Pépinière de Mathématiques

Versailles, 29 et 30 avril 2010

Calcul numérique et littéral

Exercice 1
Résolution de (E) :$\sqrt[4]{6561} \times 12^{\sqrt{x}} = 6^x$.
Puisque x est un carré parfait, il existe un entier naturel n tel que $x = n^2$.
Sachant que $\sqrt[4]{6561} = 9$, $12^n = \left(3 \times 2^2\right)^n = 3^n \times 2^{2n}$ et $6^{n^2} = 2^{n^2} \times 3^{n^2}$, **(E)** devient : $3^2 \times 3^n \times 2^{2n} = 2^{n^2} \times 3^{n^2}$.
Donc n vérifie : $3^{2+n-n^2} = 2^{n^2-2n}$.
Or, si a et b sont deux entiers relatifs tels que $3^a = 2^b$. Alors $a = b = 0$.
[1] Donc $2 + n - n^2 = n^2 - 2n = 0$.
Si $n^2 - 2n = 0$ alors à $n(n-2) = 0$ d'où $n = 0$ ou $n = 2$. 2 est solution de $2 + n - n^2 = 0$ mais pas 0.
Si $n = 2$, alors $x = 4$.
Réciproquement : On vérifie que 4 est solution de $\sqrt[4]{6561} \times 12^{\sqrt{x}} = 6^x$.
L'équation $\sqrt[4]{6561} \times 12^{\sqrt{x}} = 6^x$ a donc une solution unique carré parfait qui est 4.

Exercice 2
$693 = 99 \times 7$. Posons $N = \overline{33xy49z}$ =3 300 490 +$\overline{xy00z}$ = 4 762 $\times$693 + $\left(424 + \overline{xy00z}\right)$.
Si N est divisible par 693, alors $424 + \overline{xy00z}$ est divisible par 693 donc par 99 et par 7.
$424 + \overline{xy00z} = 4 \times 99 + 28 + \overline{xy} \times (990 + 10) + z$.
$424 + \overline{xy00z} = 99\left(4 + \overline{xy0}\right) + 28 + \overline{xyz}$.
Si $424+\overline{xy00z}$ est divisible par 99, alors $28+\overline{xyz}$ est divisible par 99. Or $28+\overline{xyz}$ est un entier compris entre 28 et 1027 (1027=28+999). Il y a 10 entiers multiples de 99 compris entre 28 et 1027, ce qui donne (en soustrayant 28), 10 valeurs possibles de $\overline{xyz}$ qui sont : 071, 170, 269, 368, 467, 566, 764, 863 et 962.
Parmi ces 10 nombres, seul 467 est tel que N soit divisible par 7 : Pour $x = 4, y = 6$ et $z = 7$, N = 3 346 497.
On vérifie que N=4 829 $\times$693.

Exercice 3
On remarque que 16$= 4^2 = (3 \times 1 + 1)^2$, 1 156 $= 34^2 = (3 \times 11 + 1)^2$ et 111 556 $= 334^2 = (3 \times 111 + 1)^2$.
De gauche à droite : 1 156 est formé de deux chiffres 1 suivi d' un chiffre 5 et un chiffre 6, 111 556 est formé de trois chiffres 1 suivi de deux chiffres 2 et d'un chiffre 6 $\cdots$. Le $n$ième nombre de la liste est constitué de n chiffres 1 suivi de $(n-1)$ chiffres 5 et d'un chiffre 6.
Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Posons $N = 11\cdots15\cdots56$ (n chiffres 1,$(n-1)$ chiffres 5) et $M = 11\cdots1$ (n chiffres1).
Alors : $N = 10^n \times M + 5M + 1$. Or $10^n = 99\cdots9 + 1$ (n chiffres 9) soit $10^n = 9M + 1$.
Donc $N = (9M + 1) \times M + 5M + 1 = (3M + 1)^2$: Les nombres de la liste sont tous des carrés.

Exercice 4
On pose $s = x + y$ et $p = xy$. $A(x, y) = (x - y)^4 = \left[(x - y)^2\right]^2$.
$A(x, y) = \left(x^2 - 2xy + y^2\right)^2 = \left[(x + y)^2 - 4xy\right]^2$. Donc $A(x, y) = \left(s^2 - 4p\right)^2$.

[1]Soit a et b deux entiers relatifs tels que $3^a = 2^b$. Alors $a = b = 0$. Démonstration : Si a n'est pas nul, alors $3^a \neq 1$. a et b sont de même signe (sinon, l'un des deux nombres 3^a ou 2^bserait supérieur à 1 et l'autre inférieur à 1, l'une des inégalités étant stricte). Supposons que a et b soient positifs.Comme a n'est pas nul, 3^a est divisible par 3, donc 2^3 est divisible par 3, ce qui est impossible.Si a et b sont négatifs, on remarque que $3^a = 2^b$ équivaut à $3^{-a} = 2^{-b}$. Et cette dernière égalité conduit à un raisonnement analogue au précédent.

Exercice 5
Soit a et b deux réels différents de -1.

1. Si $\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b}=1$, alors $a(1+b)+b(1+a)=(1+a)(1+b)$. On en déduit que $ab=1$.
2. Pour tous réels a et b, $\dfrac{a}{1+b^2}-\dfrac{b}{1+a^2}=\dfrac{(a-b)+(a^3-b^3}{1+a^2+b^2+a^2b^2}$.
   Or $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$.
   Donc, pour tous réels a et b, $\dfrac{a}{1+b^2}-\dfrac{b}{1+a^2}=\dfrac{(a-b)(1+a^2+ab+b^2)}{1+a^2+b^2+a^2b^2}$.

Par conséquent, pour tous réels a et b différents de -1 tels que $\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b}=1$,
$\dfrac{a}{1+b^2}-\dfrac{b}{1+a^2}=\dfrac{(a-b)(a^2+b^2+2)}{a^2+b^2+2}$ (puisque $ab=1$).
D'où $\dfrac{a}{1+b^2}-\dfrac{b}{1+a^2}=a-b$.

Exercice 6
Pour tous réels a,b et c, posons $D=(a^2+4b^2+8c^2)-(3ab+4bc+2ca)$.
$D=(-4bc+4c^2)+(4c^2-2ca)+a^2+4b^2-3ab$.
Or $-4bc+4c^2=4\left(c-\dfrac{b}{2}\right)^2-b^2$ et $4c^2-2ca=4\left(c-\dfrac{a}{4}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}$ d'où :
$D=4\left(c-\dfrac{b}{2}\right)^2-b^2+4\left(c-\dfrac{a}{4}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}+a^2+4b^2-3ab.$
$D=4\left(c-\dfrac{b}{2}\right)^2+4\left(c-\dfrac{a}{4}\right)^2+\dfrac{3a^2}{4}+3b^2-3ab.$
On en déduit que : $D=4\left(c-\dfrac{b}{2}\right)^2+4\left(c-\dfrac{a}{4}\right)^2+3\left(b-\dfrac{a}{2}\right)^2$.
D est la somme de trois carrés. C'est donc un réel positif ou nul. Il est nul si, et seulement si, chacun des termes de la somme est nul, si, et seulement si $a=2b=4c$.
En conclusion : Pour tous réels a,b et c, $a^2+4b^2+8c^2\geqslant 3ab+4bc+2ca$. Il y a égalité si et seulement si $a=2b=4c$.

Exercice 7

1,437 5$=\dfrac{23}{16}$ donc : $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{6}$ =1,437 5 $\Leftrightarrow 8x+4y+z=23$.
Comme x,y et z sont des entiers positifs, chacun des termes de la somme $8x+4y+z=23$ est inférieur à 23.
x est donc un entier naturel compris entre 0 et 2.
D'autre part, $23-z=4(2x+y)$. On en déduit que $(23-z)$ est un entier naturel divisible par 4.
Donc $z\in\{3,7,11,15,19,23\}$.
Il y a douze triplets (x,y,z) solutions :
$(0,0,23),(0,1,19),(0,2,15),(0,3,11),(0,4,7),(0,5,3),(1,0,15),(1,1,11),(1,2,7),(1,3,3),(2,0,7),(2,1,3)$.

Exercice 8
Si N est un entier naturel de trois chiffres, il existe un entier a compris entre 1 et 9 et deux entiers b et c compris entre 0 et 9 tels que $N=100a+10b+c$. En ôtant successivement les premier, deuxième et troisième chiffres de ce nombre, on obtient les trois nombres $10b+c,10a+c$ et $10a+b$. La somme de ces trois nombres est la moitié du nombre de départ si, et seulement si $100a+10b+c=40a+22b+4c$, si, et seulement si $20a=4b+c$.
Puisque $20a$ et $4b$ sont des multiples de 4, on en déduit que c est un multiple de 4. Il existe donc un entier c' tel que $c=4c'$. L'équation $20a=4b+c$ devient $5a=b+c'$ avec $c'\in\{0,1,2\}$ ($c=4c'$ est compris entre 0 et 9).
Avec $c'=0$ puis 1 puis 2, on obtient 5 solutions :138, 144, 150, 288 et 294 (faire les vérifications).

Exercice 9
Soit A,B,C,a,b,c six réels strictement positifs. Posons $k=\dfrac{A}{a}=\dfrac{B}{b}=\dfrac{C}{c}$.
Alors $k>0$ et $A=ak,B=bk,C=ck$. Donc $\sqrt{Aa}+\sqrt{Bb}+\sqrt{Cc}=\sqrt{a^2k}+\sqrt{b^2k}+\sqrt{c^2k}=(a+b+c)\sqrt{k}$.
Or $(a+b+c)\sqrt{k}=\sqrt{(a+b+c)(a+b+c)k}=\sqrt{(ak+bk+ck)(a+b+c)}$.
D'où $\sqrt{Aa}+\sqrt{Bb}+\sqrt{Cc}=\sqrt{(A+B+C)((a+b+c)}$.

Exercice 10

On pose $S = x + y + z, T = x^2 + y^2 + z^2$ et $U = x^3 + y^3 + z^3$.
$(x + y + z)^3 = (x + y + z)^2(x + y + z) = (x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz)(x + y + z)$.
$(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3x(y^2 + z^2) + 3y(x^2 + z^2 + 3z(x^2 + y^2)$ donc :
$S^3 = U + 6xyz + 3x(T - x^2) + 3y(T - y^2 + 3z(T - z^2)$ soit $S^3 = U + 6xyz + 3ST - 3U$.
D'où $xyz = \dfrac{1}{6}(S^3 + 2U - 3ST)$.

Exercice 11

Soit n un entier naturel non nul et $N = n^4 + 4^n$.

1. Si n est pair non nul, il existe un entier k supérieur ou égal à 1 tel que $n = 2k$.
   Alors $N = (2k)^4 + 4^{2k}$ soit $N = 16k^4 + 16^k$. D'où $N = 16(k^4 + 16^{k-1})$. Comme $k^4 + 16^{k-1}$ est un entier naturel, N est un multiple de 16. Il n'est donc pas premier.
2. Si n est impair, il existe un entier naturel m tel que $n = 2m + 1$.
   Alors $N = (2m + 1)^4 + 4^{2m+1}$.
   Or $(2m + 1)^4 = \left[(2m + 1)^2\right]^2$ et $4^{2m+1} = \left(2^2\right)^{2m+1} = \left(2^{2m+1}\right)^2$.
   Donc $N = \left[(2m + 1)^2\right]^2 + \left(2^{2m+1}\right)^2$,
   Pour tous réels a et b, $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$.
   Pour $a = (2m + 1)^2$ et $b = 2^{2m+1}$, on obtient : $N = \left[(2m + 1)^2 + 2^{2m+1}\right]^2 - 2 \times (2m + 1)^2 \times 2^{2m+1}$.
   Or $2 \times (2m + 1)^2 \times 2^{2m+1} = (2m + 1)^2 \times 2^{2m+2} = (2m + 1)^2 \times \left(2^{m+1}\right)^2$ d'où :
   $N = \left[(2m + 1)^2 + 2^{2m+1}\right]^2 - \left[2^{m+1}(2m + 1)\right]^2$.
   On en déduit que : $N = \left[(2m + 1)^2 + 2^{2m+1} - 2^{m+1}(2m + 1)\right]\left[(2m + 1)^2 + 2^{2m+1} + 2^{m+1}(2m + 1)\right]$.
   Posons $A = (2m + 1)^2 + 2^{2m+1} - 2^{m+1}(2m + 1)$ et $B = (2m + 1)^2 + 2^{2m+1} + 2^{m+1}(2m + 1)$.
   $N = AB$ où A et B sont deux entiers naturels non nuls (N est un entier naturel non nul et B est une somme d'entiers naturels non nuls, A est donc un entier naturel non nul).
   De plus, A est inférieur à B et A est égal à 1 si et seulement si $k = 0$.
   En effet : $A = [(2m + 1) - 2^m]^2 - 2^{2m} + 2^{2m+1}$, d'où
   $A = [(2m + 1) - 2^m]^2 + 2^{2m}$ (car $2^{2m+1} - 2^{2m} = 2^{2m}(2 - 1)$).
   On en déduit que $A \geq 2^{2m}$.
   Si $m \geq 1, 2^{2m} \geq 4$. Alors A est supérieur à 4 et N n'est pas premier.
   Si $m = 0, A = 1, n = 1$ et $N = 5$.
   En conclusion : Soit n un entier naturel non nul. $n^4 + 4^n$ est premier si et seulement si $n = 1$.

Exercice 12

101=$10^2 + 1$, 10 101=$10^4 + 10^2 + 1$, 1 010 101=$10^6 + 10^4 + 10^2 + 1$.
101 est premier, 10 101 n'est pas premier (il est divisible par 3),
1 010 101 n'est pas premier (il est divisible par 101).
Soit n un entier supérieur ou égal à 3.
Le $n$ième nombre de la suite est $N = 10^{2n}+10^{2n-2}+\cdots+10^2+1$ qui peut s'écrire : $(10^2)^n+(10^2)^{n-1}+\cdots+10^2+1$.
Pour tout réel q différent de 1 et tout entier naturel $n, 1 + q + \cdots + q^n = \dfrac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$.
Avec $q = 10^2$, on obtient $N = \dfrac{10^{2n+2} - 1}{99}$. Or $10^{2n+2} - 1 = (10^{n+1} - 1)(10^{n+1} + 1)$.
$10^{n+1} - 1 = 99\cdots9 = 9M$ où $M = 11\cdots1$ ($n + 1$ chiffres 1). Donc $\left(10^{n+1} - 1\right)$ est divisible par 9.

1. Si n est impair, alors $n + 1$ est pair et M s'écrit avec un nombre pair de chiffres 1 que l'on peut grouper par deux en partant de la gauche pour obtenir une somme de multiples de 11.
   Donc si n est impair, $(10^{n+1} - 1)$ est divisible par 9 et 11 donc par 99.
   Si $n = 1, N = 101$ et 101 est un nombre premier.
   Si $n > 1, 10^{n+1} - 1 > 99$. Le quotient de $10^{n+1} - 1$ par 99 est un entier naturel strictement supérieur à 1.
   Puisque N est le produit de deux entiers strictement supérieurs à 1 $\left(\dfrac{10^{n+1} - 1}{99} \text{ et } (10^{n+1} + 1)\right)$, il n'est pas premier.
2. Si n est pair,$(10^{n+1} + 1)$ est divisible par 11.
   En effet : $(10^{n+1} + 1 = (10 + 1)(10^n - 10^{n-1} + \cdots - 10 + 1)$.
   Comme n n'est pas nul, n est supérieur ou égal à 2.
   Donc $\dfrac{10^{n+1} - 1}{9}$ est un entier ($(10^{n+1} - 1)$ est divisible par 9) supérieur ou égal à $\dfrac{10^3 - 1}{9} = 111$ et

$\dfrac{10^{n+1}+1}{11}$ est supérieur ou égal à $\dfrac{10^3+1}{11}=91$.
Puisque N est le produit de deux entiers strictement supérieurs à 1, il n'est pas premier.
En conclusion : Le seul nombre premier de la suite est 101.

Exercice 13

1. Il existe des entiers naturels n non nul pour lesquels $X=\sqrt{1+12n^2}$ est un entier :
   Exemples : Si $n=2$, $\sqrt{1+12n^2}=7$ et si $n=28$, $\sqrt{1+12n^2}=97$.
2. Si X est un entier, alors cet entier est impair et strictement supérieur à 1.
   En effet : $X^2=1+12n^2$ donc X^2 est un entier impair strictement supérieur à 1 puisque n n'est pas nul.
   Si X était pair, alors X^2 serait pair, ce qui est contraire à l'hypothèse.
   Donc, si$X$ est un entier, cet entier est impair et il existe un entier naturel k tel que $\sqrt{1+12n^2}=2k+1$.
3. $\sqrt{1+12n^2}=2k+1 \Rightarrow 1+12n^2=4k^2+4k+1$. D'où $3n^2=k(k+1)$.
4. Il existe des entiers naturels non nuls $p,\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_p$ et p nombres premiers $n_1,n_2,\cdots n_p$ tels que : $n=n_1^{\alpha_1}n_2^{\alpha_2},\cdots n_p^{\alpha_p}$. Cette décomposition de n en produit de facteurs premiers est unique à l'ordre des facteurs près.
   On en déduit la décomposition de $3n^2$ en produit de facteurs premiers :$3n^2=3\times n_1^{2\alpha_1}n_2^{2\alpha_2}\cdots n_p^{2\alpha_p}$ d'où $k(k+1)=3\times n_1^{2\alpha_1}n_2^{2\alpha_2},\cdots n_p^{2\alpha_p}$.
   Deux nombres consécutifs ne peuvent avoir de diviseur communs autre que 1 (en effet, si d ($d>1$ est un diviseur commun à deux nombres distincts, la différence entre ces deux nombres est un multiple non nul de d. Elle ne peut donc être égale à 1).
   On en déduit que chacun des facteurs $3, n_1^{2\alpha_1}, n_2^{2\alpha_2},\cdots,n_p^{2\alpha_p}$ divise soit k soit $k+1$.
   La décomposition de k et $k+1$ en produit de facteurs premiers est donc pour l'un, un produit de puissances de nombres premiers d'exposants pairs et pour l'autre, le produit de 3 par un produit de puissances d'exposants pairs de nombres premiers. Il existe alors deux entiers naturels a et b tels que $k=a^2$ et $k+1=3b^2$ ou $k=3a^2$ et $k+1=b^2$.
   (a) Si $k=a^2$ et $k+1=3b^2$, alors $k+1-k=3b^2-a^2$ d'où $3b^2-a^2=1$.
   Cette équation n'admet pas de solutions entières. En effet :
   S'il existe des entiers a et$b$ tels que $3b^2-a^2=1$ alors a^2+1 est divisible par 3 (puisque $3b^2$ est divisible par 3). Soit q et r les quotient et reste de la division euclidienne de a par 3.
   $a=3q+r$ avec$r\in\{0,1,2\}$.
   D'où $a^2+1=9q^2+6q+r^2+1=3(3q^2+2q)+r^2+1$.
   Si $r=0$: $a^2+1=3(3q^2+2q)+1$ qui est la somme de 1 et d'un multiple de 3. Il n'est donc pas divisible par 3.
   Si $r=1$: $a^2+1=3(3q^2+2q)+2$ qui est la somme de 2 et d'un multiple de 3. Il n'est donc pas divisible par 3.
   Si $r=2$: $a^2+1=3(3q^2+2q)+5$ qui est la somme de 5 et d'un multiple de 3. Il n'est donc pas divisible par 3.
   Il est donc impossible d'avoir $k=a^2$ et $k+1=3b^2$
   (b) Si $k=3a^2$ et $k+1=b^2$, alors $k+1-k=b^2-3a^2$ d'où $b^2-3a^2=1$.
   Cette équation admet des solutions entières (exemples : $a=0,b=1;a=1,b=2;a=4,b=7,\cdots$ [2]
   Dans ces conditions : $2+2\sqrt{1+12n^2}=2+2(2k+1)=4(k+1)$.
   Donc $2+2\sqrt{1+12n^2}=(2b)^2$ ce qui prouve que $2+2\sqrt{1+12n^2}=(2b)^2$ est un carré parfait.

.

[2]L'équation $b^2-3a^2=1$ est une équation **diophantienn**e (on cherche des solutions avec a et b entiers) dite équation de "**Pell-Fermat**". On démontre qu'elle a une infinité de solutions qui sont les couples (a,b) d'entiers naturels tels que $b+a\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})^n$ où n est un entier naturel quelconque.