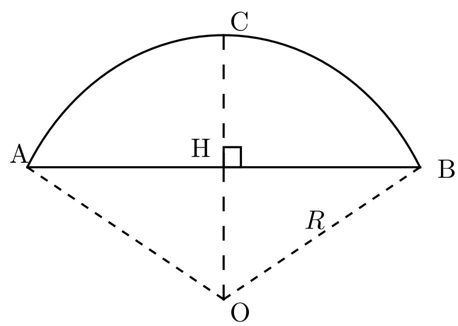
Pépinière de Mathématiques

Versailles, 29 et 30 avril 2010

Aires et volumes - Éléments de solutions

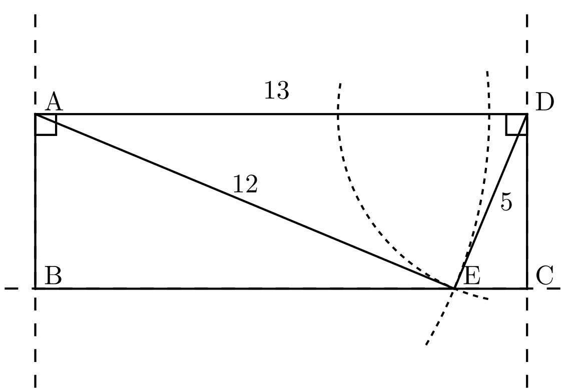
Exercice 1



D'après les hypothèses de l'énoncé, la hauteur du tunnel est CH $= 5$ et sa largeur au sol est AB $= 10\sqrt{3}$.
H est le milieu de [AB] donc HB $= 5\sqrt{3}$.
Soit R le rayon du cercle passant par A, B et C et O le centre de ce cercle. $R^2 = (R-5)^2 + 75$.
On en déduit que $R = 10$ d'où OH $= R -$ CH $= 5$
et $\tan \widehat{\mathrm{BOH}} = \dfrac{\mathrm{HB}}{\mathrm{OH}} = \sqrt{3}$. Donc : $\widehat{\mathrm{BOH}} = \dfrac{\pi}{3}$ et $\widehat{\mathrm{BOA}} = \dfrac{2\pi}{3}$.

L'aire de la section est égale à : $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{2\pi}{3} R^2 - \mathrm{OH} \times \mathrm{HB}$ soit $\dfrac{25\pi}{3} - 25\sqrt{3}$.

Exercice 2



D'après les hypothèses de l'énoncé,
AD $=$ BC $= 13$, ED $= 5$ et AE $= 12$.

On a : $\begin{cases} \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BE}^2 = \mathrm{AE}^2 \\ \mathrm{EC}^2 + \mathrm{CD}^2 = \mathrm{ED}^2 \end{cases}$

Or EC $= 13 -$ BE et CD $=$ AB

donc $\begin{cases} \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BE}^2 = 144 \\ (13 - \mathrm{BE})^2 + \mathrm{AB}^2 = 25 \end{cases}$

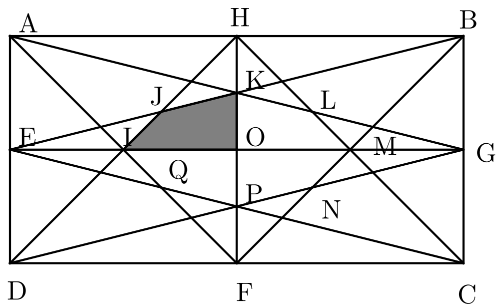
Par soustraction membre à membre :
$\mathrm{BE}^2 - (13 - \mathrm{BE})^2 = 119$.

D'où 26 BE $= 119 + 169$. Donc BE $= \dfrac{144}{13}$ et AB $^2 = 144 - \left(\dfrac{144}{13}\right)^2$. D'où AB $= \dfrac{60}{13}$.
L'aire du rectangle ABCD est donc égale à 60.

Construction

On construit le triangle ADE puis les perpendiculaires à (AD) passant respectivement par A et D.
La parallèle à (AD) passant par E coupe ces perpendiculaires en B et C.

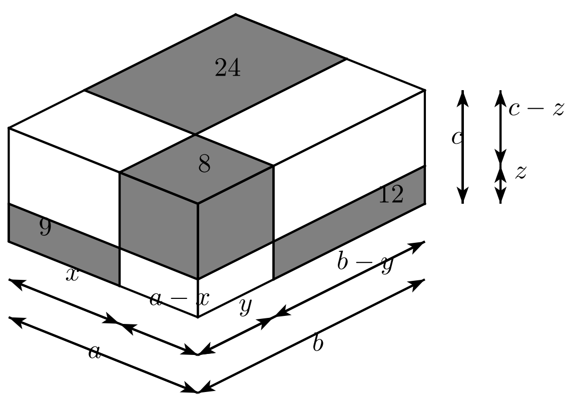
Exercice 3



Notons S l'aire du rectangle ABCD et S' celle de l'octogone IJKLMNPQ.
La figure est symétrique par rapport aux médiatrices des côtés du rectangle ABCD de centre O. On en déduit que les triangles HJK, HKL, FPQ et FPN d'une part et les triangles HIM et IMF d'autre part sont superposables . D'où : $S' = 2$ (aire (HIM) -2aire(HJK)).

(IM) est parallèle à (DC) et les point I et M, centres des rectangles AHFB et HDCF, sont les milieux respectifs des segments [HD] et [HC] donc : aire (HIM) $= \dfrac{1}{4}$ aire (HDC) $= \dfrac{1}{8}S$.
De même, K et P sont les centres des rectangles ADGE et EGCD.
Ils appartiennent au segment [HF] de milieu O et HF = KO = OP = PF. On en déduit que HK $= \dfrac{1}{3}$ HP.
Les droites (EB) et (DG) sont parallèles ($\overrightarrow{\text{DE}} = \overrightarrow{\text{GB}}$). La droite (EB) coupe le côté [HP] du triangle HDP en K tel que HK $= \dfrac{1}{3}$ HP. Elle coupe donc le côté [HD] au point J tel que HJ $= \dfrac{1}{3}$ HD.
Donc aire (HJK)$= \dfrac{1}{9}$ aire (HDP). Or aire (HDP)$=\dfrac{1}{2}$ DF $\times$ HP $= \dfrac{1}{4}$ DC $\times \dfrac{3}{4}$ HF $=\dfrac{3}{16}S$.
Donc aire (HJK) $= \dfrac{1}{48}S$. Par conséquent : $S' = 2\left(\dfrac{1}{8}S - 2 \times \dfrac{1}{48}S\right)$ soit $S' = \dfrac{1}{24}S$.

Exercice 4



D'après les données (figure ci-contre), on a :

$$\begin{cases} xyz = 9 \\ (a-x)y(c-z) = 8 \\ (a-x)(b-y)z = 12 \\ x(b-y)(c-z) = 24 \end{cases}$$

Le produit membre à membre des facteurs de ces quatre égalités nous donne :
$[xyz(a-x)(b-y)(c-z)]^2 = 144^2$.
On en déduit que $xyz(a-x)(b-y)(c-z)^2 = 144$.
En divisant successivement le produit $xyz(a-x)(b-y)(c-z)^2$ par $xyz, (a-x)y(c-z)$, $(a-x)(b-y)z$ et $x(b-y)(c-z)$, on obtient le volume des quatre autres pavés.

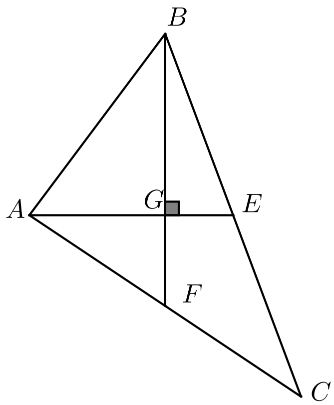
Le volume total des huits morceaux est donc : $V = 9+8+12+24+\dfrac{144}{9}+\dfrac{144}{8}+\dfrac{144}{12}+\dfrac{144}{24} = 105$.

Exercice 5
Notons a, b, c les arêtes du pavé droit. Les diagonales des faces ont pour mesures 7, 8 et 9 donc :

$$\begin{cases} a^2+b^2 = 49 \\ a^2+c^2 = 64 \\ b^2+c^2 = 81 \end{cases} \quad \text{On en déduit : } a^2 = 16, b^2 = 33, c^2 = 48.$$

Le volume V du pavé droit est donc égal à $\sqrt{16 \times 33 \times 48}$. $V = 48\sqrt{11}$

Exercice 6



Construction du triangle ABC

Les médianes [AE] et [BF] du triangle ABC sont perpendiculaires et ont pour longueurs respectives 9 et 12. Soit G l'intersection de ces deux médianes. G est le centre de gravité du triangle ABC. Il est donc situé aux deux tiers de chaque médiane en partant du sommet .
D'où la construction :
Soit [AE] un segment de longueur 9 et G le point de [AE] tel que AG = 6. Par G, on mène la perpendiculaire (d) à (AE) puis les points B et F de (d) de part et d'autre de(AE) tels que GB = 8 et GF = 4. On construit C, symétrique de B dans la symétrie de centre E.

Vérifions que le triangle ABC ainsi construit satisfait aux hypothèses de l'énoncé.
Par construction, (AE) et (BF) sont perpendiculaires, AE = 9 et BF =12. E est le milieu de [BC] donc [AE] est une médiane du triangle ABC. G est au deux tiers de [AE]. en partant du sommet A. C'est donc le centre de gravité du triangle ABC. On en déduit que (BG) est la médiane issue de B. Elle coupe (AC) en un point F' tel que GF' = 4. Donc F' = F et F est le milieu de [AC]. Toutes les hypothèses de l'énoncé sont donc bien satisfaites.
Calculons l'aire du triangle ABC.
Puisque E et F sont les milieux de[CB] et [CF] : aire(CEF) = $\frac{1}{4}$ aire (ABC).
D'où : aire (ABEF) = aire (ABC) − aire (CEF) =$\frac{3}{4}$ aire (ABC).
Par conséquent : aire (ABC) =$\frac{4}{3}$ aire (ABEF). D'autre part : aire (ABEF) = aire (ABE) + aire (AFE).
Donc aire (ABEF) =$\frac{1}{2}$ BG × AE + $\frac{1}{2}$ FG × AE.
aire (ABEF) = $\frac{1}{2}$ BF× AE. Donc aire (ABFE) = 54. D'où aire (ABC) = $\frac{4}{3}$× 54 = 72.