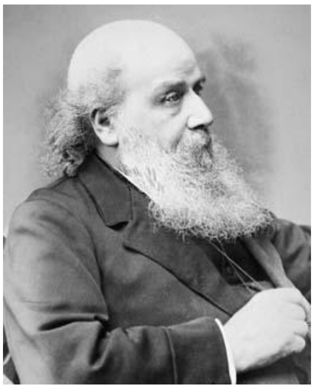


James Joseph Sylvester (1814 – 1897)

Stage préolympique ouvert aux lycéens de première talentueux et motivés désignés par leurs établissements, les 22 et 23 décembre 2014

Marie-Françoise BOURDEAU, Inspectrice pédagogique régionale de mathématiques de l'académie de Versailles, décédée en octobre, fut un des moteurs de la Pépinière académique de mathématiques, cherchant des énoncés d'exercices à soumettre aux stagiaires, intervenant dans les stages et rédigeant des solutions. Nous aurons une pensée particulière pour elle à l'occasion de ce stage préolympique.

La Pépinière académique de mathématique organise pour la neuvième année, bénévolement, des regroupements d'élèves désignés par leurs établissements. Quatre niveaux sont concernés cette année : les collégiens de troisième en octobre, les lycéens de première en décembre, les lycéens de terminale présentés au concours général en février et les lycéens de seconde en avril.
La Pépinière s'est assurée du concours de partenaires qui hébergent traditionnellement nos stages : l'université de Versailles Saint Quentin en Yvelines et le centre INRIA de Paris-Rocquencourt, le lycée Camille Pissarro de Pontoise le collège Paul Fort de Montlhéry, le lycée Jean-Baptiste Corot de Savigny sur Orge. Elle a reçu le soutien de l'Institut de hautes études scientifiques de Bures sur Yvette.
Les élèves sont désignés et recensés par leurs établissements, parce que l'éducation nationale est responsable des élèves qui lui sont confiés, et donc des projets et des actions auxquels ils sont invités à participer. Nos stages se déroulent pendant les congés scolaires, mais ils ne sont pas des stages « de vacances ». Une appétence et un répondant minimum sont attendus des élèves. Les établissements veillent à désigner des élèves aimant particulièrement les mathématiques, et souhaitant faire des mathématiques dans leurs études supérieures.

Le secrétariat opérationnel : Frédérique CHAUVIN, rectorat de Versailles

Les inspecteurs : Anne ALLARD, Joëlle DEAT, Yann ÉGLY, Catherine GUFFLET, Anne MENANT, Évelyne ROUDNEFF, Joffrey ZOLNET

Les intervenants professeurs : Bruno BAUDIN (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Dominique CLÉNET (Lycée François Villon, LES MUREAUX), Christophe DEGUIL (Lycée Notre Dame, SAINT GERMAIN EN LAYE), Nicolas FIXOT (Lycée Vallée de Chevreuse, GIF SUR YVETTE), Catherine HOUARD (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Philippe JULIEN (Lycée International, SAINT GERMAIN EN LAYE),

Professeurs accompagnants : Youssef BELLATRACH (Lycée Camille Claudel, VAUREAL), Sandrine CHALE (Lycée Notre Dame, MANTES LA JOLIE), Michelle JACCOTTET (Lycée Notre Dame, SAINT GERMAIN EN LAYE), Fadi TAMIM (Lycée Hoche, VERSAILLES)

Emploi du temps

Lundi 22 décembre 2014

	Groupe 1	Groupe 2	Groupe 3
10 heures	Exposé : le théorème de Sylvester ; les géométries		
11 heures	Logique, dénombrement PJ + CG	Nombres DC + AM	Aires et volumes NF+CD
13 heures	Repas		
13 h 50	Aires et volumes NF+CD	Logique, dénombrement PJ + CG	Nombres DC + AM
15 h 20	Nombres DC + AM	Aires et volumes NF+CD	Logique, dénombrement PJ + CG

Mardi 23 décembre 2014

	Groupe 1	Groupe 2	Groupe 3
10 heures	Film		
12 heures	Équations JZ + CD	Angles et distances CH + AA	Suites et fonctions BB + PJ
13 heures	Repas		
13 h 50	Suites et fonctions BB + PJ	Équations JZ + CD	Angles et distances CH + AA
15 h 20	Angles et distances CH + AA	Suites et fonctions BB + PJ	Équations JZ + CD

Thème : Nombres

On rappelle que « multiple » et « diviseur » font référence à des relations entre nombres entiers.

Exercice 1 Sommes de carrés

On dit qu'en entier n est somme de deux carrés s'il existe deux entiers a et b tels que $n = a^2 + b^2$.

1. Montrer que si n est somme de deux carrés, alors $2n$ est aussi somme de deux carrés.
2. Vérifier l'identité de Lagrange : Pour tous nombres a, b, c et d, $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$
3. En déduire que, si deux nombres sont sommes de deux carrés, leur produit est somme de deux carrés.
4. Montrer que si n est somme de deux carrés, alors $3n$ n'est pas somme de deux carrés.

Exercice 2 Encore du calcul littéral

On suppose que les nombres a, b et c sont tels que $a^2 + b^2 = 2c^2$, $a \neq b$, $a \neq -c$, $b \neq -c$.

Montrer que le nombre $\frac{(a+b+2c)(2a^2-b^2-c^2)}{(a-b)(b+c)(c+a)}$ est un nombre entier.

Exercice 3

Déterminer les couples (a, b) d'entiers positifs tels que $a^3 + 3ab = 2\,015$.

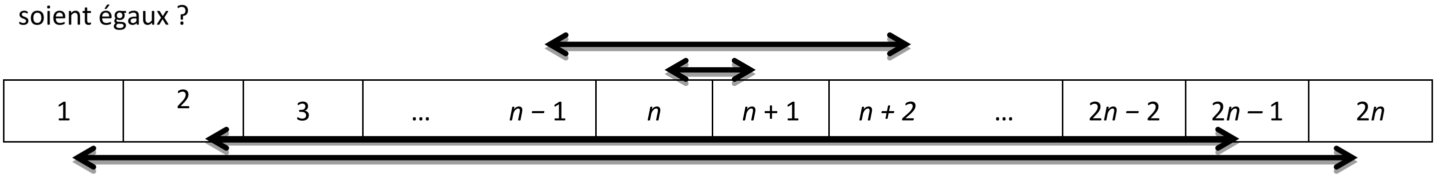
Exercice 4

Trouver trois couples (a, b) d'entiers strictement positifs tels que

$(3a+6a+9a+12a+15a)+(6b+12b+18b+24b+30b)$ soit un carré parfait.

Exercice 5 Produits de symétriques

On considère les $2n$ premiers entiers strictement positifs et on les apparie comme dans le diagramme ci-dessous. On multiplie alors les deux nombres de chaque paire. Existe-t-il une valeur de n pour laquelle deux des produits obtenus soient égaux ?



Exercice 6 Somme 5

On considère les entiers strictement positifs formés d'exactement n chiffres. On note $f(n)$ le nombre de tels entiers dont les n chiffres ont une somme égale à 5.

Déterminer combien des 2014 entiers $f(1)$, $f(2)$, … , $f(2014)$ ont un chiffre des unités égal à 1.

Exercice 7 Puissances multiples

Les nombres entiers a, b et c sont tels que $a + b + c = 0$.

1. Montrer que $a^4 + b^4 + c^4$ est un multiple de $a^2 + b^2 + c^2$.

2. Montrer que $a^{100} + b^{100} + c^{100}$ est un multiple de $a^2 + b^2 + c^2$.

Exercice 8 Des cubes et des carrés

Prouver que si la différence des cubes de deux entiers consécutifs est le carré d'un entier, ce dernier est lui-même somme de deux carrés.

Thème : Équations

Exercice 1 On connaît la somme et la somme des inverses

Déterminer les couples (a,b) qui vérifient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} a+b=16 \\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{4}{7} \end{cases}.$$

Exercice 2 Une égalité à reconstituer

Vous êtes le héros ou l'héroïne d'une mauvaise histoire ; vous devez reconstituer une « formule », en l'occurrence l'égalité de deux fonctions polynômes, partiellement effacée :

$$(x^2+x+a)(x^{15}-\cdots)=x^{17}+x^{13}+x^5-90x^4+x-90$$

Déterminez *a*. Une vieille légende vous a appris que les coefficients sont entiers…

Exercice 3 Ne nous précipitons pas

Déterminer les couples de réels (x,y) solutions du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x^2-xy+8=0 \\ x^2+8x-y=0 \end{cases}.$$

Exercice 4 Le degré monte…

On donne un nombre réel *a* strictement positif. Résoudre l'équation : $x=\sqrt{a-\sqrt{x+a}}$

Exercice 5

Sachant que *x* est solution de l'équation $\dfrac{1}{\cos x}-\tan x=3$, déterminer la valeur de $\sin x$.

Exercice 6 Lire les équations sans les résoudre

Les équations $x^2+5x+6=0$ et $x^2+5x-6=0$ ont chacune des solutions entières, tandis que seule une des équations $x^2+4x+5=0$ et $x^2+4x-5=0$ admet des solutions entières.

a. Démontrer que si les équations $x^2+px+q=0$ et $x^2+px-q=0$ ont chacune des solutions entières, alors il existe des entiers a et b pour lesquels $p^2=a^2+b^2$;

b. Déterminer q en fonction de a et b.

Exercice 7 Somme de sinus à la puissance 6

Sans utiliser de calculatrice, déterminer des entiers positifs m et n tels que :

$$\sin^6 1°+\sin^6 2°+\sin^6 3°+...+\sin^6 87°+\sin^6 88°+\sin^6 89°=\frac{m}{n}.$$

Thème : Suites et fonctions

Exercice 1 Partition de l'ensemble N par des suites

L'ensemble N des entiers naturels peut être partagé en deux sous-ensembles constitués chacun des termes d'une suite arithmétique : {0, 2, 4, 6, 8, …} et {1, 3, 5, 7, 9, …} par exemple. Trouver deux sous-ensembles disjoints de **N**, dont la réunion soit **N**, qui ne contiennent ni l'un ni l'autre tous les termes d'une suite arithmétique.

Exercice 2 Suite géométrique finie

Dans une suite géométrique de *n* termes t_1 , t_2 ,… , t_{n-1}, t_n , on suppose que $t_1 t_n = 3$ et que le produit des *n* termes est égal à 59 049.
Déterminer la valeur de *n*.

Exercice 3 Un peu de Fibonacci

Dans la suite de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5 … , chaque terme après les deux premiers est la somme des deux termes précédents. Parmi les 100 premiers termes de la suite de Fibonacci, combien sont impairs ?

Exercice 4 Nombres triangulaires

Alice écrit la suite des nombres entiers qu'elle dispose en triangle :
Bob calcule la somme des nombres figurant sur chaque ligne : 1, 5, 15, etc.
Quelle est la somme des nombres figurant sur la 2 015$^{\text{ème}}$ ligne ?

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 2 & & 3 & & \\ & 4 & & 5 & & 6 & \\ 7 & & 8 & & 9 & & 10 \end{array}$$

Exercice 5 Largeur d'une parabole

Soit *f* la fonction définie sur **R** par $f(x) = 2(x-3)(x-5)$ et soit (*P*) la parabole représentant *f* dans un repère orthonormal. . Déterminer le réel *k* tel que la droite d'équation $y = k$ coupe (*P*) en A et B tels que AB = 6.

Exercice 6

Soit *f* la fonction définie sur **R** par $f(x) = -x^2 + 4x + 1$. On note A et B les points d'intersection de la parabole représentant *f* dans un repère orthonormal avec la droite d'équation $y = -x + 1$ et on note S le sommet de cette parabole. Déterminer la valeur de $\mathrm{AS}^2 + \mathrm{BS}^2 - \mathrm{AB}^2$.

Exercice 7 Une équation fonctionnelle

Déterminer les fonctions *f*, de **N** dans **N**, pour lesquelles, pour tous entiers *x* et *y* :

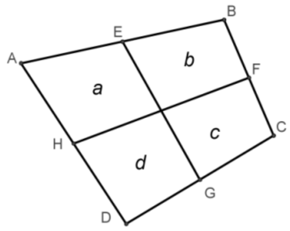
$$f(x^2) - f(y^2) = f(x+y).f(x-y)$$

Exercice 8 Moyenne des écarts

On considère un entier naturel non nul *n* et une suite $\{x_i\}_{0 \le i \le n}$ de réels appartenant à l'intervalle [0, 1].
Montrer que l'équation $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x - x_i| = \frac{1}{2}$ possède une solution dans [0, 1].

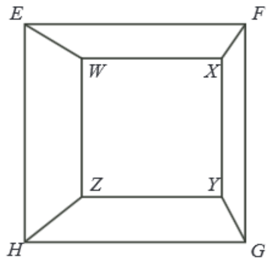
Thème : Aires et volumes

Exercice 1 Mise en jambes

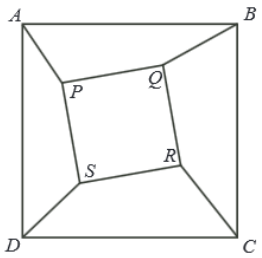


Les segments [EG] et [FH], dont les extrémités sont les milieux de côtés opposés du quadrilatère convexe ABCD, déterminent quatre quadrilatères dont les aires sont notées *a*, *b*, *c* et *d*. Montrer que *a* + *c* = *b* + *d*.

Exercice 2 Avec des carrés dans des carrés, maintenant

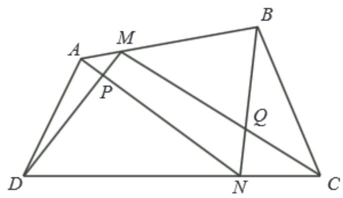


Dans la figure ci-contre, le carré WXYZ a des côtés de longueur 6. Il est placé à l'intérieur du carré EFGH, qui a des côtés de longueurs 10. On suppose que les carrés ne se « touchent » pas et que les droites (WX) et (EF) sont parallèles.
Démontrer que la somme de l'aire du quadrilatère GHZY et du quadrilatère EFXW ne dépend pas de la position du carré WXYZ à l'intérieur du carré EFGH.



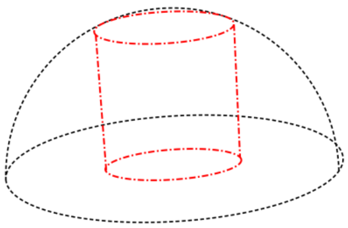
Dans la figure ci-contre, un carré PQRS est placé à l'intérieur d'un plus grand carré ABCD de telle sorte que les deux carrés ne se « touchent » pas. Sachant que les côtés de PQRS ne sont pas parallèles à des côtés de ABCD, démontrer que la somme de l'aire du quadrilatère APSD et de celle du quadrilatère BCRQ est égale à la somme de l'aire du quadrilatère ABPQ et de celle du quadrilatère CDRS.

Exercice 3



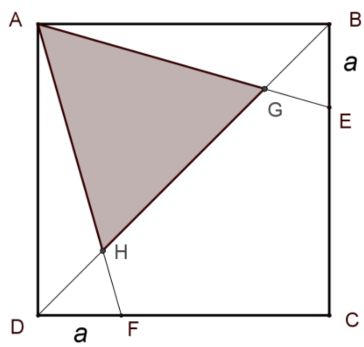
On considère un quadrilatère ABCD et un point M du segment [AB], un point N du segment [DC] tels que $\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{NC}}{\mathrm{DC}}$. Les segments [AN] et [DM] se coupent en P et les segments [BN] et [CM] se coupent en Q. Démontrer que l'aire du quadrilatère PMQN est égale à la somme de l'aire du triangle APD et de l'aire du triangle BQC

Exercice 4 Un cylindre dans une demi-boule



Dans une demi-boule de rayon 3, on a percé un cylindre droit de rayon $\sqrt{3}$ et d'axe l'axe de la demi-boule.
Pourrait-on réaliser un percement analogue avec un cylindre droit de même axe et de même volume (de rayon différent…) ?

Exercice 5 Un triangle dans un angle



Les points E et F sont situés sur les côtés [BC] et [CD] du carré ABCD, E à la distance *a* de B, F à la distance *a* de D. Les droites (AF) et (AG) coupent la diagonale [BD] en H et G respectivement.
Le côté du carré est 1.
Quelle est la valeur de *a* si le triangle AGH a pour aire ⅓ ?

Exercice 6 Une inégalité

Montrer que pour tout triangle dont les côtés ont pour longueur *a*, *b* et *c* respectivement et dont l'aire est *S* :

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S.$$

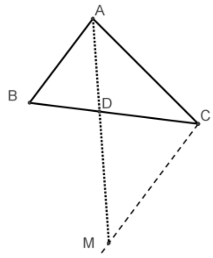
Quels sont les cas d'égalité ?

Exercice 7 Collier de sphères

Une sphère Σ est tangente à un plan P. Huit autres sphères de même rayon sont tangentes à Σ, tangentes à P et tangentes deux à deux, formant un « collier » autour de Σ.
Exprimer le rayon de ces sphères en fonction du rayon de Σ.

Thème : Angles et distances

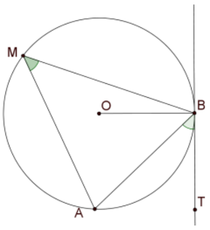
Exercice 1 Rendez-vous sur la bissectrice



Petit rappel : la bissectrice intérieure de l'angle A d'un triangle ABC détermine sur le côté [BC] deux segments [BD] et (CD] dont les longueurs sont proportionnelles à celles des côtés [AB] et [AC]. *Indication : sur la figure ci-contre, la demi-droite* [CM) *est parallèle à* (AB) *et* CM = CA.

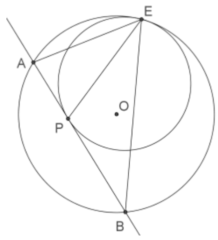
Sur les côtés [BC] et [CD] d'un parallélogramme, on place les points P et Q, de sorte que BP = QD. Les droites (BQ) et (DP) se coupent en R. Montrer que R appartient à la bissectrice de l'angle A du parallélogramme.

Exercice 2 Deux tangentes pour faire une bissectrice

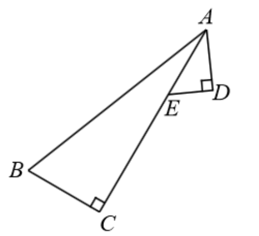


1. Rappel Si la droite (BT) est la tangente en B au cercle circonscrit au triangle ABM, alors L'angle $\widehat{AMB}$ et l'angle $\widehat{ABT}$ (ici aigus l'un et l'autre) sont égaux.

2. On considère deux cercles tangents intérieurement en un point E. Une tangente au cercle intérieur en un point P coupe le cercle extérieur en A et B. Montrer que la droite (EP) est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{AEB}$.



Exercice 3 Longueur inconnue

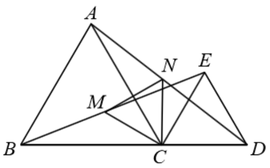


Dans la figure ci-contre, les triangles ABC et ADE sont rectangles respectivement en C et D.

On suppose de plus que AB = 75, BC = 21, AD = 20 et CE = 47.

Déterminer la longueur du segment [BD].

Exercice 4 Des triangles équilatéraux partout



Dans la figure ci-contre, le point C est un point du segment [BD], le point M est un point du segment [BE] et le point N est le milieu du segment [AD].

De plus les triangles ABC et CDE sont équilatéraux.

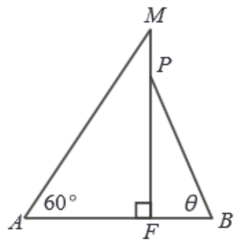
Démontrer que le triangle MNC est équilatéral.

Exercice 5 Un marin ne dit pas cordage mais bout

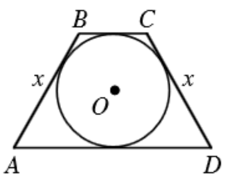
Le pont d'un bateau est représenté par le segment [AB] dans la figure ci-contre et mesure 8 mètres.

Un cordage s'étend à un angle de 60° du point A au sommet M du mât du bateau. Un deuxième cordage s'étend du point B au point P situé à 2 mètres en dessous du point M. Il forme un angle de mesure θ avec l'horizontale.

Déterminer la hauteur MF du mât en fonction de θ.



Exercice 6 Un tilleul envahissant



Mon jardin a la forme d'un trapèze isocèle ABCD ayant une aire égale à 80. On note *x* la longueur commune des côtés [AB] et [DC].

La coupe transversale de mon tilleul est un cercle de centre O et de rayon 4 tangent intérieurement aux quatre côtés du trapèze.

Déterminer la valeur de *x*.

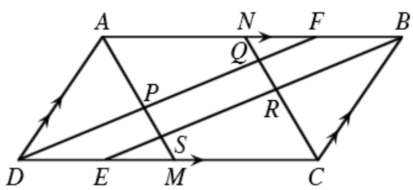
Exercice 7

On considère un parallélogramme ABCD. On pose AB = *a*, BC = *b* et on suppose que $a < b$.

Les bissectrices des angles du parallélogramme ABCD se coupent en P, Q, R, S comme sur la figure ci-contre.

a. Démontrer que le quadrilatère PQRS est un rectangle.

b. Démontrer que $\mathrm{PR} = a - b$



Exercice 7 Hexagones élastiques (Olympiades 2014, sujet de Nouvelle Calédonie)

On considère un hexagone (H) dont tous les angles intérieurs mesurent 120°.On note *a*, *b*, *c*, *d*, *e* et f les longueurs de ses côtés pris dans le sens des aiguilles d'une montre (sur la figure ci-dessous, par exemple *a* = AB, *b* = BC, etc.)

1. Prouver que deux côtés opposés quelconques de (H) sont parallèles, et que l'on a :

$$\begin{cases} a+b=d+e \\ b+c=e+f \\ c+d=f+a \end{cases}$$

Pour transformer un hexagone (H) dont tous les angles intérieurs mesurent 120° en un autre hexagone, on dispose des deux opérations suivantes :

– Opération A : On choisit deux côtés opposés de (H) et, dans le même sens, on les prolonge ou diminue d'une même quantité, en appliquant la même translation à trois sommets consécutifs (sur la figure ci-dessous, par exemple, E, F et A), dans la mesure où la nouvelle figure formée reste un hexagone convexe ;

– Opération B :
On choisit trois côtés consécutifs (sur la figure ci-contre [DE], [EF] et [FA]) de l'hexagone (H) et on prolonge ou diminue les côtés [DE] et [FA] tous les deux d'une même quantité, dans la mesure où la nouvelle figure formée reste un hexagone convexe.

2. Prouver qu'en utilisant l'une ou l'autre des opérations A et B, on transforme (H) en un nouvel hexagone dont les angles intérieurs mesurent 120°.

3. Soit (H) un hexagone dont tous les angles intérieurs mesurent 120°.

a. Prouver qu'en n'utilisant que des opérations A et B, on peut transformer l'hexagone (H) en un hexagone régulier.

b. Soit (H') un autre hexagone dont tous les angles intérieurs mesurent 120°. Prouver qu'en n'utilisant que des opérations A et B, on peut transformer (H) en (H').

4. On suppose maintenant que (H) est un hexagone régulier dont les côtés ont pour longueur 1.

a. Prouver qu'en trois étapes et en n'utilisant que des opérations A et B, on peut transformer (H) en un hexagone dont les côtés ont pour longueurs 1, 2, 3, 4, 5, 6 dans un certain ordre. Donner un exemple d'une telle transformation en trois étapes.

b. Prouver qu'il est impossible de réaliser la transformation du ***a.*** en moins de trois étapes.

Thème : Logique, dénombrement, probabilités

Exercice 1 Squash

Blaise et Pierre s'apprêtent à jouer 6 parties de squash. Ils sont de force égale (on considère que chacun peut aussi bien gagner que l'autre, et au squash il n'y a pas de partie nulle). Si la probabilité pour que chacun gagne 3 des 6 parties est égale à $\frac{5}{16}$, quelle est la probabilité que Blaise gagne plus de parties que Pierre ?

Exercice 2 Sortie au théâtre

Les chaises d'un auditorium sont disposées de façon rectangulaire. Il y a exactement 14 garçons assis dans chaque rangée et exactement 10 filles assises dans chaque colonne. Sachant qu'il y a exactement 3 chaises vides, démontrer qu'il y a au moins 567 chaises dans l'auditorium.

Exercice 3 Appareil à sous

Serge a 11 billets de 20 euros, 14 billets de 10 euros et 12 billets de 5 euros.
Dans une succursale bancaire (originale), un appareil permet d'échanger trois billets de 10 euros contre un billet de 20 euros et deux billets de 5, et réciproquement. Il permet aussi d'échanger deux billets de 20 euros contre trois billets de 10 euros et deux billets de 5, et réciproquement.
a. Serge peut-il remplacer son avoir par des billets de 20 et 10 euros en égal effectif, sans plus posséder de billets de 5 euros ?
b. Peut-il remplacer son avoir par des effectifs égaux de billets des trois sortes ?

Exercice 4 Ségrégation

Combien y a-t-il d'entiers positifs inférieurs à 1 000 dont tous les chiffres sont impairs ?

Exercice 5 Ne pas effacer

À chaque opération, des nombres entiers positifs sont écrits au tableau. Chacun d'eux, a, est remplacé par $a - 1$ et $a + 1$. Seul le nombre 0 est effacé s'il apparaît. On commence avec un tableau où figure seulement le nombre 1. Le tableau fait donc apparaître 2 après la première *opération*, puis 1 et 3, puis 2, 2 et 4, etc.
Combien de nombres figureront au tableau après 100 *opérations* ?

Exercice 6 T'as pas 100 balles ?

Albert et Betty s'opposent dans un jeu.
Il y a 100 balles rouges dans un vase bleu et 100 boules bleues dans un vase rouge. Chacun à son tour, les joueurs peuvent :

a) Prendre deux balles rouges dans le vase bleu et les déposer dans le vase rouge ;
b) Prendre deux balles bleues dans le vase rouge et les déposer dans le vase bleu ;
c) Prendre deux balles de couleurs différentes dans un des vases et les jeter.

Le joueur qui prend la dernière balle rouge dans le vase bleu ou la dernière balle bleue dans le vase rouge est déclaré gagnant. Albert commence.
L'un des deux joueurs a-t-il une stratégie gagnante ?