Pépinière de Mathématiques

Versailles, 29 et 30 avril 2010

Divers

Exercice 1
$S = \dfrac{1}{1 \times 2} + \dfrac{1}{2 \times 3} + \dfrac{1}{3 \times 4} + \cdots + \dfrac{1}{998 \times 999} + \dfrac{1}{999 \times 1000}$.
Pour tout entiernaturel k non nul, $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$.
Donc $S = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{998} - \dfrac{1}{999} + \dfrac{1}{999} - \dfrac{1}{1000}$.
Remarque : Dans cette somme, le terme qui précède suit $-\dfrac{1}{4}$ est $\dfrac{1}{4} \cdots$, celui qui précède $\dfrac{1}{998}$ est $-\dfrac{1}{998} \cdots$.
On en déduit que $S = 1 - \dfrac{1}{1000}$.

Exercice 2
Le développement décimal de $\dfrac{1}{97}$ est périodique. Les trois derniers chiffres de la période sont 567.
On pourra se reporter à la correction de l'exercice 3 des Olympiades 2008 de quatrième.

Exercice 3
Il existe 120 nombres de 4 chiffres s'écrivant avec les chiffres 1, 2, 3, 4 et 5, chacun n'étant utilisé qu'une fois au plus (5 choix possibles pour le premier chiffre, 4 choix pour le deuxième, 3 pour le troisième et 2 pour le quatrième soit $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$).
Chacun des chiffres 1, 2, 3, 4, 5 peut être chiffre des unités, dizaines, centaines, unités de mille et chacun figure 24 fois en chiffre des unités, dizaines, centaines,unités de mille. La somme de tous ces nombres est donc $S = 24 \times 10^3(1+2+3+4+5) + 24 \times 10^2(1+2+3+4+5) + 24 \times 10(1+2+3+4+5) + 24(1+2+3+4+5)$.
Donc $S = 24 \times (1+2+3+4+5)(10^3 + 10^2 + 10 + 1) = 24 \times 15 \times 1\,111$. d'où $S = 399\,960$.

Exercice 4
On lance une pièce de monnaie dix fois de suite. Un jeu peut être modélisé par un mot de dix lettres composé de P (pile) et F(face). Ainsi le mot PPPPPPPPPF modélise un jeu où apparaissent 10 "Pile" consécutifs suivis de un "Face". On peut composer $2 \times 2 \times 2 \cdots \times 2 = 2^{10}$ mots différents, soit 1024 jeux différents. Dénombrons les jeux où FF apparaît pour la première fois aux $n$ième et $(n+1)$ième lancers.
Pour ces jeux, le $(n-1)$ième lancer fait apparaître P et ne comporte pas deux F consécutifs avant le $n$ième lancer. Nombre de mots FF□□□□□□□□ : 2^8. Nombre de mots PFF□□□□□□□ : 2^7
Nombre de mots □PFF□□□□□□ : 2×2^6
Nombre de mots □□ PFF□□□□□ ne commençant pas par FF : 3×2^5
Nombre de mots □□□ PFF□□□□ ne comportant pas de FF dans les 3 premières lettres : 5×2^5(On compte 8 mots de 3 lettres dont 3 comportent 2 F consécutifs ou plus)
Nombre de mots □□□□ PFF□□□ ne comportant pas de FF dans les 4 premières lettres : 8×2^3(On compte 16 mots de 4 lettres dont 8 comportent 2 F consécutifs ou plus)
Nombre de mots □□□□□ PFF□□ ne comportant pas de FF dans les 5 premières lettres : 13×2^2(On compte 32 mots de 5 lettres dont 19 comportent 2 F consécutifs ou plus)
Nombre de mots □□□□□□ PFF□ ne comportant pas de FF dans les 6 premières lettres : 21×2 et enfin 34 jeux □□□□□□□ PFF ne comportant pas de FF dans les 7 premiers lancers Tous ces mots sont distincts et équiprobables.Au total, 880 jeux font apparaître au moins deux F consécutifs. Donc la probabilité de cet événement est $p = \dfrac{880}{1024}$ soit $p = \dfrac{55}{64}$.

Exercice 5

La somme des numéros des 101 jetons est $S = 1 + 2 + \cdots + 100 + 101 = \dfrac{101 \times 102}{2}$ soit $S =$5 151.

Appelons x la somme des p jetons du tas A et y la somme des $(101 - p)$ jetons du tas B.

On a : $\begin{cases} x + y = 5151 \\ \dfrac{x - 40}{p - 1} = \dfrac{x}{p} + \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{y + 40}{102 - p} = \dfrac{y}{101 - p} + \dfrac{1}{4} \end{cases}$ d'où $\begin{cases} x + y = 5151 \\ \dfrac{x}{p} = 40 + \dfrac{p - 1}{4} \\ \dfrac{y}{101 - p} = 40 - \dfrac{102 - p}{4} \end{cases}$

Les deuxième et troisième équations permettent d'exprimer x et y en fonction de p puis, par substitution dans la première équation, on en déduit que :

$40p + \dfrac{p(p-1)}{4} + 40(101 - p) - \dfrac{(101 - p)(102 - p)}{4} = 5151.$

D'où : $40 \times 101 + \dfrac{p(p-1) - (101 - p)(102 - p)}{4} = 5151$ soit $40 \times 101 + \dfrac{202p - 101 \times 102}{4} = 5151.$

Donc : $101p + 2929 = 15302$ On en déduit que $p = 73, x = 4234, y = 917.$

Vérification :

Dans le tas A, il y avait 73 jetons et la moyenne était $\dfrac{4234}{73} = 58.$

Quand on enlève le jeton portant le numéro 40, on a 72 jetons et la moyenne devient et $\dfrac{4234 - 40}{72} = 58,25.$

Elle augmente donc de 0,25.

Dans le tas B, il y avait 28 jetons$(101 - 73 = 28)$ et la moyenne des numéros était $\dfrac{917}{28} = 32,75.$

Quand on rajoute le jeton portnt le numéro 40, on a 29 jetons et la moyenne des points devient $\dfrac{917 + 40}{29} = 33.$

Elle augmente donc de 0,25.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{N^*}$ par : $\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(2) = 1 \\ \text{pour tout } x > 2, f(x) = x - f(x-1) - f(x-2) \end{cases}$

$f(3) = 3 - f(2) - f(1) = 2$ et, pour tout réel $x > 2$: $f(x+1) = x + 1 - f(x) - f(x-1)$

d'où $f(x+1) = x + 1 - x + f(x-1) + f(x-2) - f(x-1) = 1 + f(x-2).$

En particulier,pour tout entier $n \geqslant 4, f(n) = 1 + f(n-3).$

Chaque fois que n augmente de 3, $f(n)$ augmente de 1.

$2010 = 3 \times 670.$ De 3 à 2010, on ajoute 669 fois 3. D'où $f(2010) = 669 + f(3) = 671.$

.