J, H sont alignés.

5. <u>Nature du triangle HAC</u>

HAC est isocèle en H (H $\in$(BI), médiatrice de [AC]). Donc $\widehat{HAC} = \widehat{HCA}$.

D'autre part, $\widehat{HAC} = \widehat{JAI}$ (J $\in$ [AH], I $\in$ [AC] et JAI = 60° (le triangle AIJ est équilatéral).

Le triangle HAC est donc équilatéral.

6. Centre de gravité du triangle ABC

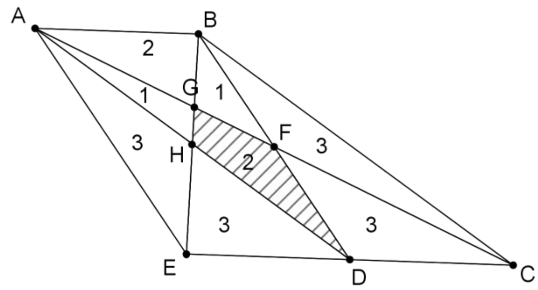
O est le milieu de [AB] et I est le milieu de [AC]. (BI) et (CO) sont donc deux médianes du triangle ABC.

Le centre de gravité du triangle ABC est G

7. $\dfrac{O'H}{O'G} = 3$ puisque O', H et G sont respectivement le centre du cercle circonscrit autriangle ABC, l'orthocente et le centre de gravité de ce même triangle..

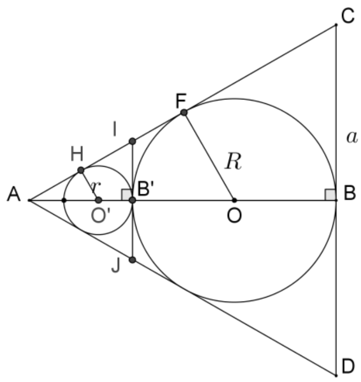
Géométrie et calculs

Exercice 1



Les aires de chaque zone se calculent en utilisant les résultats suivants :
- le rapport dans lequel une droite issue d'un sommet partage l'aire d'un triangle est aussi celui dans lequel elle partage le côté opposé ;
- les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leurs milieux et en conséquence, elles partagent le parallélogramme en quatre zone d'aires égales ;
- le centre de gravité G du triangle ABD est situé aux deux tiers des médianes [AI] et [BO] en partant des sommets.

Exercice 2



1. Indications pour la construction: Soit D le symétrique de C par rapport à (AB). Le cercle de rayon *R* obtenu par cette symétrie orthogonale est inscrit dans le triangle ACD. (IJ) est tangente à ce cercle et le cercle de centre *r* est une réduction du cercle de centre *R*. C'est aussi le cercle inscrit dans le triangle AIJ.

2. Démontrons que $\dfrac{R}{a} = \sqrt{\dfrac{r}{R}}$.

aire (ABC) = aire (AOC) + aire (COB). On en déduit que :

d'où $AB' = AB - 2R = AB - 2\dfrac{AB \times BC}{AC + BC}$ soit $AB' = AB \times \dfrac{AC - BC}{AC + BC}$.

Comme (HO') //(FO), on a : $\dfrac{r}{R} = \dfrac{AB'}{AB}$ donc $\boxed{\dfrac{r}{R} = \dfrac{AC - BC}{AC + BC}}$. Or $R = \dfrac{AB \times BC}{AC + BC} = \dfrac{AB \times BC(AC - BC)}{AC^2 - BC^2}$

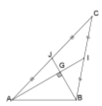
D'où $R = \dfrac{AB \times BC(AC - BC)}{AB^2}$ (car $AC^2 = BC^2 + AB^2$). Donc $\dfrac{R}{a} = \dfrac{AC - BC}{AB}$.

D'autre part $AC^2 - BC^2 = AB^2 \Rightarrow \dfrac{1}{AC + BC} = \dfrac{AC - BC}{AB^2} \Rightarrow \dfrac{AC - BC}{AC + BC} = \dfrac{(AC - BC)^2}{AB^2}$. D'où $\dfrac{r}{R} = \left(\dfrac{R}{a}\right)^2$.

Exercice 3

Un triangle ABC est tel que les médianes issues de A et de B sont perpendiculaires.

1. (a) Supposons la figure réalisée



Soit G le centre de gravité du triangle ABC ; Puisque les médianes (BJ) et (AI) sont perpendiculaires, le triangle AGB est rectangle en G et G appartient à l'un des deux demi-cercles de diamètre d'extrémités A et B, le point I est tel que $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$ et le point C est le symétrique de B dans la symétrie de centre I.

Construction : On construit un demi-cercle de diamètre [AB]. Soit G un point de ce demi-cercle, I le point tel que $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$ et C le symétrique de B dans la symétrie de centre I.

Le triangle ainsi construit satisfait aux hypothèses de l'énoncé. En effet, par construction, (AJ) est une médiane du triangle ABC et G est situé aux deux-tiers de cette médiane à partir du sommet A. Donc G est le centre de gravité de ce triangle. On en déduit que (BG) est la médiane issue de B. D'autre part, (AI) et (BG) sont perpendiculaires puisque le triangle AGB, est inscrit dans un demi-.cercle de diamètre [AB]. Il est donc rectangle en G.

2. Une utilisation répétée de la propriété de Pythagore dans les quatre triangles rectangles en G permet d'écrire :

triangle AJG : $CA^2 = 4\ AJ^2 = 4\ GA^2 + 4\ GJ^2$, triangle BIG : $CB^2 = 4\ BI^2 = 4\ GB^2 + 4\ GI^2$

En ajoutant membre à membre : $CA^2 + CB^2 = 4\ (GA^2 + GB^2) + 4\ (GI^2 + GJ^2) = 4\ AB^2 + 4\ IJ^2$
Or d'après la propriété des milieux dans ABC : AB = 2 IJ, soit $4\ IJ^2 = AB^2$. D'où : $CA^2 + CB^2 = 5\ AB^2$

Exercice 4

Les frontières Est et Ouest du Wyoming sont des portions de méridiens.

Leurs longueurs sont (en km) : $\frac{40\ 000 \times (45-41)}{360} = \frac{4\ 000}{9}$.

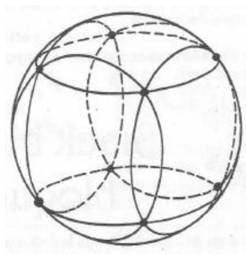
Les frontières Nord et Sud sont des portions de cercles parallèles à l'équateur.
La longueur totale du 45^e parallèle est 40 000 cos (45°) km et celle du 41^e parallèle est 40000 × cos (41°) km.

La longueur en km de la frontière Nord est alors : $40\ 000 \times \cos 45° \times \frac{111-104}{360} = \frac{7\ 000 \times \cos 45°}{9}$

Celle de la frontière Sud est alors, en km : $40\ 000 \times \cos 41° \times \frac{111-104}{360} = \frac{7\ 000 \times \cos 41°}{9}$

La longueur des frontières du Wyoming est donc:

$P = \frac{1}{9}\left(2 \times 4000 + 7000(\cos 45° + \cos 41°)\right)$ soit 2026 km (arrondi au km).



Exercice 5

Si l'on note a l'arête du cube. Sa diagonale a donc pour mesure $a\sqrt{3}$. Elle est aussi égale au diamètre de la boule d'où : $a = \frac{74}{\sqrt{3}}$. Le diamètre d des cercles est égal à la diagonale des faces du cube, soit $d = a\sqrt{2} = 74\sqrt{\frac{2}{3}}$. Le rayon de ces cercles, en mm est donc : $R = 37\sqrt{\frac{2}{3}}$ ou encore $\boxed{R = \frac{37\sqrt{6}}{3}}$

Raisonnement, logique

Exercice 1 (Vrai-Faux)

(a) FAUX, (b) VRAI, (c) FAUX, (d) FAUX, (e) FAUX.

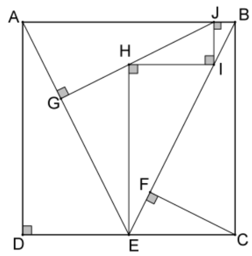
Exercice 2. Seule l'opération Combine (Inverse (), ) ne donne pas .

Exercice 3

Si le crayon de Claude est rouge, alors le crayon d'Alfred est bleu et alors, le crayon de Bernard est rouge.

Ce qui est impossible puisque Alfred, Bernard et Claude ont des crayons de couleur différente. Donc le crayon de Claude est Bleu ou Vert. S'il est Bleu, celui d'Alfred est Rouge (sinon, Claude et Bernard auraient des crayons de la même couleur).
Par contraposition, l'assertion 3 équivaut à « Si le crayon de Claude n'est pas Bleu, alors celui de Bernard est Vert. »
Ce qui, compte tenu du fait que le crayon de Claude n'est pas rouge, revient à « Si le crayon de Claude est Vert, alors celui de Bernard est Vert. »Ce qui est impossible.
Donc le crayon de Bernard est Vert. On a donc une seule possibilité :
{(C, Bleu), (A, Rouge), (B, Vert)}

Exercice 4



Les triangles rectangles ADE et BCE sont tels que AD = 2 DE et BC = 2CE Comme AD = BC, on en déduit que E est le milieu de [DC].
Notons x et $2x$ les longueurs des côtés de l'angle droit d'un quelconque de ces triangles.
Son hypoténuse a pour mesure $x\sqrt{5}$ (on applique le théorème de Pythagore) et son aire est x^2.
Notons que cette aire est le cinquième du carré de l'hypoténuse.

Posons a = DE = EC et b = JB. On obtient successivement: JI = $2b$, HI = $4b$, HE = $8b$, $\mathrm{GH} = \dfrac{8b}{\sqrt{5}}$, $\mathrm{HJ} = 2\sqrt{5}b$ et

$\mathrm{AG} = \dfrac{\mathrm{GJ}}{2} = \dfrac{9b}{\sqrt{5}}$.

<u>Exprimons l'aire de ABE de deux façons différentes</u> :
aire (ABE) = aire (AGJ) + aire (EGH) + aire (EHI) + aire (HIJ) + aire (BIJ) soit aire (ABE) =
$\dfrac{81b^2}{5} + \dfrac{64b^2}{5} + 16b^2 + 4b^2 + b^2 = 50b^2$.

D'autre part, aire (ABE) = aire (ABCD) – ((aire ADE) + aire (BCE)) = $4a^2 - 2a^2 = 2a^2$ On a donc $50b^2 = 2a^2$ d'où $a^2 = 25b^2$ et on en déduit les aires des huit triangles rectangles:
On a les résultats suivants :

triangle	ADE	CEF	BCF	BIJ	HIJ	EHI	EGH	AGJ
aire	a^2	$\dfrac{a^2}{5}$	$\dfrac{4a^2}{5}$	$\dfrac{a^2}{25}$	$\dfrac{4a^2}{25}$	$\dfrac{16a^2}{25}$	$\dfrac{64a^2}{125}$	$\dfrac{81a^2}{125}$

Toutes les aires étant des nombres entiers de cm^2, a2 doit être un multiple de 125. La plus petite valeur qui convient est $a^2 = 125$. L'aire minimum du carré ABCD est donc 500 cm^2.

Exercice 5

Comme il y a 10 places numérotées de 0 à 9, un déplacement de N places à partir de 0 aboutira au numéro correspondant au chiffre des unités de N.
Le problème revient donc à déterminer le chiffre des unités de $S = 1 + 2^2 + 3^3 + 4^4 + ... + 1233^{1233} + 1234^{1234}$
Soit $u(n)$ le chiffre des unités d'un entier positif n (ex : $u(25) = 5$). On cherche donc u(S).
<u>Remarques préliminaires</u> : Soit m et n deux entiers naturels. Alors :
1. $u(m + n) = u(u(n) + u(m))$. En effet, soit m' et n' les deux entiers naturels tels que
$m = 10m' + u(m)$ et $n = 10n' + u(n)$, $u(m)$ et $u(n)$ étant deux entiers compris entre 0 et 9, on a donc :

$m + n = 10(m' + n') + (u(m) + u(n))$. Le chiffre des unités de $m + n$ est donc celui de $u(m) + u(n)$.

2. Pour tout entier naturel k, $u(n^k) = u([u(n)]^k)$. En effet, si $n = 10n' + u(n)$, alors $n^2 = 10(10n'^2 + 2u(n)\,n') + [u(n)]^2$.

Le chiffre des unités de n^2 est donc celui de $[u(n)]^2$. On établit ensuite, de proche en proche, des résultats analogues pour n^2, n^3,… n^k.

Compte-tenu de ces remarques préliminaires, on en déduit que

$$u(S) = u\left(u(1) + \left[u(2)\right]^2 + \left[u(3)\right]^3 + \left[u(4)\right]^4 + ... + \left[u(1233)\right]^{1233} + \left[u(1234)\right]^{1234}\right)$$ ou encore :

$$u(S) = u\left(1 + 2^2 + 3^3 + 4^4 + ... + 1^{1231} + 2^{1232} + 3^{1233} + 4^{1234}\right)$$

Le chiffre des unités S est aussi celui de : $\sum_{k=0}^{123}\left(1^{10k+1} + 2^{10k+2} + 3^{10k+3} + 4^{10k+4}\right) + \sum_{k=0}^{122}\left(5^{10k+5} + 6^{10k+6} + 7^{10k+7} + 8^{10k+8} + 9^{10k+9}\right)$

- Si $u(n) = 0$ (resp 1, 5 ou 6) , $u([u(n)]^k) = 0$ (resp1, 5 ou 6 .
- Si $u(n) = 4$ (resp 9), $u([u(n)]^2)= 6$ (resp 1), $u([u(n)]^3)= 4$ (resp9)…

  Plus généralement, si $u(n) = 4$ (resp 9), $[u(n)]^k= 4$ (resp 9)si k est impair et $u(n) = 6$ (resp 1)si k est pair.
- Si $u(n) = 2$, le chiffre des unités des puissances de n effectue un cycle, soit 2; 4; 8; 6; 2; 4; 8; 6 etc..
- Si $u(n) = 8$, le chiffre des unités des puissances de n effectue un cycle. de longueur 4 : 8; 4; 2; 6; 8; 4; 2; 6 …
- Si $u(n) = 3$, le chiffre des unités des puissances de n effectue un cycle de longueur 4 t 3; 9; 7; 1; 3; 9; 7; 1 ..
- Si $u(n) = 7$, le chiffre des unités des puissances de n effectue un cycle de longueur 4 : 7; 9; 3; 1; 7; 9; 3; 1 ..

On a vu que le chiffre des unités de $(n+20)^{n+20}$ était celui de $\left(u(n+20)\right)^{n+20}$ qui est aussi celui de $\left(u(n)\right)^{n+20}$.

Or le chiffre des unités des puissances de n effectue un cycle de longueur 1, 2ou 4. Comme 20 est un multiple de 4, on en déduit donc que le chiffre des unités de $(n+20)^{n+20}$ est celui de n^n.

Il suffit donc de déterminer le chiffre des unités de n^n pour n compris entre 1 et 20 soit

$$u\left(u\left(1+1^{11}\right) + u\left(2^2 + 2^{12}\right) + u\left(3^3 + 3^{13}\right) + u\left(4^4 + 4^{14}\right) + u\left(5^5 + 5^{15}\right) + u\left(6^6 + 6^{16}\right) + u\left(7^7 + 7^{17}\right) + u\left(8^8 + 8^{18}\right) + u\left(9^9 + 9^{19}\right)\right)$$

$$= u\left(2 + (4+6) + (7+3) + (6+6) + (5+5) + (6+6) + (3+7) + (6+4) + (9+9)\right) = 4.$$

Pour calculer le total après 1234 étapes, on remarque qu'après 61 cycles de 20 étapes, on a effectué 1220 étapes.

Après ces 1220 étapes, le chiffre des unités de la somme est égal à u(61 × 4) = u(244) = 4. Le jeton est donc en position 4.

Pour les étapes allant de 1221 à 1234, il reste à calculer :

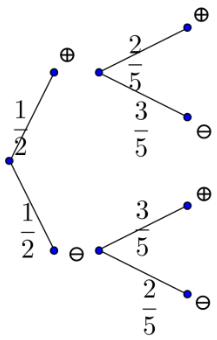
$u\left(u\left(1+1^{11}\right) + u\left(2^2 + 2^{12}\right) + u\left(3^3 + 3^{13}\right) + u\left(4^4 + 4^{14}\right) + u\left(5^5\right) + u\left(6^6\right) + u\left(7^7\right) + u\left(8^8\right) + u\left(9^9\right)\right)$. Finalement, le chiffre des unités de S est égal à $u\left(4 + (1+1) + (4+6) + (7+3) + (6+6) + 5 + 6 + 3 + 6 + 9\right) = 7$.

Le pion arrive donc à la place n°7.

Exercice 6

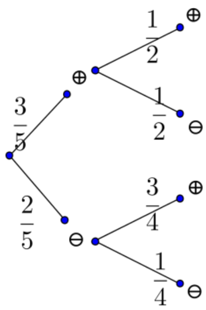
Alice : guitare basse ; Béatrice : chant ; Carine :guitare électrique ; Daphné : batterie

Probabilités, algorithmique



Exercice 1

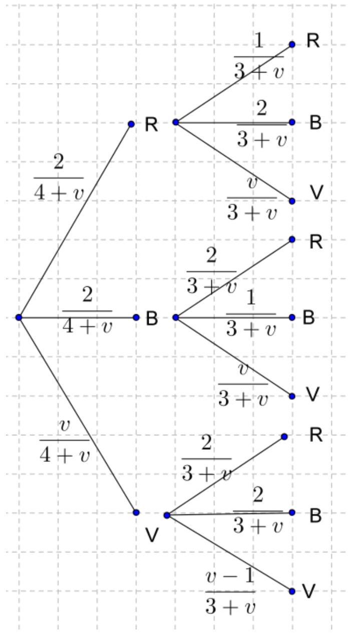
Avec six cartes, la probabilité d'obtenir un produit positif est égale à $\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}$ **soit** $\frac{2}{5}$ et celle d'obtenir un nombre négatif $\frac{3}{5}$**.**



Avec cinq cartes, dont deux marquées d'un nombre négatif, la probabilité d'obtenir un produit positif est égale à $\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}$ soit $\frac{8}{20}$ ou $\frac{2}{5}$.

La proposition de Bob n'est pas bonne.

Exercice 2



Premier sac : La probabilité d'obtenir deux billes rouges est égale à $\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}$ soit $\frac{1}{6}$. De même, la probabilité d'obtenir deux billes bleues est égale à $\frac{1}{6}$. La probabilité d'obtenir deux boules de la même couleur est donc $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$ soit $\frac{1}{3}$.

Deuxième sac : L'arbre ci-contre nous permet d'établir les différentes probabilités.

La probabilité d'obtenir deux billes rouges (resp bleues) est égale à $\frac{2}{4+v}\times\frac{1}{3+v}=\frac{2}{(4+v)(3+v)}$.

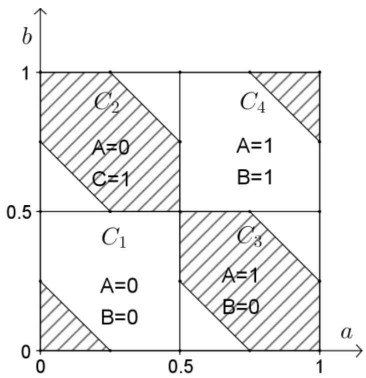
La probabilité d'obtenir deux billes vertes est égale à $\frac{v(v-1)}{(4+v)(3+v)}$

La probabilité d'obtenir deux billes de la même couleur est donc $2\times\frac{2}{(4+v)(3+v)}+\frac{v(v-1)}{(4+v)(3+v)}=\frac{v^2-v+4}{(4+v)(3+v)}$

Les deux probabilités sont égales si : $\frac{v^2-v+4}{(4+v)(3+v)}=\frac{1}{3}$. D'où $3\left(v^2-v+4\right)=(4+v)(3+v)$

$3v^2-3v+12=v^2+7v+12$. On en déduit que $2v(v-5)=0$ qui admet deux solutions qui sont 0 et 5.

Vérification ! Si v = 0, les deux sacs sont identiques et si v = 5, la probabilité d'obtenir deux boules de même couleur est $\frac{25-5+4}{(4+5)(3+5)}=\frac{24}{72}=\frac{1}{3}$. Donc v = 5.



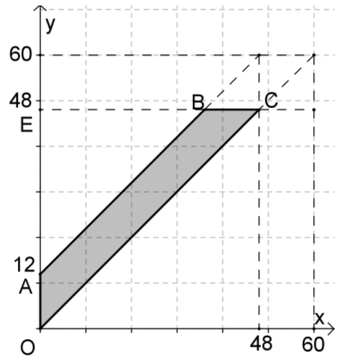
Exercice 3 Si $0 \le a < 0{,}5$, alors $A = 0$ et si $0{,}5 \le a \le 1$, alors $A = 1$.
De même, si $0 \le b < 0{,}5$, alors $B = 0$ et si $0{,}5 \le b \le 1$, alors $B = 1$.
Les différents couples (A, B) associés aux couples (a, b) sont représentés ci-contre dans un repère orthonormé.
On considère quatre cas.
1er cas : $A = 0$ et $B = 0$ alors $C = 2A + 2B$ lorsque $C = 0$.
Il faut donc que $0 \le c < 0{,}5$.
Puisque $c = 2a + 2b$ par définition, il faut donc que :
$0 \le 2a + 2b < 0{,}5$ ou $0 \le a + b < 0{,}25$
Il s'agit des points du carré C_1 qui sont au-dessus de la droite d'équation $a + b = 0$ et au-dessous de la droite d'équation $a + b = 0{,}25$

2^e cas : $A = 0$ et $B = 1$. $C = 2A + 2B$ lorsque C = 2. Il faut donc que $1{,}5 \leq c < 2{,}5$ soit $1{,}5 \leq 2a + 2b < 2{,}5$
Il s'agit des points du carré C_2 qui sont au-dessus de la droite d'équation $a + b = 0{,}75$ et au-dessous de la droite d'équation $a + b = 1{,}25$.
3^e cas : $A = 1$ et $B = 0$ C = $2A + 2B$ lorsque $C = 2$.
Comme dans le cas précédent, il s'agit des points du carré C_3 qui sont au-dessus de la droite d'équation $a + b = 0{,}75$ et au-dessous de la droite d'équation $a + b = 1{,}25$.
4e cas : $A = 1$ et $B = 1$. $C = 2A + 2B$ lorsque $C = 4$. On en déduit que $3{,}5 \leq c < 4{,}5$ soit $3{,}5 \leq 2a + 2b < 4{,}5$.
D'où $1{,}75 \leq a + b < 2{,}25$.
il s'agit des points du carré C_3 qui sont au-dessus de la droite d'équation $a + b = 1{,}75$ et au-dessous de la droite d'équation $a + b = 2{,}25$.
Les régions définies par les ensembles de points obtenus sont hachurées ci-contre.
L »aire totale hachurée est égale à l'aire de la bande de plan incluse dans le carré de côté 1 et limitée par les droites s'équations respectives $a + b = 0{,}75$ et $a + b = 1{,}25$.
C'est aussi la différence entre l'aire du grand carré de côté 1 et la somme des aires de deux triangles rectangles isocèles superposables qui, en les assemblant, forment un carré de côté 0,75.

L'aire hachurée est donc égale à $1 - 0{,}75^2 = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$

La probabilité de se situer dans cette région hachurée étant proportionnelle à son aire, on en déduit qu'elle est égale à $\frac{7}{16}$. En conséquence, la probabilité que C soit égal à $2A + 2B$ est égale à $\frac{7}{16}$.

Exercice 4



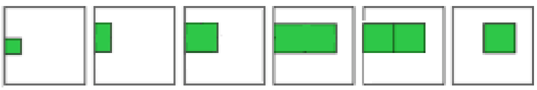
Soit x (resp. y) le temps, exprimé en minutes, écoulé entre 12h00 et l'arrivée de la 1^{ere} personne (resp. la 2^e).
Il faut : $0 \leq x \leq 48$, $0 \leq y \leq 48$ et $x \leq y$.
La rencontre aura lieu si et seulement si : $y \leq x + 12$.Roméo et Juliette se rendent aléatoirement, à partir de 12 heures, au musée. Chacun d'eux reste douze minutes puis, repart à 13 heures au plus tard. La probabilité qu'ils se rencontrent est donc égale à :
$\frac{\text{aire(OABC)}}{\text{aire(OEC)}} = \frac{7}{16}$

Exercice 5 Réponse : 28.

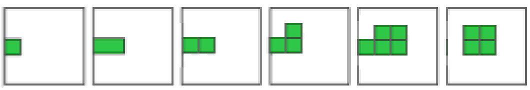
Exercice 6 Réponse : 5 déplacements

Exercice 7 *D'après le Concours Castor informatique suisse - 2011*

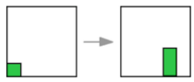
1.Programme n° 1



Programme n°2 :



2. Programme 3 : a. doubler (est) ; a doubler (est) ; [b,c] ← a. diviser () ; b. supprimer ().



Fonctions, nombres

Exercice 1

Soit a la partie entière de $\sqrt{N}$. On a : $a + 0{,}201\,3 \leq \sqrt{N} < a + 0{,}201\,4$ d'où $(a + 0{,}201\,3)^2 \leq N < (a + 0{,}2014)^2$ (1)

Si $(a + 0{,}201\,4)^2 - (a + 0{,}201\,3)^2 > 1$ (2), il existera un entier N satisfaisant à la condition (1).

La condition (2) donne : $0{,}000\,1(2a + 0{,}\,402\,7) > 1$ d'où $2a > 10\,000 - 0{,}402\,7$.

Avec a = 5 000, on obtient : $5\,000{,}201\,3^2 = 25\,002\,013{,}0405\ldots$ et $5\,000{,}201\,4^2 = 25\,002\,014{,}0406\ldots$

D'où : $5\,000{,}201\,3^2 < 25\,002\,014 < 5\,000{,}201\,4^2$. $\sqrt{25\,002\,014} = 5\,000{,}201\,3...$.

Exercice 2 On soustrait, membre par membre, la première équation de la deuxième pour obtenir :

$kx - 5y + 7 = 0$ et $(k^2 - k)x = 6$ soit $k(k-1)x = 6$.

Puisque k et x doivent prendre des valeurs entières, $k(k-1)$ doit être un diviseur de 6.

D'où $k(k-1) \in \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$. Or $k(k-1)$ est le produit de deux entiers consécutifs.

On peut donc éliminer six des huit possibilités. Il reste $k(k-1) = 2$ et $k(k-1) = 6$.

La première équation a pour solutions $k = 2$ et $k = -1$. La deuxième a pournsolutions $k = 3$ et $k = -2$.

D'après la première équation donnée, $y = \frac{1}{5}(kx + 7)$. Calculons les valeurs correspondantes de x et de y :

k	2	− 1	3	- 2
x	3	3	1	1
y	2,6	0,8	2	1

Il y a deux valeurs entières de k pour lesquelles les droites se coupent en un point à coordonnées entières.

Exercice 3 On considère la fonction définie sur l'intervalle]0, 1[de la façon suivante :

$$\begin{cases} f(x) = 2x \text{ pour } 0 < x \leq \dfrac{1}{2} \\ f(x) = 2(1-x) \text{ pour } \dfrac{1}{2} < x < 1 \end{cases}.$$

1. Pour tout $x \in]0\,;\,0{,}5]$, $f(x) \in]0, 1]$ et, pour tout $x \in]0{,}5\,;\,1[$, $f(x) \in]0, 1[$.

2. En calculant les images successives de $\frac{3}{11}$ par f, on obtient : $\frac{3}{11} \mapsto \frac{6}{11} \mapsto \frac{10}{11} \mapsto \frac{2}{11} \mapsto \ldots \mapsto \ldots \mapsto \ldots \mapsto \ldots$

On a donc $f\left(\frac{3}{11}\right) = \frac{6}{11}, f\left(f\left(\frac{3}{11}\right)\right) = f\left(\frac{6}{11}\right) = \frac{10}{11}, f\left(f\left(f\left(\frac{3}{11}\right)\right)\right) = f\left(\frac{10}{11}\right) = \frac{2}{11}$. On note $f^{(2)}\left(\frac{3}{11}\right) = \frac{10}{11}, f^{(3)}\left(\frac{3}{11}\right) = \frac{2}{11}$ …

$$f^{(4)}\left(\frac{3}{11}\right) = f\left(\frac{2}{11}\right) = \frac{4}{11}, f^{(5)}\left(\frac{3}{11}\right) = f\left(\frac{4}{11}\right) = \frac{8}{11}, f^{(6)}\left(\frac{3}{11}\right) = f\left(\frac{8}{11}\right) = 2\left(1 - \frac{8}{11}\right) = \frac{6}{11}, f^{(7)}\left(\frac{3}{11}\right) = f\left(\frac{6}{11}\right) = 2\left(1 - \frac{6}{11}\right) = \frac{10}{11}.$$

3. Existe-t-il un nombre a tel que $f(a) = a$?

Premier cas : $a \in]0\,;\,0{,}5]$, alors $2a = a$ d'où $a = 0$: Impossible

Deuxième cas : $a \in]0{,}5\,;\,1[$, alors $2(1 - a) = a$ d'où $a = \frac{2}{3}$

4. Sachant que $f^{(3)}(x) = 1$, déterminer toutes les valeurs possibles de x.

Soit x; y; z; 1 la série. Il faut procéder à rebours, c'est-à-dire déterminer z, y et x dans cet ordre.

De façon générale, soit $a \in]0, 1[$ et $b = f(a)$.

Si $0 < a \leq 0{,}5$ alors $b = 2a$. On a donc $\boxed{a = 0{,}5b}$

Si $a > 0{,}5$ alors $b = 2(1- a)$ d'où $0{,}5b = 1- a$ et, par conséquent $\boxed{a = 1 - 0{,}5b}$.

Puisque le troisième nombre de la série est z et que le quatrième est 1, alors $z = \frac{1}{2}$.

z est tel que $f(z) = \frac{1}{2}$, donc $y = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ou $y = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

Si $y = \frac{1}{4}$, alors $f(x) = \frac{1}{4}$ d'où $x = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ ou $x = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{7}{8}$

Si $y = \frac{3}{4}$, alors $f(x) = \frac{3}{4}$ d'où $x = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$ ou $x = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{5}{8}$

On vérifie que les quatre nombres obtenus conviennent ; Il y a donc quatre solutions : $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}$

5. Notons que pour $m = 3$, on a $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$ et, par conséquent $f^{(7)}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$.

Par hypothèse, on cherche des entiers m supérieurs ou égaux à 4 tels que $f^{(7)}\left(\frac{2}{m}\right) = \frac{2}{m}$.

Si $m = 4$, alors $f\left(\frac{2}{m}\right) = 1$ et 1 n'a pas d'image par f. cette solution est donc à écarter.

Si $m \geq 5$, alors $0 < \frac{2}{m} \leq \frac{2}{5} < \frac{1}{2}$. Donc $f\left(\frac{2}{m}\right) = \frac{4}{m}$.

Examinons le cas où les images successives de $\frac{2}{m}$ restent dans l'intervalle]0 ; 0,5] :

On a $f^{(2)}\left(\frac{2}{m}\right) = \frac{8}{m}, f^{(3)}\left(\frac{2}{m}\right) = \frac{16}{m}, f^{(4)}\left(\frac{2}{m}\right) = \frac{32}{m}, f^{(5)}\left(\frac{2}{m}\right) = \frac{64}{m}, f^{(6)}\left(\frac{2}{m}\right) = \frac{128}{m}, f^{(7)}\left(\frac{2}{m}\right) = \frac{256}{m}$

Le dernier calcul ne peut se faire que si $0 < \frac{128}{m} \leq \frac{1}{2}$ soit $m \geq 256$. Mais alors, la condition $f^{(7)}\left(\frac{2}{m}\right) = \frac{2}{m}$ exige que $\frac{256}{m} = \frac{2}{m}$, ce qui est impossible. **Donc les solutions, si elles existent sont comprises entre 5 et 255**.

Le calcul $f^{(6)}\left(\frac{2}{m}\right) = \frac{128}{m}$, ne peut se faire que si $0 < \frac{64}{m} \leq \frac{1}{2}$ soit $m \geq 128$.

(a) Cherchons s'il existe une solution comprise entre 128 et 255.

Si $m = 128$, $f^{(6)}\left(\frac{2}{128}\right) = 1$ et ce nombre n'a pas d'image par f. Si $m \geq 129$, alors

$f^{(7)}\left(\frac{2}{m}\right) = f\left(\frac{128}{m}\right) = 2\left(1 - \frac{128}{m}\right) = 2 \times \frac{m-128}{m}$. La condition $f^{(7)}\left(\frac{2}{m}\right) = \frac{2}{m}$ se traduit par $2 \times \frac{m-128}{m} = \frac{2}{m}$ qui équivaut à $m = 129$. Il y a donc une unique solution comprise entre 128 et 255 qui est $m = 129$.

(b) Recherchons une solution strictement comprise entre 64 et128 (si m = 64, on ne peut pas calculer $f^{(6)}\left(\frac{2}{m}\right) = f\left(\frac{64}{m}\right)$ car 1 n'apas d'image).

On alors $f^{(5)}\left(\frac{2}{m}\right)=\frac{64}{m}$ et $f^{(6)}\left(\frac{2}{m}\right)=f\left(\frac{64}{m}\right)=2\left(1-\frac{64}{m}\right)$. On a donc $f^{(7)}\left(\frac{2}{m}\right)=f\left(2\left(1-\frac{64}{m}\right)\right)$

Premier cas : $f\left(2\left(1-\frac{64}{m}\right)\right)=4\left(1-\frac{64}{m}\right)$; $f^{(7)}\left(\frac{2}{m}\right)=\frac{2}{m}$ se traduit par $4\left(1-\frac{64}{m}\right)=\frac{2}{m}$ qui équivaut à $4(m-64)=2$ qui n'a pas de solution entière.

Deuxième cas : $f\left(2\left(1-\frac{64}{m}\right)\right)=2\left(1-2\left(1-\frac{64}{m}\right)\right)=2\left(\frac{128}{m}-1\right)$. $f^{(7)}\left(\frac{2}{m}\right)=\frac{2}{m}$ se traduit par $2\left(\frac{128}{m}-1\right)=\frac{2}{m}$ qui équivaut à $2(128-m)=2$ d'où m = 127. On vérifie que $2\left(1-\frac{64}{127}\right)$ est compris entre 0,5 et 1. Donc m = 127 est l'unique solution strictementcomprise entre 64 et 128.

Par un raisonnement analogue, on établit que 43 est également solution.

Exercice 4 $S=x+y+z$, $T=x^2+y^2+z^2$ et $U=x^3+y^3+z^3$

$(x+y+z)=x^3+y^3+z^3+6xyz+3x(y^2+z^2)+3y(x^2+z^2)+3z(x^2+y^2)$

Donc $S^3=U+6xyz+3x(T-x^2)+3y(T-y^2)+3z(T-z^2)$

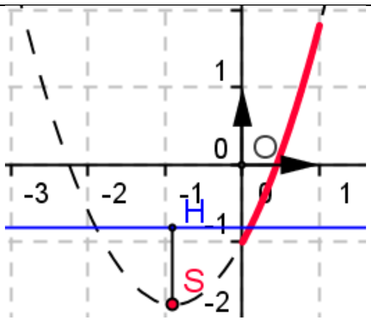
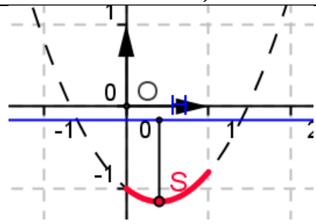
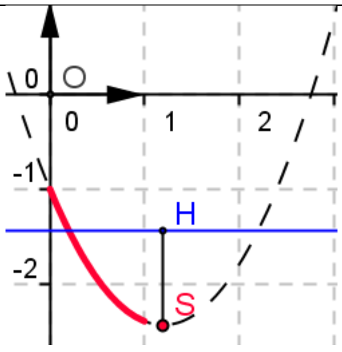
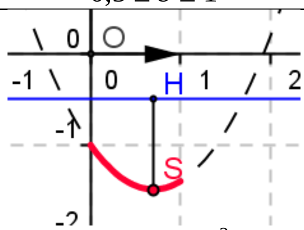
$S^3=U+6xyz+3ST-3U$ d'où $6xyz=S^3+2U-3ST$

Exercice 5

f est la restriction à [0,1] de a fonction : $x\longmapsto x^2-2bx-1$

La parabole d'équation $y=x^2-2bx-1$ a pour sommet le point S de coordonnées (b, – (b^2 + 1)).

Quatre cas à envisager :

$b\leq 0$	$0<b\leq 0{,}5$
	
Min(*f*)= *f*(0)= - 1 Max(*f*)=*f*(1) = - 2*b* L'écart est de 1 si et seulement si *b* = 0.	Min(*f*)= *f*(b)= – (b^2 + 1)). Max(*f*)=*f*(1) = - 2*b* L'écart est de 1 si et seulement si *b* = 1.
$1<b$	$0{,}5\leq b\leq 1$
 Pas de solution	 Min(*f*)= *f*(b)= – (b^2 + 1)). Max(*f*)=*f*(0) = - 1 L'équation f(0) – f(b) = 1 n'a pas de solution comprise entre 0,5 et 1.

Exercice 6

$$S=\sum_{1}^{999}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{1}^{999}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{1000}$$

Exercice 7 $\left(a+b\right)^2=a^2+b^2+2ab$ donc $2ab=\left(a+b\right)^2-\left(a^2+b^2\right)$.

Si $a+b=1$ et $a^2+b^2=2$, alors $2ab=1-2$ d'où $ab=-\frac{1}{2}$

$\left(a+b\right)^3=a^3+b^3+3a^2b+3ab^2$ donc $a^3+b^3=\left(a+b\right)^3-3\left(a^2b+3ab^2\right)$

$a^3+b^3=\left(a+b\right)^3-3ab\left(a+b\right)$ donc $a^3+b^3=1^3-3\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times 1$ soit $\boxed{a^3+b^3=\frac{5}{2}}$.

$$\left(a^3+b^3\right)\left(a+b\right)=a^4+b^3a+a^3b+b^4$$

$$=a^4+b^4+ab\left(a^2+b^2\right)$$

D'où $a^4+b^4=\left(a^3+b^3\right)\left(a+b\right)-ab\left(a^2+b^2\right)$; $a^4+b^4=\frac{5}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)\times 2$; $\boxed{a^4+b^4=\frac{7}{2}}$

Exercice 8

Soit *a*, *b* et *c* trois réels positifs tels que $ab+bc+ca=1$,

Montrons que $\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)-\left(\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}\right)\geqslant\sqrt{3}$ (1)

$\frac{1}{a+b}-\frac{ab}{a+b}=\frac{\left(ab+bc+ca\right)-ab}{a+b}$ donc $\frac{1}{a+b}-\frac{ab}{a+b}=\frac{c\left(a+b\right)}{a+b}$ d'où $\frac{1}{a+b}-\frac{ab}{a+b}=c$.

De même : $\frac{1}{b+c}-\frac{bc}{b+c}=a$ et $\frac{1}{a+c}-\frac{ac}{a+c}=b$.

Si $ab+bc+ca=1$, démontrer l'inégalité (1) équivaut donc à prouver que $a+b+c\geq\sqrt{3}$.

$$\left(a+b+c\right)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$$

Or $\frac{a^2+b^2}{2}\geq ab$, $\frac{b^2+c^2}{2}\geq ab$ et $\frac{a^2+c^2}{2}\geq ac$ donc $\underbrace{\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2+c^2}{2}+\frac{a^2+c^2}{2}}_{a^2+b^2+c^2}\geq ab+ac+bc$

D'où $\left(a+b+c\right)^2\geq 3(\underbrace{ab+ac+bc}_{1})$. On en déduit que $a+b+c\geq\sqrt{3}$.