Inria Paris Rocquencourt

Stage ouvert aux élèves de seconde

Goupes 1 et 2 lycée Pissarro Pontoise
Groupes 3 et 4 Université de Versailles

La **Pépinière académique de mathématiques** est une initiative de l'académie de Versailles et de ses partenaires, l'INRIA (Centres de Paris Rocquencourt et de Saclay Île de France) et l'Université de Versailles Saint Quentin en Yvelines. Elle a reçu le soutien de l'Institut des hautes études scientifiques. Elle organise grâce à des bénévoles des stages destinés aux élèves intéressés et talentueux *désignés par leurs établissements*. Son action est strictement institutionnelle. Elle s'inscrit dans le Plan sciences ministériel, et notamment dans le projet MathC2+.

Emploi du temps

Lundi 16 avril	**Groupe 1**	**Groupe 2**	**Groupe 3**	**Groupe 4**	**Groupe 5**
10 **11**	**Aires et espace CH**	**Géométrie plane BB**	**Nombres CL**	**Aires et espace FD**	**Probabilités, etc. MS**
12	**Repas**		**Repas ou Complément sur les méthodes de chiffrement RB**		
13 **14**	**Cryptographie AC**	**Principe du maximum PB**	**Probabilités, etc. MS**	**Nombres CL**	**Aires et espace FD**
14 h 30 **15 h 30**	**Principe du maximum PB**	**Cryptographie AC**	**Aires et espace FD**	**Probabilités, etc. MS**	**Nombres CL**
16	**Complément sur les méthodes de chiffrement RB**				

Mardi 17 avril	**Groupe 1**	**Groupe 2**	**Groupe 3**	**Groupe 4**	
10 **11**	**Géométrie plane BB**	**Aires et espace CH**	**Géométrie plane MP**	**Cryptographie AA**	**Équations, fonctions RF**
12	**Repas**		**Repas**		
13 **14**	**Équations, fonctions OD**	**Nombres CH+JM**	**Équations, fonctions RF**	**Géométrie plane MP**	**Cryptographie AA**
15 **16**	**Nombres CH+JM**	**Équations, fonctions OD**	**Cryptographie AA+MP**	**Équations, fonctions RF**	**Géométrie plane MP**

Organisation : F. GOEHRS (UVSQ)**,** F. CHAUVIN (Rectorat), G. HERIPRET (Lycée Pissarro), **Responsables :** Marie-Françoise BOURDEAU, Véronique MESSEANT, Évelyne ROUDNEFF, Pierre MICHALAK (Inspection Pédagogique régionale de mathématiques). **Intervenants :** Catherine HOUARD, Bruno BAUDIN, Anne ALLARD, Martine SALMON, Richard BREHERET, Carine LILETTE, Antoine CROUZET, Odile DELASSUS, Pierre BORNSZTEIN, Jérôme MORAND, Maud PARTIER, Romain FILLIAT, Fabien DELEN, Alexandra VIALE

Nombres

1. a. On effectue le produit de 999 par198, puis on fait la somme de tous les chiffres du résultat obtenu. Quelle est cette somme ?
   b. On effectue le produit de 9 999 par198, puis on fait la somme de tous les chiffres du résultat obtenu. Quelle est cette somme ?
   c. On effectue le produit de $\underbrace{99...999}_{\text{2012 chiffres 9}}$ 999 par198, puis on fait la somme de tous les chiffres du résultat obtenu.
   Quelle est cette somme ?

2. Les chiffres d'un entier naturel *n* sont permutés de toutes les manières possibles. La moyenne arithmétique de tous les nombres ainsi obtenus (y compris *n* lui-même) est égale à *n* .
Quelles sont les valeurs possibles de *n*
   a. Si *n* est un nombre de 2 chiffres ?
   b. Si *n* est un nombre de 3 chiffres ?

3. Un enfant possède 2012 allumettes toutes de longueur 1. Il s'amuse à construire :
des gnomons ou des carrés

   a. Avec ses 2012 allumettes, il construit le plus grand gnomon possible. Combien lui faut-il d'allumettes et combien ce gnomon comporte-t-il de petits carrés 1 × 1?

   b. Avec ses 2012 allumettes, il construit le plus grand carré possible. Combien lui faut-il d'allumettes et combien ce carré comporte-t-il de petits carrés 1 × 1?

   c. Avec ses 2012 allumettes, il souhaite construire d'abord un carré, puis le démonter et ensuite construire un gnomon comportant exactement le même nombre d'allumettes que le carré. Est-ce possible ? Si oui, quel est, parmi ces 2012 allumettes, le plus grand nombre d'allumettes utilisables pour chacune de ces deux constructions successives ?

4. À minuit, une puce sur une horloge se situe dos à l'aiguille des heures et commence à courir à vitesse constante dans le sens inverse des aiguilles. À 8h, la puce diminues a vitesse du quart, à 16h elle diminue encore sa vitesse, cette fois-ci du tiers. Exactement 24 heures après le début de sa course, la puce croise pour une 2012e fois l'aiguille des heures.
   a. À quelle position sur l'horloge était la puce à 10h du matin ?
   b. Préciser sur quel numéro de l'horloge se trouve la puce ou donner la fraction du chemin qu'il lui reste à parcourir entre deux numéros consécutifs.

5. Olivier s'amuse à trouver des polynômes $P(x)$, toujours à coefficients entiers, dont les racines (les zéros) sont des racines comme $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{3}$. Facile !
Question d'augmenter son défi, il décide ensuite d'en trouver un dont $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ serai une racine. Il finit par en obtenir un qui, à sa grande surprise, est relativement simple. Trouver quel est ce polynôme à coefficients entiers.

6. Simplifier la somme $\frac{1}{\sqrt{0}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{2011}+\sqrt{2012}}$.

7. Soit *N* un entier naturel dont le chiffre des unités est *x*. On effectue successivement les opérations suivantes :
   - On « supprime » le chiffre *x* dans l'écriture du nombre *N*
   - On retranche 2*x* au nombre obtenu.

Par exemple, si *N* = 203, la première opération donne 20, la deuxième donne 14, multiple de 7.
Prendre d'autres valeurs puis déterminer si le nombre final est un multiple de 7 si et seulement si le nombre *N* est un multiple de 7.

Équations, fonctions

1. Il est midi et Plectrude regarde sa montre. A ce moment-là, l'aiguille des heures est exactement au dessus de l'aiguille des minutes.
Plectrude se pose alors la question : « A quelle heure les aiguilles de ma montre seront-elles à nouveau l'une sur l'autre pour la première fois ? »
Répondre à sa question, sachant que les deux aiguilles tournent de manière continue.

2. Soit $f(n)=\dfrac{2n^2+n-1}{2n^2-n-1}$. Simplifier le produit $f(2)f(3)f(4)...f(99)f(100)$.

3. Soit x un nombre réel. On désigne par $\lfloor x \rfloor$ le plus grand entier qui est inférieur ou égal à x.

Exemple : $\lfloor 2,9 \rfloor = 2$ et $\lfloor -2,9 \rfloor = -3$.

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x)=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-\left\lfloor x+\dfrac{1}{x}\right\rfloor$.

a. Calculer $f\left(\dfrac{4}{9}\right)$.

b. Déterminer toutes les valeurs de x ($x > 0$) pour lesquelles $f(x)=x$.

c. Soit n un entier naturel $(n > 1)$ et $y=\dfrac{n}{n+1}$. Démontrer que $y \neq f(y)$ mais que $f(y)=f(f(y))$.

d. Démontrer qu'il existe une infinité de nombres rationnels u tels que :

- $0<u<1$
- u, $f(u)$ et $f(f(u))$ sont tous distincts
- $f(f(u))=f(f(f(u)))$.

4. En supposant que les deux expressions ont un sens et sont égales, calculer le nombre x défini par :

$$x=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+...}}}.$$

5. Résoudre l'équation $x^3+6y^3=4z^3$, où x, y et z sont des entiers relatifs.

6. Dans un repère du plan, on considère la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$.
Soit m et n deux entiers naturels strictement supérieurs à 1.
On appelle M le point de $\mathscr{P}$ d'abscisse m et N le point de $\mathscr{P}$ d'abscisse $-n$.

a. Quelle est l'ordonnée à l'origine de la droite (MN) ?

b. Quelles particularités ont les ordonnées entières y ($y > 1$) des points de l'axe des ordonnées n'appartenant pas à l'un des segments [MN]?

7. Trouver les fonctions $f:\mathbf{R}^*\to\mathbf{R}$ vérifiant :Pour tout x réel non nul, $\dfrac{1}{x}f(-x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x$ (1).

Indication : On pourra tout d'abord remplacer x par $-\dfrac{1}{x}$ dans la relation (1).

8. Soit f la fonction définie sur **R** par : $f(x)=\begin{cases}4 & \text{si } x<-4\\ -x & \text{si } -4\le x\le 5\\ -5 & \text{si } x>5\end{cases}$.

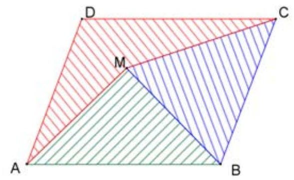
Représenter dans un repère orthonormé la fonction g définie par $g(x)=\sqrt{25-[f(x)]^2}$ et préciser la nature de la courbe sur chacun des intervalles $]-\infty, -4[$, $[-4, 5]$ et $]5, +\infty[$.

Aires et espace

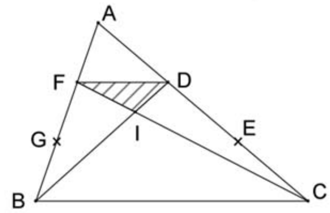
1. Soit ABC un triangle d’aire 1.
   a. Soit B' le point la demi-droite [AB] tel que $AB' = 2AB$, C' le point de la demi-droite [BC] tel que $BC' = 3BC$ et A' le point la demi-droite [CA] tel que $CA' = 5CA$.
   Déterminer l’aire du triangle $A'B'C'$.
   b. Soit *m*, *n* et *p*, trois entiers naturels supérieurs à 2.
   Soit B'' le point la demi-droite [AB] tel que $AB' = mAB$, C'' un point de la demi-droite [BC] tel que $BC' = nBC$ et A'' le point la demi-droite [CA] tel que $CA' = pCA$.
   Déterminer l’aire du triangle $A''B''C''$.

2. Soit ABCD un trapèze dont la base [DC] a une longueur triple de celle de la base [AB]. Si M est le milieu de [AD], à quelle fraction de l'aire du trapèze est égale l'aire du triangle BDM ?

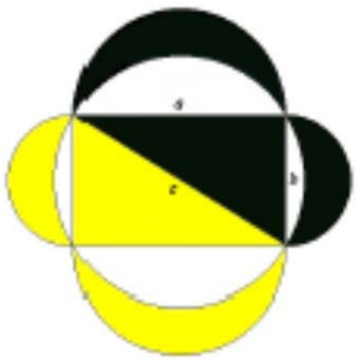
3. Soit ABCD un parallélogramme et M un point intérieur à ce parallélogramme.
Où placer M pour que les trois aires délimitées par les droites (MA), (MB), (MC) et le pourtour de ABCD soient égales ?



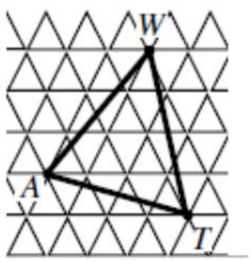
4. Calculer l’aire du triangle IDF en fonction de l’aire du triangle ABC sachant que D, E sont des points du segment [AC] tels que AD =DE = EC et F, G sont des points du segment [AB] tels que AF = FG = GB.



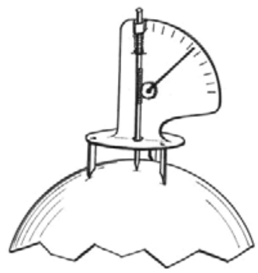
5. Une compagnie veut créer un nouveau logo très rutilant pour remplacer sa vieille enseigne extérieure. Celui-ci sera formé d’un rectangle d’or inscrit dans un cercle et de dimensions (en mètres) : 1 et $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
De plus, chaque côté du rectangle sera le diamètre d’un demi-cercle qui sera rajouté au logo comme sur la figure ci-contre.
La compagnie veut plaquer le rectangle et les lunules de son logo d’une mince couche d’or 24 carats.
Sachant que l’or en feuilles minces de 24 carats se vend 0,05 $ le centimètre carré, combien en coûtera-t-il à la compagnie pour redorer son enseigne ?



6. Le quadrillage est formé de petits triangles équilatéraux ayant des côtés de longueur 1. Les sommets du triangle *WAT* sont aussi des sommets des petits triangles équilatéraux. Quelle est l’aire du triangle *WAT* ?



7. Un sphéromètre est un appareil qui permet de calculer le rayon d'une sphère. Sa base est constituée de trois pieds formant un triangle équilatéral ABC de côté *a*. Le pointeau est porté par la droite perpendiculaire au plan de la base et passant par le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
Les trois pieds reposant sur la sphère, on déplace le pointeau jusqu'à ce qu'il touche la sphère et l'appareil indique une distance *h* de l’extrémité du pointeau au plan de la base. Exprimer le rayon de la sphère en fonction de *a* et de *h*.



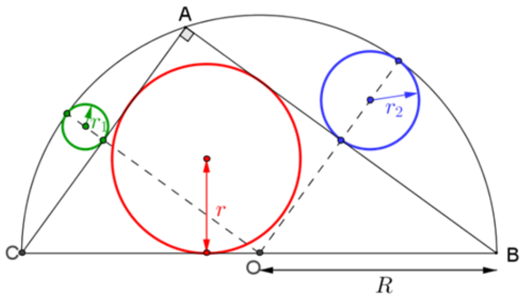
Géométrie plane

1. Soit un cercle et un point P qui lui est extérieur. À partir de P on trace des droites qui, en traversant le cercle, définissent des cordes du cercle.
Montrer que tous les points milieu de ces cordes sont situés sur un même cercle.

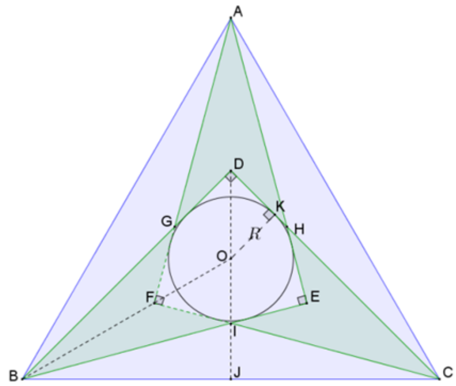
2. Soit ABC un triangle rectangle en C, A' et B' deux points appartenant respectivement aux segments [CA] et [CB] tels que : (A'B') // (AB).
On pose AB = c, BC = a, CA = b, A'B' = c', B'C = a' et CA' = b'.
Démontrer que $cc' = aa' + bb'$.

3. Soit ABM un triangle quelconque.
   a. Construire un triangle ABC isocèle de même périmètre que le triangle ABM.
   b. Montrer que, pour tout point M du plan, aire (ABC) ≥ aire (AMC).

4. On considère un triangle ABC rectangle en A inscrit dans un demi-cercle de rayon R.
Soit r le rayon du cercle inscrit dans ce triangle, r_1 et r_2 les rayons des cercles tangents au demi-cercle et à l'un des côtés de l'angle droit.
Démontrer que $r^2 = 8r_1r_2$.
On posera $2b$ = AC et $2c$ = AB

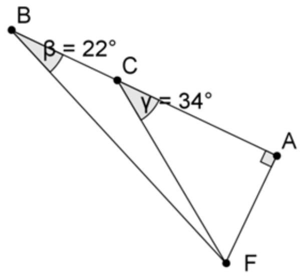


5. Soit ABC un triangle équilatéral de côté a et de centre O.
Les points D, E et F sont tels que les triangles ABE, BCD et ACF sont rectangles-isocèles.
Par intersection, ces triangles définissent un hexagone DGFIEH. Soit K le pied de la perpendiculaire à [DH] passant par O. En admettant que le cercle de centre O et de rayon OK est inscrit dans l'hexagone DGFIEH, calculer le rayon R de ce cercle.



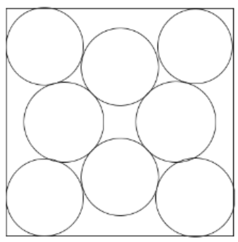
6. Gardons le cap
Un bateau possède un certain cap.

A un instant donné, il est situé en B et le commandant repère un récif sous un angle de 22 °.
Un mile plus loin, le bateau est en C et le commandant repère le même récif sous un angle de 34 °.
Pour des raisons de sécurité, le commandant veut passer à au moins un mile du récif.
Le commandant doit-il changer son cap ?



7. Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère les points A (0,0), B (2,0), C (2,1), D (0,3) et E (1,3).
Déterminer une mesure de l'angle $\widehat{CAE}$.

8. Alex est parvenu à placer huit assiettes identiques sur une table carrée de côté 1.
Cette configuration est supposée optimale (il est impossible d'arranger ces assiettes sur un carré plus petit ni de disposer huit assiettes plus grande sur le même carré.
Trouver le rayon des assiettes.



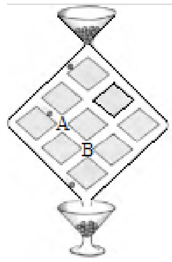
Probabilités, combinatoire, logique, stratégie

1. Jacques s'amuse avec de drôles de dés dont les faces opposées montrent un même chiffre : 1, 2 ou 3. Chacun de ces trois résultats est donc équiprobable. Il s'invente un jeu dont le but est d'obtenir le chiffre 3. Il commence par lancer un seul dé. Tant qu'il n'obtient aucun 3, il fait un nouveau lancer, mais lance cette fois un nombre de dés égal au plus grand chiffre obtenu lors du lancer précédent. En moyenne, combien de lancers seront nécessaires avant d'obtenir un 3 ?

2. Alice et Bob expérimentent le jeu suivant :
On commence avec 30 jetons. À tour de rôle, chaque joueur ôte du jeu 1, 2, 4, 8 ou 16 jetons (une puissance de 2). Un joueur qui ne peut rien enlever perd la partie. Alice a le choix de commencer ou non. Le devrait-elle ? Quelle est sa stratégie ?

3. On organise un tournoi de bras-de-fer entre Maxime Lacasse et Hercule Lamontagne. Le tournoi comporte autant de rondes que nécessaire, le gagnant étant le premier qui parvient à gagner 2 rondes de plus que son adversaire. (Chaque ronde se termine par une victoire d'un des deux participants.). On estime qu'Hercule a une probabilité de 2/3 de gagner une ronde en particulier.
Quelle est la probabilité qu'Hercule gagne le tournoi ?

4. Dans le jeu ci-contre, une bille quittant le réservoir ne peut que descendre.
Quand une bille arrive à un carrefour où un choix s'offre à elle, elle a autant de chance d'aller d'un côté que de l'autre.
Lorsqu'une bille quitte le réservoir, quelle est la probabilité qu'elle passe par le carrefour A ?
Et quelle est la probabilité qu'elle passe par le carrefour B ?



5. Une île est peuplée de « sages » qui disent toujours la vérité et de « menteurs » qui mentent tout le temps. 25 habitants de cette île forment une queue et chaque personne de cette queue, hormis la première, affirme que la personne, devant elle dans la queue, est un menteur. La première personne de la queue, elle, affirme que toutes les personnes derrière elle dans la queue sont des menteurs. Combien de menteurs figurent dans cette queue ?

6. Anne et Claire ont disposé sur la table 38 allumettes.
Elles prennent chacune leur tour dans le tas un nombre d'allumettes compris entre 1 et 4. La joueuse qui a pris la dernière allumette a perdu.
Il s'agit de montrer que la joueuse qui commence à jouer possède une stratégie gagnante. On suppose qu'Anne tire la première et on appelle tour le fait que Claire puis Anne tire chacune des allumettes (le premier tour commence après le premier tirage d'Anne).

a. Montrer qu'Anne peut toujours faire en sorte que le nombre d'allumettes tirées lors d'un tour soit 5.
b. Montrer qu'Anne peut toujours laisser sur la table un nombre égal à la somme de 1 et d'un multiple de 5 (on le dit « congru » à 1)
c. Trouver une stratégie gagnante pour Anne.

7. Alphonse et Bérénice participent à un jeu selon les règlements suivants :
• Au départ, il y a un tas de N cailloux, $N \geq 2$.
• Les deux jouent à tour de rôle, en commençant par Alphonse. À son premier tour, Alphonse doit enlever au moins 1 et au plus $N-1$ cailloux du tas.
• Si un joueur enlève k cailloux lors de son tour, l'autre doit enlever au moins 1 et au plus $2k-1$ cailloux au tour suivant.
• Le joueur qui enlève le dernier caillou gagne.

a. Déterminer qui devrait gagner lorsque $N = 7$ et expliquer la stratégie gagnante.
b. Déterminer qui devrait gagner lorsque $N = 8$ et expliquer la stratégie gagnante.
c. Déterminer toutes les valeurs de N pour lesquelles il existe une stratégie gagnante pour Bérénice. Expliquer cette stratégie.