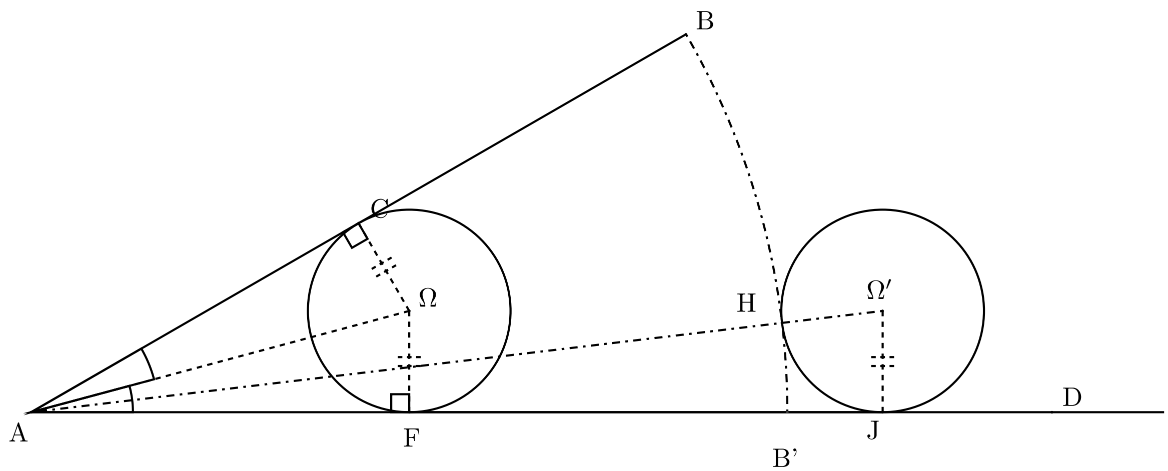
Pépinière de Mathématiques

Versailles, 29 et 30 avril 2010

Géométrie - Éléments de solutions

Exercice 1



La section du fût par un plan vertical contenant (AB) est un disque qui, initialement, touche le sol en F. Lorsque le fût roule, la barre décrit un arc de cercle Γ de centre A et de rayon AB. Lorsque celle-ci touche le sol en B’, le disque est tangent en H à l’arc de cercle Γ. Les points A, H et Ω' sont alignés et le fût a parcouru la distance FJ.

Posons $r = \Omega\text{F}$ et $d = \text{AB}$ .On a : AB = AH = AB’= d, AC = AF = $\dfrac{d}{2}$, $\text{A}\Omega' = d + r$.

Dans le triangle AJΩ', rectangle en J : AJ= $\sqrt{(r+d)^2 - r^2} = d\sqrt{1 + 2\dfrac{r}{d}}$.

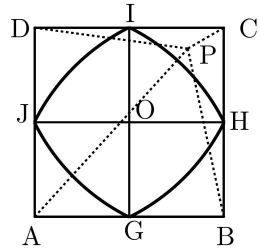
Donc $\text{FJ} = \text{AJ} - \text{AF} = d\left(\sqrt{1+2\dfrac{r}{d}} - \dfrac{1}{2}\right)$.

$\widehat{\text{FAC}} = 30^\circ$ et (AΩ) est la bissectrice de $\widehat{\text{FAC}}$ donc $\widehat{\text{FA}\Omega} = 15^\circ$.

Dans le triangle AFΩ rectangle en F : $\tan 15^\circ = \dfrac{r}{\text{AF}} = \dfrac{2r}{d}$. D’où $\dfrac{2r}{d}$=tan 15°. On en déduit que FJ=$d\left(\sqrt{1+\tan 15^\circ} - \dfrac{1}{2}\right)$.

Exercice 2 Soit ABCD un carré de centre O, de côté 1 et I, J, K, L les milieux de ses côtés.
Dans tout ce qui suit, on précise qu’un point P appartenant à l’intérieur du carré n’appartient pas aux bords de ce carré.

1. Des quatre distances PA, PB, PC, PD, une au plus est strictement supérieure à $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$:



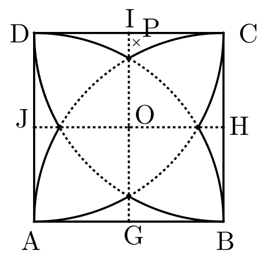
$\text{AI} = \text{AH} = \sqrt{1+\dfrac{1}{4}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

De même : $\text{BJ} = \text{BI} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$, $\text{CJ} = \text{CG} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$, $\text{DG} = \text{DH} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

On a représenté ci-contre les arcs d’extrémités H-I, I-J, J-G et G-H, inclus dans le carré ABCD et qui ont pour centres respectifs A, B, C, D.

L'ensemble des points P du carré tels que PA $> \frac{\sqrt{5}}{2}$ (respectivement : PB $> \frac{\sqrt{5}}{2}$, PC $> \frac{\sqrt{5}}{2}$ et PD $> \frac{\sqrt{5}}{2}$) est l'intérieur du triangle mixtiligne CHI (respectivement : DIJ, AJG et BGH).
L'intersection de deux ces ensembles est vide.
En conséquence : Si P est un point intérieur au carré, l'une au plus des distances PA, PB, PC ou PD est strictement supérieure à $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

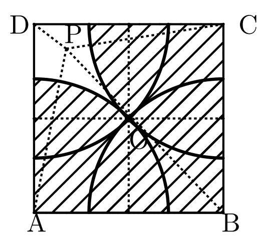
2. Des quatre distances PA, PB, PC, PD, deux au plus sont strictement supérieures à 1 :



On a représenté ci-contre les quarts de cercles d'extrémités B-D et C-A, inclus dans le carré ABCD et qui ont pour centres respectifs A et C d'une part, B et D d'autre part. L'ensemble des points P du carré tels que PA > 1 (respectivement PC > 1) est l'intérieur du triangle mixtiligne CDB (respectivement : DAB).Ces deux ensembles n'ont pas de points communs.

On ne peut donc avoir simultanément PA > 1 et PC > 1. En conséquence : Si P est un point intérieur au carré, deux au plus des distances PA, PB, PC ou PD sont strictement supérieures à 1.

3. Des quatre distances PA, PB, PC, PD, trois au plus sont strictement supérieures à $\frac{\sqrt{2}}{2}$:
Puisque le carré ABCD a pour côté 1, ses diagonales ont pour longueur $\sqrt{2}$.
Donc OA = OB = OC =OD = $\frac{\sqrt{2}}{2}$.



Supposons que P soit un point intérieur au carré tel que PA $> \frac{\sqrt{2}}{2}$, PB $> \frac{\sqrt{2}}{2}$ et PC $> \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Alors P est extérieur aux quarts de disques de centres respectifs A, B, et C et passant par O hachurés sur la figure ci-contre.

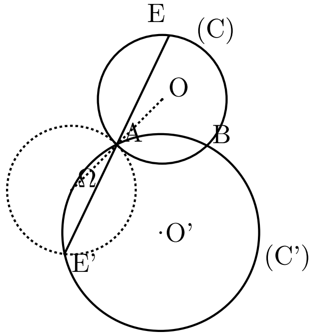
P appartient donc à la région non hachurée incluse dans le quart de disque de centre D et de rayon DO, frontières non comprises. On en déduit que PD $< \frac{\sqrt{2}}{2}$.

En conséquence : Si P est un point intérieur au carré, trois au plus des distances PA, PB, PC ou PD sont strictement supérieures à $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Remarque : Si P est en O, PA = PB = PC = PD = $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 3
Soit A un point du plan, (C) et (C') deux cercles distincts passant par A. Trois cas sont à envisager :

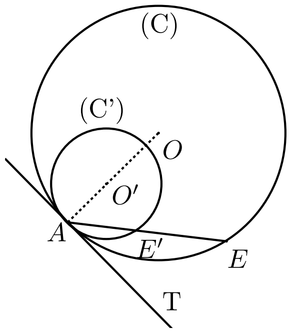
1. Premier cas : (C) et (C') sont sécants.



Supposons qu'il existe une droite passant par A déterminant sur (C) et (C') deux cordes de même longueur. Elle recoupe alors ces cercles en deux points symétriques par rapport à A. Soit s la symétrie de centre A et Γ l'image de (C) par s.

(C) a pour centre O et passe par A donc Γ a pour centre $\Omega = s(\mathrm{O})$ et passe par s(A) = A. (C') et Γ ont le point A en commun. D'autre part, les points O', Ω et A ne sont pas alignés (En effet : Ω est un point de (AO) mais O' n'appartient pas à la droite (AO) puisque (C) et (C') sont sécants). Donc (C') et Γ ne sont pas tangents en A, ils sont sécants. Soit E' le deuxième point d'intersection de (C') et Γ.
Posons E = s(E'). Puisque A est le milieu de [E'E], E est un point de (E'A). Et comme E' est un point de (C'), E est un point de (C). La droite (E'A) détermine donc sur les cercles (C) et (C') deux cordes [EA] et [E'A] qui sont de même longueur.

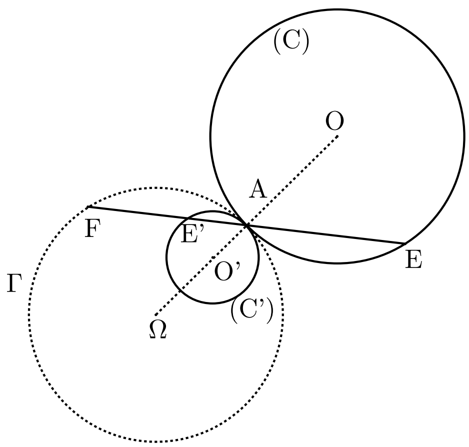
2. Deuxième cas : (C') est tangent intérieurement à (C) en A.



Soit (d) une droite passant par A.

Si (d) n'est pas tangente à (C) et (C'), elle recoupe (C') et (C) en deux points distincts E et E' . E' est un point du segment [AE] distinct de A et de E donc AE' < AE. Dans ce cas, le problème n'a pas de solution.
Si (d) est la tangente commune à (C) et (C'), alors A = E = E' et (d) détermine sur les cercles (C) et (C') deux cordes de longueur nulle.

3. Troisième cas : (C) et (C') sont tangents extérieurement en A.



Soit (d) une droite passant par A.
Si (d) n'est pas tangente à (C) et (C'), elle recoupe (C') et (C) en deux points distincts E et E'. Soit Γ l'image de (C) dans la symétrie s de centre A. Posons F = s(E). Puisque E est un point de (C), F est un point de Γ . De plus, E est un point de (d) et toute droite contenant A est invariante par A. Donc F est un point de (d). On en déduit que (d) recoupe Γ en F tel que AE = AF.
Soit R et R' les rayons respectifs des cercles (C) et (C').
Si $R \neq R'$, les cercles Γ et (C') sont distincts et tangents intérieurement.
On se retrouve dans le cas précédent : AE' < AF, donc AE' < AE et le problème n'a pas de solution.

Si $R = R'$, les cercles Γ et (C') sont confondus. E' = F et AE = AE'. On en déduit que si deux cercles (C) et (C') ont le même rayon et sont tangents extérieurement en A, toute droite passant par A détermine sur ces cercles deux cordes de même longueur.
Si (d) est la tangente commune à (C) et (C'), alors A = E = E' et (d) détermine sur les cercles (C) et (C') deux cordes de longueur nulle.

Exercice 4

1. Soit m un réel. Posons $a = 2m - 1, b = -(m+2), c = -(4m+3)$.
$a = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{2}$ et $b = 0 \Leftrightarrow m = -2$.
Les points M (x, y) de D_m satisfont la condition $ax + by + c = 0$ où a et b ne peuvent être simultanément nuls. Les ensembles D_m sont donc des droites.
2. Soit x_0 et y_0 deux réels. Une des droite D_m passe par le point de coordonnées (x_0, y_0) si, et seulement si il existe un réel m tel que : $(2m-1)x_0 - (m+2)y_0 - (4m+3) = 0$. **(1)**.
Cette équation d'inconnue m équivaut à $m(2x_0 - y_0 - 4) = x_0 + 2y_0 + 3$.
   (a) Premier cas : $2x_0 - y_0 - 4 = 0$. Cela signifie que le point de coordonnées (x_0, y_0) appartient à la droite Δ d'équation $2x - y - 4 = 0$. L'équation **(1)** devient : $0m = x_0 + 2y_0 + 3$. Donc si le couple

(x_0,y_0) est tel que $\begin{cases} 2x_0-y_0-4=0 \\ x_0+2y_0+3=0 \end{cases}$, l'ensemble des solutions de l'équation **(1)** est $\mathbf{R}$. Dans le cas contraire, **(1)** n'a pas de solution. Précisons ces deux cas.

$\begin{cases} 2x_0-y_0-4=0 \\ x_0+2y_0+3=0 \end{cases}$ a une solution unique , le couple (x_0,y_0) où $x_0=1$ et $y_0=-2$.

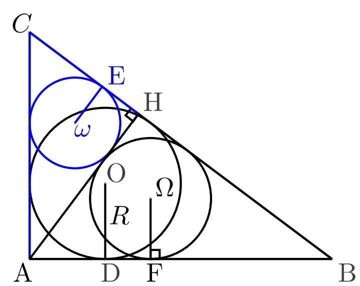
Donc : Si $x_0=1$ et $y_0=-2$, l'équation **(1)** admet une infinité de réels m solutions et toutes les droites D_m passent par A(1,−2).

Si $x_0 \neq 1$ ou si $y_0 \neq -2$, l'équation **(1)** n' admet pas de solution. Il n'existe pas de droite D_m passant par un point de Δ autre que A.

(b) Deuxième cas : $2x_0-y_0-4 \neq 0$. Cela signifie que le point B de coordonnées (x_0,y_0) n' appartient pas à la droite Δ. L'équation **(1)** a une solution unique et par le point B passe une unique droite D_m : C'est la droite (AB).

En résumé : Soit A le point de coordonnées (1,−2) et Δ^* la droite d'équation $2x-y-4=0$ privée du point A. Les droites D_m recouvrent le plan privé de Δ^*.

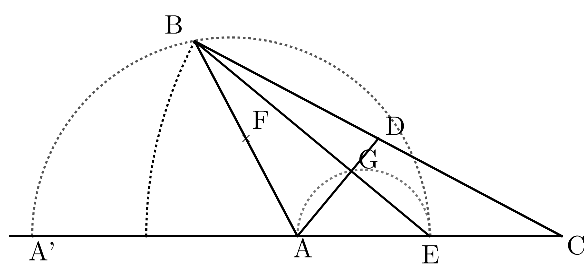
Exercice 5



On pose $a=$ BC, $b=$ AC et $c=$ AB.
Soit H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC rectangle en A, r, r' et R les rayons des cercles inscrits respectivement dans les triangles AHB, AHC et ABC. On appelle O le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC.
aire(ABC)= aire (AOB) + aire (BOC) + aire (COA).

Pour chacun des trois triangles AOB, BOC et COA, la hauteur issue de O a pour longueur R donc :
aire(ABC)$=\dfrac{1}{2}R(a+b+c)$.
D'autre part, aire(ABC)$=\dfrac{1}{2}$AB × AC $=\dfrac{1}{2}bc$. On en déduit que $bc=R(a+b+c)$.
Pour tous réels b et c, $2bc=(b+c)^2-\left(b^2+c^2\right)$. Or, dans le triangle ABC, $\left(b^2+c^2\right)=a^2$ donc :
$bc=\dfrac{1}{2}\left((b+c)^2-a^2\right)=\dfrac{1}{2}(b+c-a)(b+c+a)$.
En remplaçant bc par $\dfrac{1}{2}(b+c-a)(b+c+a)$ dans l'égalité $bc=R(a+b+c)$, on obtient :
$\dfrac{1}{2}(b+c-a)(b+c+a)=R(a+b+c)$.
Divisons les deux membres par $(a+b+c)$, qui n'est pas nul : $R=\dfrac{b+c-a}{2}$.
Appliquons cette formule aux triangles AHC et AHB, rectangles en H :
$r'=\dfrac{\mathrm{CH}+\mathrm{HA}-b}{2}, r=\dfrac{\mathrm{AH}+\mathrm{HB}-c}{2}$. D'où : $R+r+r'=\dfrac{b+c-a+\mathrm{CH}+\mathrm{HA}-b+AH+\mathrm{HB}-c}{2}=$ AH.

Exercice 6



On admet qu'il existe un triangle ABC tel que les médianes issues de A et de C soient perpendiculaires et tel que AC = 7, BC = 11.(*)
Soit G le centre de gravité de ce triangle, D, E et F les milieux respectifs des côtés [BC], [CA] et [AB].

Les triangles AGE et BGD sont rectangles en G, AE$=\dfrac{7}{2}$ et BD $=\dfrac{11}{2}$ donc :

$\mathrm{AG}^2+\mathrm{GE}^2=\dfrac{49}{4}$ et $\mathrm{BG}^2+\mathrm{GD}^2=\dfrac{121}{4}$. Or BG = 2GE et AG = 2GD.
D'où : $4\mathrm{GD}^2+\mathrm{GE}^2=\dfrac{49}{4}$ et $4\mathrm{GE}^2+\mathrm{GD}^2=\dfrac{121}{4}$. Donc $\mathrm{GE}^2=\dfrac{29}{4}$ et $\mathrm{GD}^2=\dfrac{5}{4}$.

Puisque le triangle GDE est rectangle en G : $GE^2 + GD^2 = ED^2$. Donc $ED^2 = \frac{34}{4}$.
Puisque D et E sont les milieux respectifs des côtés [BC] et [BA], $AB = 2ED = \sqrt{34}$.

(*) Existence et construction du triangle ABC : Indications

Soit [AC] un segment de longueur 7 et E son milieu. On restreint la construction à l'un des deux demi-plans P de frontière (AC). CB = 11 donc B appartient au demi-cercle de centre C et de rayon 11 inclus dans P.
Le triangle AGE est rectangle en G donc G appartient au demi-cercle γ de diamètre [AE] inclus dans P.
G est situé aux deux-tiers de chaque médiane en partant du sommet donc $\overrightarrow{EB} = 3\overrightarrow{EG}$. Lorsqu'un point M décrit le demi-cercle γ, le point N de P tels que $\overrightarrow{EN} = 3\overrightarrow{EM}$ décrit le demi-cercle Γ, image de γ par l'homothétie de centre E et de rapport 3. Γ est inclus dans P et a pour diamètre [EA'] où A' est le point de (AE) tel que $\overrightarrow{EA'} = 3\overrightarrow{EA}$. Le point B est l'intersection de Γ et du demi-cercle de centre C et de rayon 11.