Calcul numérique et littéral

Exercice 1

Résoudre sans calculatrice l'équation : $\sqrt[4]{6561}.12^{\sqrt{x}} = 6^x$

Exercice 2

Déterminer les chiffres *x*, *y* et *z* de telle sorte que le nombre N dont l'écriture décimale est $33xy49z$ soit un multiple de 693

Exercice 3

On considère la suite de nombres entiers : 16, 1 156, 111 556, 11 115 556, … dont chacun est obtenu en intercalant les chiffres 1 et 5 en position centrale dans le précédent. Pourquoi ces nombres sont-ils tous des carrés ?

Exercice 4

Exprimer $A(x,y)=(x-y)^4$ comme fonction de $s=x+y$ et $p=xy$.

Exercice 5

Soit *a* et *b* deux nombres positifs tel que $\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b}=1$. Montrer que $\dfrac{a}{1+b^2}-\dfrac{b}{1+a^2}=a-b$.

Exercice 6

Montrer que pour tout triplet (a,b,c) de nombres réels positifs, on a l'inégalité :

$$a^2+4b^2+8c^2 \geqslant 3ab+4bc+2ca$$

Dans quels cas y a-t-il égalité ?

Exercice 7

Résoudre l'équation suivante, dans laquelle *x*, *y* et *z* sont des entiers naturels :

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{16}=1{,}4375.$$

Exercice 8

Un nombre entier s'écrit avec trois chiffres. En ôtant le premier, le second ou le troisième, on obtient trois nombres de deux chiffres dont la somme est la moitié du nombre initial. Quel est ce nombre ?

Exercice 9

Montrer que, pour tous nombres réels strictement positifs *A*, *B*, *C*, *a*, *b* et *c* :

$$\text{Si } \frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c} \text{ Alors } \sqrt{Aa}+\sqrt{Bb}+\sqrt{Cc}=\sqrt{(A+B+C)(a+b+c)}$$

Exercice 10

On connaît la somme S de trois nombres *x*, *y* et *z*. On connaît la somme T de leurs carrés et la somme U de leurs cubes. Exprimer leur produit *xyz* en fonction de S, T et U.

Exercice 11

Soit *n* un entier naturel non nul. Le nombre $N=n^4+4^n$ est-il premier ?

Exercice 12

Parmi les entiers 101, 10 101, 1 010 101, … (nombres formés de 1 et 0 alternés), lesquels sont premiers ?

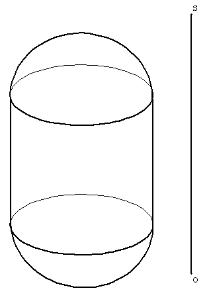
Exercice 13

Soit *n* un entier supérieur ou égal à 1 tel que $\sqrt{1+12n^2}$ soit un entier.

Montrer que $2+2\sqrt{1+12n^2}$ est le carré d'un entier.

Fonctions et équations

Exercice 1



Une citerne a la forme d'un cylindre prolongé par deux hémisphères. On veut graduer une jauge donnant le volume de liquide qu'elle contient en fonction de la hauteur dudit liquide (on suppose naturellement que cette hauteur est visible de l'extérieur ou qu'un système de vases communicants permet de la connaître).
On donne les dimensions du cylindre : hauteur 2 m, rayon 40 cm.
On donne le volume V de la calotte sphérique de hauteur h d'une boule de rayon R : $V = \frac{\pi}{3}h^2\left(3R - h\right)$
Quelle est l'allure de la courbe représentative de la fonction qui à la hauteur du liquide contenu associe son volume ?

Exercice 2
Un homme rentre chez lui à pieds à la vitesse de 5 km/h. À 2km de sa maison, son chien le rejoint et, immédiatement, effectue des allers er retours entre l'homme et la maison, à la vitesse de 15km/h. On suppose que les volte-face de l'animal sont instantanées. Quelle distance le chien a-t-il parcourue lorsque l'homme passe la porte de son domicile ?

Exercice 3
On donne un nombre réel b et on considère la fonction $f : \begin{pmatrix} [0,1] \to \mathbf{R} \\ x \mapsto x^2 - 2bx - 1 \end{pmatrix}$. Est-il possible que la différence entre les valeurs maximum et minimum de cette fonction soit égale à 1 ?

Exercice 4
Trouver les fonctions f de **N** dans **N** vérifiant :

Pour tout entier naturel n, $f\left(n\right) + f\left(f\left(n\right)\right) + f\left(f\left(f\left(n\right)\right)\right) = 3n$

Exercice 5
La fonction f vérifie la propriété :

$$\begin{cases} f\left(4\right) = 10 \\ \text{pour tous réels } x \text{ et } y, f\left(x+y\right) = f\left(x\right) + f\left(y\right) + xy \end{cases}$$

Déterminer $f\left(2010\right)$.

Exercice 6
Déterminer les entiers naturels m et n tels que $\frac{1}{m} + \frac{4}{n} = \frac{1}{12}$, sachant que n est impair.

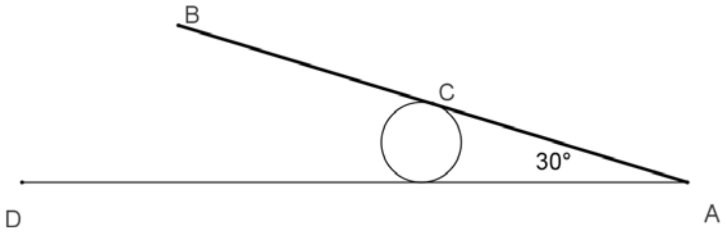
Exercice 7
On additionne deux à deux les nombres a, b, c, d et e, tous distincts. On obtient les sommes : 21, 26, 35, 40, 49, 51, 54, 60, 65 et 79. Trouver a, b, c, d et e.

Exercice 8
Donner une valeur approchée au centième de $N = \sqrt[3]{5 + 2\sqrt{13}} + \sqrt[3]{5 - 2\sqrt{13}}$. On pourra être amené à utiliser la fonction $x \mapsto x^3 + 9x - 10$.

Exercice 9
Déterminer la fraction irréductible $\frac{p}{q}$ la plus proche de $\frac{3}{7}$ (et distincte de $\frac{3}{7}$) parmi celles dont le dénominateur est inférieur à 100.

Géométrie

Exercice 1



Une barre métallique [AB] repose en A sur le sol horizontal (AD) et en son milieu C sur un fut cylindrique. Le fut roule. Quelle distance parcourt-il jusqu'à ce que B touche le sol ?

Exercice 2

On considère un carré ABCD de côté 1. Un point P est situé à l'intérieur de ce carré. Montrer que, des quatre distances PA, PB, PC, PD :

- Une au plus est supérieure à $\frac{\sqrt{5}}{2}$
- Deux au plus sont supérieures à 1
- Trois au plus sont supérieures à $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 3

Construire une droite passant par un point A commun à deux cercles C et C'et qui détermine sur ces deux cercles des cordes de même longueur distinctes de la corde commune.

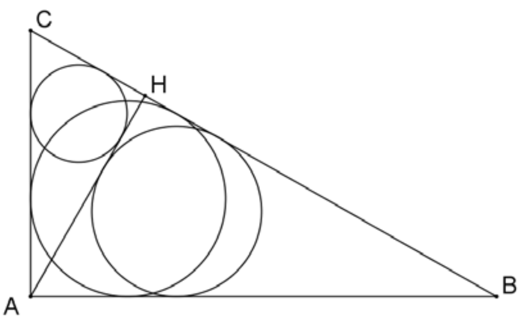
Exercice 4

À tout nombre réel m, on associe l'ensemble D_m des points M du plan dont les coordonnées x et y satisfont la condition :

$$(2m-1)x-(m+2)y-(4m+3)=0$$

1. Montrer que les ensembles D_m sont des droites.
2. Ces droites recouvrent-elles tout le plan ? (autre façon de poser la question : peut-on affirmer que par tout point du plan il passe une des droites D_m ?

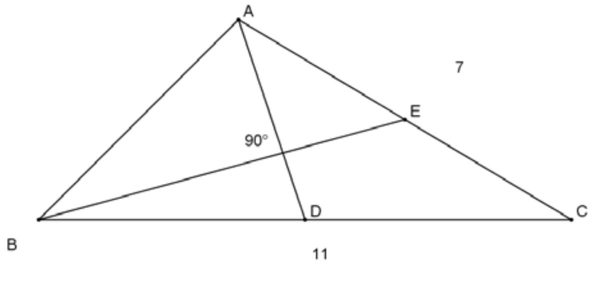
Exercice 5



On considère un triangle ABC rectangle en A et sa hauteur [AH]. Montrer que les rayons des cercles inscrits dans les triangles ABC, ACH et ABH ont pour somme AH.

On pourra commencer par montrer que le rayon du cercle inscrit dans un triangle rectangle d'hypoténuse a et de cathètes b et c est $\frac{b+c-a}{2}$.

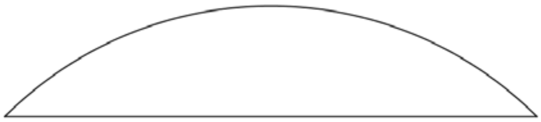
Exercice 6



Dans le triangle ABC, les médianes issues de A et C sont perpendiculaires. On donne les mesures de deux côtés : AC = 7 et BC = 11.
Quelle est la longueur AB ?

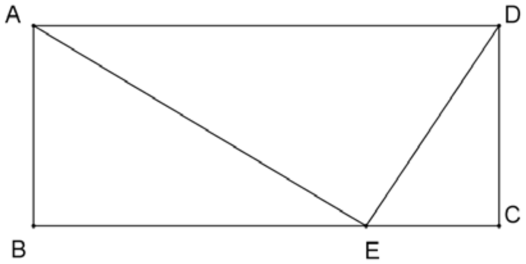
Aires et volumes

Exercice 1



Un tunnel de chemin de fer a une section en forme de segment circulaire. La hauteur du tunnel est 5m et sa largeur au sol $10\sqrt{3}$. Quelle est l'aire de cette section ?

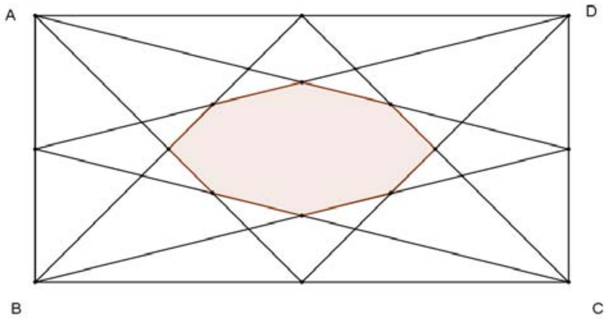
Exercice 2



Le rectangle ABCD est tel qu'il existe sur [BC] un point E tel que AE = 12, ED = 5 et AD = 13.

Quelle est l'aire du rectangle ABCD ?

Exercice 3



En joignant le milieu de chaque côté d'un rectangle aux extrémités du côté opposé, on obtient un octogone.

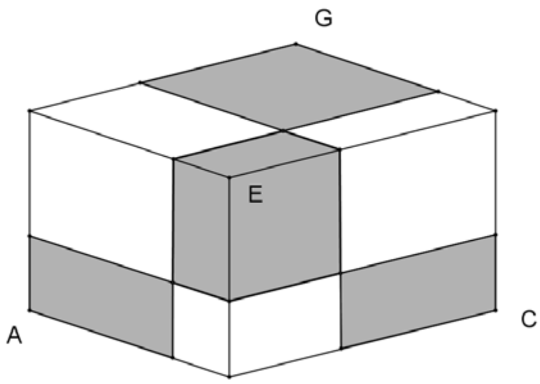
Quelle fraction de l'aire du rectangle l'aire de l'octogone représente-t-elle ?

Exercice 4

Un parallélépipède est coupé en huit morceaux par des plans parallèles aux faces.

Le volume du morceau de sommet A est 9, le volume du morceau de sommet C est 12, le volume du morceau de sommet E est 8 et le volume du morceau de sommet G est 24.

Quel est le volume du parallélépipède ?



Exercice 5

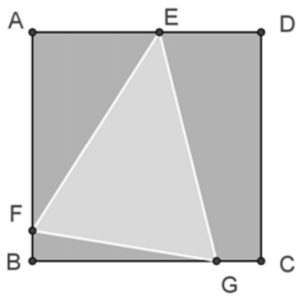
Les diagonales des faces d'un parallélépipède rectangle ont pour longueurs 7, 8 et 9. Quel est le volume du parallélépipède ?

Exercice 6

Deux des médianes du triangle ABC sont perpendiculaires. L'une a pour longueur 9 et l'autre 12. Quelle est l'aire du triangle ABC ?

Exercice 7

On donne un triangle EFG isocèle en E, tel que EF =3 et FG = 2. Quelles sont les aires maximum et minimum d'un carré ABCD construit de telle sorte que les points E, F et G soient situés sur ses côtés (la figure proposée n'est pas la seule possible).



Combinatoire, logique, stratégie

Exercice 1

On considère un carré de côté 5, divisé en 25 carrés unité. Dans chacune de ces 25 cases, on place un entier choisi parmi 1, 2, 3, 4 et 5, de sorte qu'aucune ligne, aucune colonne et aucune des deux grandes diagonales ne contienne deux nombres identiques.

On appelle **score** d'un tel carré la somme des nombres figurant sur la sous-diagonale (du haut à gauche en bas à droite).

1. Est-il possible que le score soit 20 ?
2. Quel est le plus grand score possible ?

Exercice 2

On appelle **tétramino** toute figure faite de quatre carrés identiques accolés par au moins un côté. On distingue éventuellement deux tétraminos dont l'un est obtenu à partir de l'autre par retournement, mais on ne les distingue pas si l'un est obtenu à partir de l'autre par rotation.

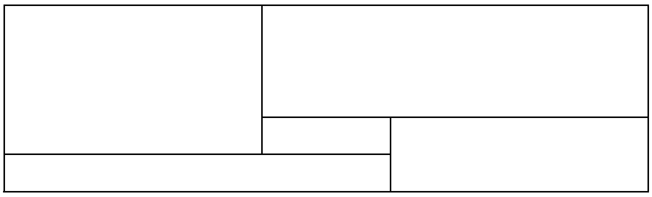
1. Prouver qu'il existe sept types de tétraminos ;
2. Est-il possible de placer sept tétraminos de types différents construit sur le même carré unité dans un rectangle de dimension 4×7 sans chevauchement ?

Exercice 3

On appelle **nombre escalier** tout nombre entier dont les chiffres, tous différents, se succèdent, de gauche à droite, dans l'ordre croissant. Les nombres 12, 479, 2 389 sont des nombres escaliers.

Combien y a-t-il de nombres escaliers ?

Exercice 4



On dit qu'un rectangle est **semi-entier** si la longueur de l'un au moins de ses côtés est un entier. Un rectangle est pavé en cinq rectangles plus petits comme sur la figure ci-contre. On suppose que tous les petits rectangles sont semi-entiers. Le grand rectangle est-il semi-entier ?

Exercice 5

On considère une grille 4 par 4 constituée de 16 cases blanches. Combien au minimum faut-il noircir de cases pour qu'en éliminant deux colonnes quelconques et deux lignes quelconques on soit certain qu'il reste au moins une case noire ?

Exercice 6

Chacun des membres d'un jury de 100 personnes doit classer trois candidats A, B et C. Les bulletins de vote portent obligatoirement les trois lettres classées dans l'ordre 1, 2 et 3.

On constate que 76 membres du jury ont classé A avant B et que 67 ont classé B avant C. Combien, au maximum, ont classé C avant A ?

Exercice 7

Un homme quitte Paris à 8 heures et parvient à Marseille le même jour à 20 heures. Il y passe la nuit et repart vers Paris le lendemain à 8 heures, pour parvenir à Paris à 20 heures, en suivant exactement le même trajet, en sens inverse.

Montrer qu'il existe, sur ce trajet, un endroit où l'homme est passé à l'aller et au retour à la même heure.

Exercice 8

Une société se divise en « sages » (qui disent toujours la vérité) et en « menteurs » (qui mentent toujours). Sept personnes de cette société ont pris place autour d'une table ronde. Chacun peut alors dire : « J'ai pour voisins un sage et un menteur ».

Combien y a-t-il de « sages » autour de cette table ? Même problème avec 2 010 personnes.

Divers

Exercice 1

Calculer la somme $S=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+...+\frac{1}{998\times 999}+\frac{1}{999\times 1000}$

Exercice 2

Le développement décimal du nombre $\frac{1}{97}$ est périodique : la même suite de chiffres (la période) se répète. Elle est très longue. Quels en sont les trois derniers chiffres ?

Exercice 3

Combien existe-t-il de nombres entiers de quatre chiffres s'écrivant avec les chiffres 1, 2, 3, 4 et 5, chacun étant utilisé au plus une fois ?
Quelle est la somme de tous ces nombres ?

Exercice 4

Si on lance dix fois de suite une pièce de monnaie bien équilibrée, quelle est la probabilité de faire apparaître au moins deux « Face » consécutives ?

Exercice 5

101 jetons, numérotés de 1 à 101, sont répartis en deux tas A et B. Le jeton 40 est dans le tas A. On l'en sort pour le mettre dans le tas B. Ce faisant, la moyenne des numéros des jetons du tas A augmente de 0,25 et la moyenne des numéros des jetons du tas B augmente également de 0,25. Combien y avait-il de jetons dans les tas A et B ?

Exercice 7

La fonction *f* est définie sur **N*** par : $\begin{cases} f(1)=0 \\ f(2)=1 \\ \text{pour tout } x>2,\ f(x)=x-f(x-1)-f(x-2) \end{cases}$

Calculer $f(2010)$.