

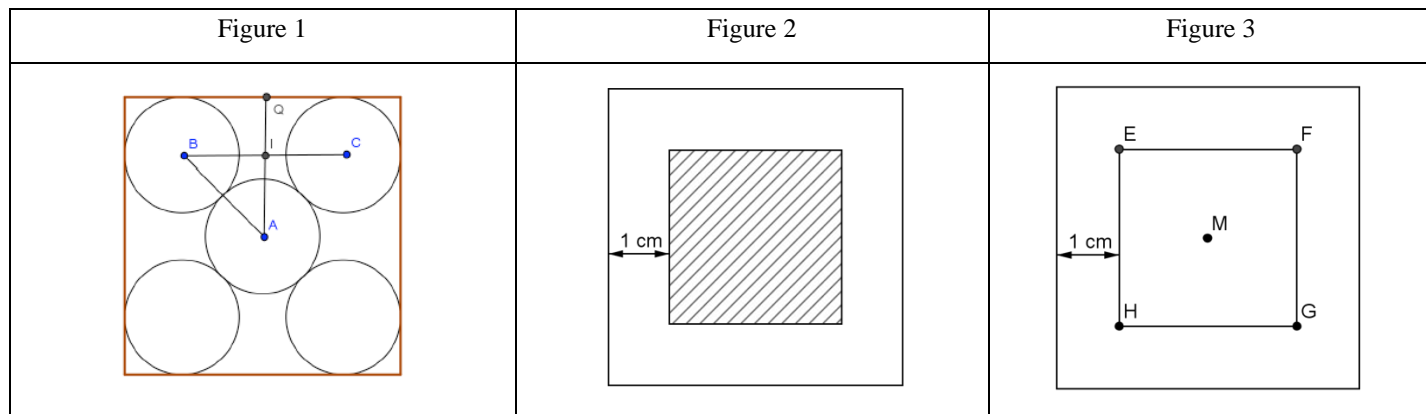
Géométrie 1

Exercice 1

1. Figure 1 : $AB = 2$, $AI = \sqrt{2}$ et $AQ = 1 + \sqrt{2}$. Le côté du carré est donc $2(1 + \sqrt{2})$.

2. a. Figure 2

b. La plus longue distance entre deux points d'un carré est celle entre deux sommets diagonalement opposés. Le plus petit carré contenant deux points distants de 2 cm a donc sa diagonale qui mesure 2 cm et un côté de $\sqrt{2}$ cm.

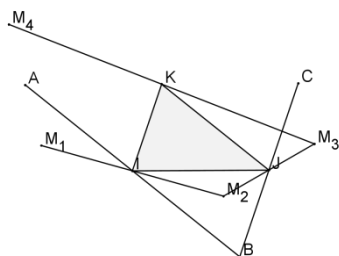
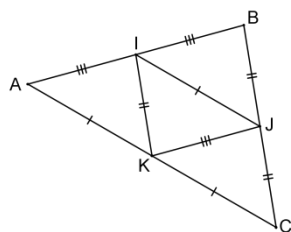


c. Le carré ayant été partagé en quatre, l'un des « petits » carrés contient au moins deux des cinq points et par conséquent mesure au moins $\sqrt{2}$ cm. Le carré intérieur mesure donc au moins $2\sqrt{2}$ cm de côté. La figure 3 montre que la position des cinq points est possible dans le carré de côté $2\sqrt{2}$ cm.

d. On en conclut que la configuration étudiée au 1 est celle qui répond au problème.

Exercice 2 Retrouver les polygones

a. Reconstituer un triangle ABC à partir des milieux I, J, K de ses côtés ?



A

Analyse de la figure

Supposons la figure réalisée. Alors les quadrilatères IJKA, IKJB et KIJC sont des parallélogrammes.

Construction

I, J, K étant donnés, soit A et B et C les points tels que IJKA, IKJB et KIJC soient des parallélogrammes. Alors, les points A, B et C sont solutions du problème. En effet :

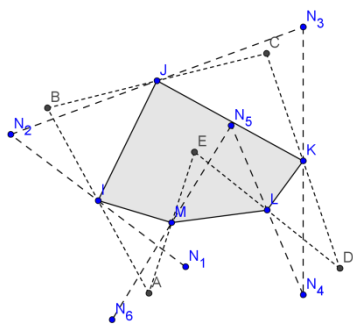
Par construction, on a : $(IA) \parallel (JK)$, $(IB) \parallel (JK)$ et $IA = IB = JK$. On en déduit que I est le milieu de $[AB]$. On démontre de la même façon que J et K sont les milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[CA]$.

Autre méthode :

Soit M_1 un point quelconque du plan, M_2 le symétrique de M_1 dans la symétrie de centre I, M_3 le symétrique de M_2 dans la symétrie de centre J, M_4 le symétrique de M_3 dans la symétrie de centre K. Soit A le milieu de $[M_1 M_4]$, B le symétrique de A dans la symétrie de centre I et C le symétrique de B dans la symétrie de centre J, alors le triangle ABC est solution du problème. En effet, par construction, on a : $\overrightarrow{AM_1} = \overrightarrow{M_2B} = \overrightarrow{CM_3}$ et $\overrightarrow{AM_1} = \overrightarrow{M_4A}$. On en déduit que AM_3CM_4 est un parallélogramme. Par conséquent, puisque K est le milieu de $[M_3M_4]$, K est également le milieu de $[AC]$.

En conclusion : Les points I, J, K sont les milieux des côtés du triangle ABC.

b. Reconstituer un pentagone ABCDE à partir des milieux I, J, K, L, M de ses côtés ?



On applique la méthode ci-dessus :

Soit N_1 un point quelconque du plan, N_2 le symétrique de N_1 dans la symétrie de centre I, N_3 le symétrique de N_2 dans la symétrie de centre J, N_4 le symétrique de N_3 dans la symétrie de centre K, N_5 le symétrique de N_4 dans la symétrie de centre L et N_6 le symétrique de N_5 dans la symétrie de centre M. Soit A le milieu de $[N_1 N_6]$, B le symétrique de A dans la symétrie de centre I etc... Alors le pentagone ABCDE ainsi obtenu est solution du problème. La démonstration est analogue à celle qui a été faite ci-dessus.

Exercice 3

1. D'une part : aire (ABC) = aire (AMB) + aire(BMC) + aire (CMA) soit

$$\text{aire (ABC)} = \frac{1}{2}MK \times AB + \frac{1}{2}ML \times BC + \frac{1}{2}MH \times CA = \frac{a}{2}(MK + ML + MH)$$

D'autre part : aire (ABC) = $\frac{1}{2}ah$. En comparant les deux expressions, on en déduit que

$$\boxed{MH + MK + ML = h}$$

MH, MK et ML sont les mesures de trois côtés d'un triangle si, et seulement si :

$$|MK - MH| \leq ML \leq MK + MH \text{ soit } |MK - MH| \leq h - (MK + MH) \leq MK + MH$$

$$\text{Ou encore : } |MK - MH| + (MK + MH) \leq h \leq 2(MK + MH) \quad (1)$$

Soit O le centre du triangle ABC et C' le milieu de $[AB]$. Les droites (OA), (OB) et (OC) sont des axes de symétrie du triangle. Si bien que si M est un point intérieur au triangle OBC' solutions du problème, ses symétriques par rapport à (OA) et à (OB) sont également solutions. On peut donc limiter l'étude au triangle OBC'. Dans ce cas, $MK \leq ML \leq MH$. On recherche donc les points M de OBC' tels que $2MH \leq h \leq 2(MK + MH)$ ce qui revient à : $2MH \leq h \leq 2(h - ML)$

$$\text{Ou encore } MH \leq \frac{h}{2} \text{ et } ML \leq \frac{h}{2}.$$

La partie hachurée de la figure 1 est l'ensemble des points M du triangle BOC' répondant au problème.

En complétant par symétrie d'axes (OA) puis (OB) et (OC), on obtient l'ensemble des points M solutions : **Il s'agit de l'intérieur du triangle A'B'C' où A', B' et C' sont les milieux des côtés du triangle ABC.**

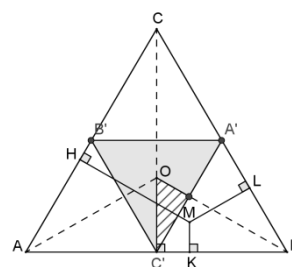


Figure 1

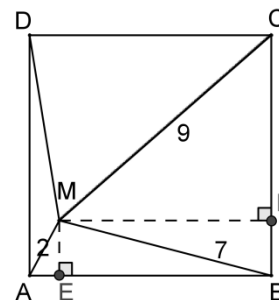
Exercice 4

Soit a la mesure des côtés du carré ABCD. Posons $x = AE$ et $y = ME$.

Alors : $EB = a - x$, $BF = y$ et $CF = a - y$.

$$\text{On a } \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y^2 + (a - x)^2 = 49 \\ (a - x)^2 + (a - y)^2 = 81 \end{cases}$$

Par addition membre à membre, on obtient :



$$x^2 + 2 \left(\underbrace{y^2 + (a-x)^2}_{49} \right) + (a-y)^2 = 4 + 49 + 81 \text{ d'où } x^2 + (a-y)^2 = 4 + 49 + 81 - 2 \times 49$$

On en déduit que $MD^2 = x^2 + (a-y)^2 = 36$ d'où $MD = 6$.

Exercice 5

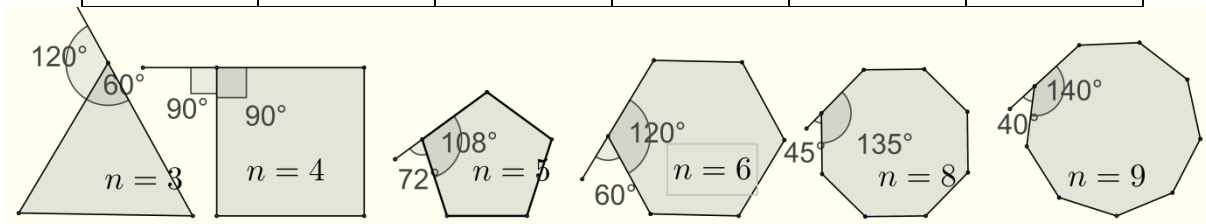
Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Dans un polygone régulier convexe à n côtés, les angles internes ont pour mesure $\frac{n-2}{n} \times 180^\circ$ et les angles externes $180^\circ - \frac{n-2}{n} \times 180^\circ = \frac{360^\circ}{n}$.

Considérons deux polygones correspondants, l'un ayant n côtés ($n \geq 3$) et l'autre m côtés ($m \geq 3$). Alors :

$$\frac{2(n-2) \times 180^\circ}{n} = \frac{3 \times 360^\circ}{m}. \text{ D'où : } m = \frac{3n}{n-2} \text{ ou encore } m = \frac{3n-6}{n-2} + \frac{6}{n-2} \text{ soit } m = 3 + \frac{6}{n-2}.$$

m est un entier donc $(n-2)$ divise 6. On en déduit que $n \in \{3, 4, 5, 8\}$. D'où le tableau :

n	Angle interne	m	Angle externe	Vérification	
				$2n$	$3m$
3	60°	9	40°	120°	120°
4	90°	6	60°	180°	180°
5	108°	5	72°	216°	216°
8	135°	4	90°	270°	270°



Géométrie 2

Exercice 1

Soit a, b, c, d, e, f, g, h les mesures des côtés de l'octogone.

$\{a, b, c, d, e, f, g, h\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. On a : $a + c + e = g$.

Si $g = 7$, il est impossible que l'un des trois nombres a , ou c ou e soit égal à 7 (sinon la somme des deux autres serait égale à 1) donc $h = 8$ et, comme $a + c + e = 7$, la seule possibilité est : $\{a, c, e\} = \{1, 2, 4\}$. Alors $\{b, d, f\} = \{3, 5, 6\}$.

Or $f + b = (y + d) + (x + d)$ et $d + h = d + (x + d + y)$. Donc $f + b = d + h$ soit $f + b = d + 8$. On en déduit que : $d = 3, f = 5$ et $b = 6$.

L'aire de l'hexagone est égale à : $bc + ex$ soit $bc + e(b - d) = 6c + 3e$. Elle est maximale lorsque $c = 4$ et $e = 2$ et vaut 30.

Par un raisonnement analogue, on établit que si $g = 8$, alors $h = 7$ et $\{a, c, e\} = \{1, 2, 5\}$ et $\{b, d, f\} = \{3, 4, 6\}$

ou $\{a, c, e\} = \{1, 3, 4\}$ et $\{b, d, f\} = \{2, 5, 6\}$. Et comme $f + b = d + 7$ (car $f + b = d + h$), on en déduit que :

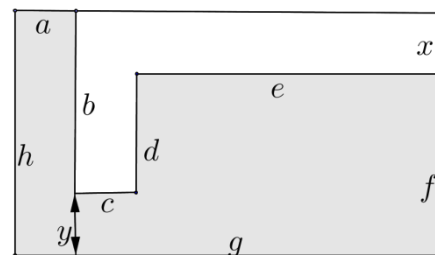
$d = 3$ et $\{b, f\} = \{4, 6\}$ et que, par conséquent : $\{a, c, e\} = \{1, 2, 5\}$.

L'aire de l'hexagone est égale à : $bc + e(h - f) = bc + e(7 - f)$.

Si $b = 4$ et $f = 6$, elle vaut : $4c + e$. Elle est maximale lorsque $c = 5, e = 2$, et vaut 22.

Si $b = 6$ et $f = 4$, elle vaut : $6c + 3e$. Elle est maximale lorsque $c = 5, e = 2$ et vaut 36. On alors $a = 1$.

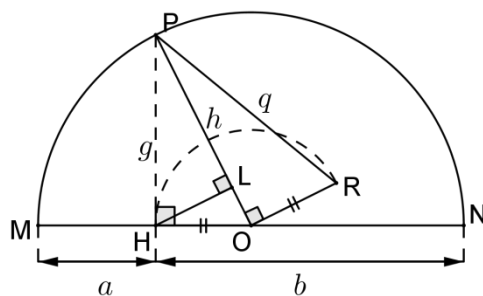
En conclusion : L'hexagone d'aire maximale a pour dimensions : $a = 1, b = 6, c = 5, d = 3, e = 2, f = 4, g = 8$, et $h = 7$ et vaut 36.



Exercice 2

Quelques propriétés de la figure : On suppose que $a > b$ (quitte à intervertir le rôle de a et b).

Le triangle MPN est rectangle en P (triangle inscrit dans un cercle de diamètre [MN]).



HMP = HPN (même complémentaire MPH).

Calcul de m, g, h, q

$$m = \frac{MN}{2} = \frac{a+b}{2}$$

$$\tan HMP = \frac{g}{a} \text{ et } \tan HPN = \frac{b}{g} \text{ et comme } HMP = HPN, \text{ on en déduit que : } \frac{g}{a} = \frac{b}{g} \text{ d'où } \boxed{g = \sqrt{ab}}.$$

$$\cos HPL = \frac{PL}{PH} = \frac{h}{g} \text{ (triangle PLH, rectangle en L) et } \cos HPL = \frac{PH}{PO} = \frac{g}{m} \text{ (triangle POH, rectangle en H). On a donc } \frac{h}{g} = \frac{g}{m} \text{ d'où}$$

$$h = \frac{ab}{m} \text{ soit } \boxed{h = \frac{2ab}{a+b}}.$$

$$\text{Dans le triangle ORP rectangle en O : } q^2 = OP^2 + OR^2. \text{ OP} = m = \frac{a+b}{2} \text{ et } OR = OH = m - a \text{ soit } OR = \frac{a-b}{2}.$$

$$\text{Donc } q^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \text{ soit } q^2 = \frac{a^2+b^2}{2} \text{ d'où } \boxed{q = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}}.$$

Dans le triangle rectangle OPR, l'hypoténuse est le plus grand côté donc $RP > OP$ soit $q > m$.

De la même façon, dans le triangle rectangle OPH, on a $m > g$ et dans le triangle rectangle PHL : $g > h$.

Donc : $q > m > g > h$.

$$\text{Si } a < b \text{ alors } a < \sqrt{ab}, \text{ et } \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} < b. \text{ Donc } \boxed{b > q > m > g > h > a}.$$

Remarque : lorsque $a = b$, les points O, H et R sont confondus et alors, $a = q = m = g = h = b$.

Exercice 3

1. Notons $\left(x_A, \frac{1}{x_A}\right), \left(x_B, \frac{1}{x_B}\right)$ et $\left(x_C, \frac{1}{x_C}\right)$ les coordonnées respectives de A, B et C. Les droites (AB) et (AC) ont pour coefficients directeurs respectifs $-\frac{1}{x_A x_B}$ et $-\frac{1}{x_A x_C}$. Deux points distincts ont des abscisses distinctes donc les coefficients directeurs de ces deux droites sont distincts. On en déduit que (AB) et (AC) ne sont pas confondues : Les points A, B et C ne peuvent pas être alignés.

2. Équation de la hauteur h_C issue de C : Cette droite passe par C et elle est perpendiculaire à (AB). Comme le coefficient directeur de (AB) est $-\frac{1}{x_A x_B}$, on en déduit que le coefficient directeur de h_C est $x_A x_B$.

$$h_C \text{ a donc pour équation : } y = x_A x_B (x - x_C) + \frac{1}{x_C}. \text{ De même, la hauteur } h_B \text{ a pour équation : } y = x_A x_C (x - x_B) + \frac{1}{x_B}.$$

Les coordonnées (x, y) du point d'intersection de ces deux droites vérifient le système :
$$\begin{cases} y = x_A x_B (x - x_C) + \frac{1}{x_C} \\ y = x_A x_C (x - x_B) + \frac{1}{x_B} \end{cases} \text{ d'où}$$

$$x(x_A x_B - x_A x_C) = \frac{1}{x_B} - \frac{1}{x_C} \text{ soit } x = \frac{\frac{1}{x_B} - \frac{1}{x_C}}{x_A(x_C - x_B)} \text{ ou encore } x = -\frac{1}{x_A x_B x_C} \text{ et } y = x_A x_B \left(-\frac{1}{x_A x_B x_C} - x_C \right) + \frac{1}{x_C} \text{ soit } y = -x_A x_B x_C$$

L'orthocentre du triangle ABC a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{x_A x_B x_C}, x_A x_B x_C \right)$ qui est un point de H.

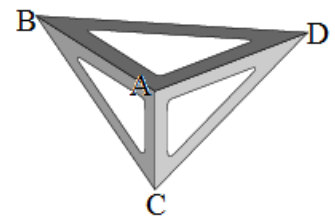
Exercice 4

En divisant chaque arête en 8 segments de même longueur, on forme $8^3 = 512$ cubes d'arête $\frac{1}{8}$ m. Le nombre moyen d'abeilles dans un tel cube est 4 (valeur approchée par défaut). Or $4 \times 512 = 2048$. IL y a donc nécessairement au moins un petit cube qui contient 5 abeilles ou plus. Les diagonales de ces petits cubes ont pour mesure $\frac{\sqrt{3}}{8}$. Le rayon de la sphère circonscrite à ces petits cubes est $\frac{\sqrt{3}}{16}$. On vérifie que $\frac{\sqrt{3}}{16} < \frac{1}{9}$.

A tout moment, il y a donc une boule sphérique de rayon $\frac{1}{9}$ m où se trouvent au moins 5 abeilles.

Exercice 5

Notons A, B, C, D les quatre sommets du tétraèdre, A étant le sommet des trois angles droits des faces qui sont des triangles rectangles. Le centre I de la sphère inscrite à ce tétraèdre est à égale distance r des quatre plans (ABC), (ABD), (ACD), (BCD). Calculons r .



Le volume V_{ABCD} est égal à $\frac{1}{6} AB \times AC \times AD$.

$$AC = 10, BC = CD = \frac{AC}{\sin 30^\circ} = 2AC = 20 \quad AB = AD = BC \times \cos 60^\circ = 10\sqrt{3}.$$

$$\text{Donc } V_{ABCD} = \frac{1}{6} AB \times AC \times AD = 500.$$

D'autre part : $V_{ABCD} = V_{IABC} + V_{IABD} + V_{IACD} + V_{IBCD}$.

Notons S_A, S_B, S_C et S_D les aires des faces respectivement opposées à A, B, C et D, alors :

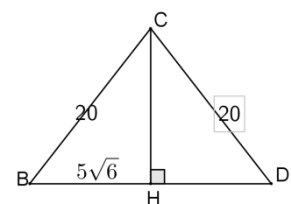
$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} r (S_A + S_B + S_C + S_D). \text{ On en déduit que } r = \frac{3V_{ABCD}}{S_A + S_B + S_C + S_D} = \frac{1500}{S_A + S_B + S_C + S_D}$$

$$\text{Or } S_B = S_D = \frac{1}{2} AC \times AD = 50\sqrt{3}, \quad S_C = \frac{1}{2} AB \times AD = 150.$$

Calculons S_A :

$$BCD \text{ est un triangle isocèle tel que } CB = CD = 20 \text{ et } BD = AD\sqrt{2} = 10\sqrt{6}.$$

Soit H le pied de la hauteur issue de C dans le triangle BCD. H est le milieu de [BD] donc $BH = 5\sqrt{6}$ et $CH = \sqrt{BC^2 - BH^2} = \sqrt{400 - 150} = 5\sqrt{10}$. On en déduit que $S_A = \frac{1}{2} BD \times CH = 50\sqrt{15}$.



$$\text{Donc } r = \frac{1500}{50\sqrt{15} + 100\sqrt{3} + 150} = \frac{30}{\sqrt{15} + 2\sqrt{3} + 3}, r \approx 2,9 \text{ (à 0,1 près).}$$

Il n'y a donc pas suffisamment de place à l'intérieur du tétraèdre pour une balle de tennis de rayon 3,2 cm.

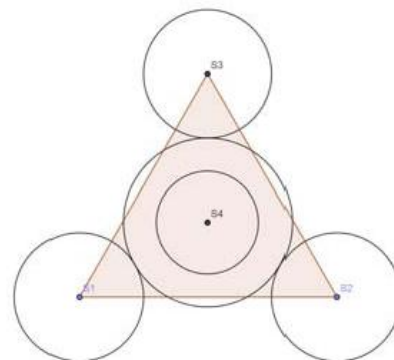
Exercice 6

Le problème se ramène à savoir si un sommet d'un des petits cônes est visible d'un autre. La figure vue de dessus conduit à formuler la question : le cercle Ω situé à la hauteur r du grand cône est-il intérieur au triangle équilatéral ?

Le cercle de base du grand cône a pour rayon $3 \frac{\sqrt{3}}{3} - r$

Le cercle Ω a pour rayon $\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{3}{2}r$

C'est ce rayon qu'il faut comparer au tiers de la hauteur du triangle.



Nombres et équations

Exercice 1

Soit N le nombre de pages du dictionnaire, P le numéro de la page où je me suis arrêté et M la moyenne des pages restantes.

$$M = \frac{1+2+\dots+N-P}{N-1} = \frac{1}{N-1} \times \frac{N(N+1)}{2} - \frac{P}{N-1}.$$

On a donc $M = \frac{N(N+1)}{2(N-1)} - \frac{P}{N-1}$. Or $1 \leq P \leq N$ d'où $\frac{N(N+1)}{2(N-1)} - \frac{N}{N-1} \leq M \leq \frac{N(N+1)}{2(N-1)} - \frac{1}{N-1}$

D'où $\frac{N}{2} \leq M \leq \frac{N}{2} + 1$. Comme $M = 1000,743$, on en déduit que $N = 2000$ ou $N = 2001$.

D'autre part, puisque $\frac{N(N+1)}{2(N-1)} - \frac{P}{N-1} = M$, on a donc $P = \frac{N(N+1)}{2} - M(N-1)$

On vérifie que si $N = 2000$, P n'est pas entier et si $N = 2001$, $P = 1515$.

Ce dictionnaire a donc 2001 pages et je l'ai ouvert à la page 1515.

Exercice 2

On écrit : $2013^2 = 1 \times 3 \times 11 \times 61 \times (-1) \times (-3) \times (-11) \times (-61)$.

Il n'existe pas d'autre décomposition de 2013^2 en un produit de 8 facteurs entiers et distincts.

On en déduit que $\{(x-a), (x-b), (x-c), (x-d), (x-e), (x-f), (x-g), (x-h)\} = \{1; 3; 11, 61, -1, -3, -11, -61\}$ d'où :

$$(x-a) + (x-b) + (x-c) + (x-d) + (x-e) + (x-f) + (x-g) + (x-h) = 0 \text{ rt, par conséquent :}$$

$$x = \frac{a+b+c+d+e+f+g+h}{8}.$$

Exercice 3

S'il existe un entier naturel k tel que $\frac{n}{20-n} = k^2$, alors $n = \frac{20k^2}{k^2+1}$.

Puisque k^2 et k^2+1 n'ont aucun diviseur commun et que n est un entier, k^2+1 doit être un diviseur de 20. Cela ne se produit que lorsque $k = 0, 1, 2$ ou 3 . Les valeurs correspondantes de n sont **0, 10, 16 et 18**.

Exercice 4

Soit $N = a***\dots*$ l'entier recherché où $b = ***\dots*$ possède n chiffres. Autrement dit : $N = a \cdot 10^n + b$

Après transfert du chiffre a à droite, N devient $N' = ***\dots*a$ c'est à dire $N' = 10b + a$.

Par hypothèse : $N = 1,5N'$ donc $10b + a = 1,5(a \cdot 10^n + b)$.

Cette équation équivaut à $17b = a(3 \cdot 10^n - 2)$ (1).

17 (qui est un nombre premier) divise $a(3 \cdot 10^n - 2)$ mais ne divise pas a (car a est un entier compris entre 1 et 9) donc 17 divise $(3 \cdot 10^n - 2)$. Un petit calcul montre que le plus petit entier n qui convient est $n = 15$.

(1) donne $b = \frac{3 \times 10^{15} - 2}{17} = 176\,470\,588\,235\,294a$ d'où $N = a(10^{15} + 176\,470\,588\,235\,294)$

N est minimal pour $a = 1$ et vaut $N = 10^{15} + 176\,470\,588\,235\,294$.

La réponse est donc $N = 1\,176\,470\,588\,235\,294$

Exercice 5

On remarque tout d'abord que $d = b$ et que les segments verticaux qui constituent le motif de frise ont tous pour mesure a .

Le périmètre de la figure 1 permet d'écrire : $8a + 6b + 4c = 228$,

soit $4a + 3b + 2c = 114$ (1)

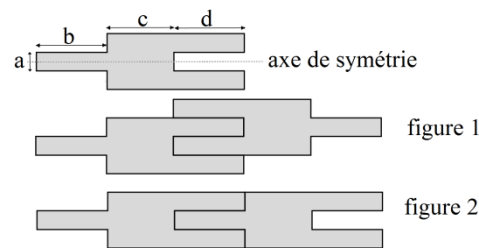
Celui de la figure 2 donne : $6a + 8b + 4c = 260$ ou $3a + 4b + 2c = 130$ (2)

Par soustraction membre à membre (1) - (2), on en déduit que :

$b - a = 16$.

En remplaçant b par $a + 16$ dans (1), on obtient : $7a + 2c = 66$. Le nombre c est strictement positif et a est nécessairement pair (puisque $2c$ et 66 le sont). Les valeurs de a solutions sont donc les entiers pairs tels que $7a \leq 64$. IL y a quatre valeurs de a possibles : $a = 2$, $a = 4$, $a = 6$ et $a = 8$.

On vérifie qu'il y a 4 quadruplets (a, b, c, d) solutions qui sont : $(2, 18, 26, 18)$, $(4, 20, 19, 20)$, $(6, 22, 12, 22)$ et $(8, 24, 5, 24)$.



Exercice 6

Il faut tenir compte que l'herbe pousse. Si y est, en proportion de la quantité initiale, la quantité d'herbe qui pousse en un jour et q la quantité mangée par jour par une vache, on obtient $q = \frac{1+24y}{24 \times 70} = \frac{1+60y}{30 \times 60}$ ce qui donne y et q et montre que la solution est 20 vaches.

Exercice 7

Si h est la hauteur atteinte par l'échelle et d son écartement au sol, on a les 2 relations $70\left(\frac{1}{h} + \frac{1}{d}\right) = 1$ et $h^2 + d^2 = 62500$

d'où $h = 5a + \sqrt{25a^2 - 700a}$ avec $a = 700(7 + \sqrt{674})$.

Exercice 8

Tout entier naturel m un entier naturel inférieur ou égal à n est un diviseur de $n!$

- Puisque 13 est un diviseur premier de $n!$, n est supérieur ou égal à 13;
- Puisque 17 n'est pas un diviseur premier de $n!$, n est inférieur à 17.
- Puisque 5^3 est un diviseur de $n!$, alors le produit $n(n-1)(n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$ doit contenir trois facteurs multiples de 5.

Donc $n \geq 15$. On a donc $n = 15$ ou $n = 16$.

Comptons le nombre de facteurs 2 dans la décomposition de $16!$ En produit de facteurs premiers :

Les facteurs pairs sont 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 et 16 soit $2, 2^2, 2 \times 3, 2^3, 2 \times 5, 2^2 \times 3, 2 \times 7$ et 2^4

Les facteurs 2, 6, 10, et 14 contribuent chacun 1 facteur 2.

Il y a donc 15 facteurs 2 dans la décomposition de $16!$

On vérifie que $16! = 2^{15} \times 3^6 \times 5^3 \times 7^2 \times 11 \times 13$ donc $n = 16$.

Exercice 9

$$1. \left(1 + \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1}\right)^2 = 1 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2} + \underbrace{\frac{2}{a} - \frac{2}{a+1} - \frac{2}{a(a+1)}}_0 \text{ donc } \left(1 + \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1}\right)^2 = 1 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2}.$$

On en déduit que pour tout entier naturel k non nul $\sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}} = 1 + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ (car $1 + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} > 0$)

$$2. \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}} = \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = n + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}} = n + 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n(n+2)}{n+1}.$$

Probabilités

Exercice 1

Réponses : (9, 5, 1), (8, 4, 3) et (7, 6, 2) ; (9, 4, 2), (8, 6, 1) et (7, 5, 3)

Exercice 2

Soient n le nombre de places disponibles, N le nombre réservations délivrées et X la variable aléatoire donnant le nombre de clients qui se présentent. X suit la loi binomiale $B(N; 0,95)$.

L'événement « Tous les clients ne peuvent être accueillis » est l'événement $\{X > n\}$.

n	N	$P(X \leq n)$	$P(X > n)$
20	21	0,659	0,341
200	210	0,607	0,393
2000	2100	0,705	0,295

C'est la compagnie aérienne qui a la plus forte probabilité de ne pas pouvoir accueillir tous ses clients.

Commentaire : Contrairement à l'intuition selon laquelle le restaurateur a la plus forte probabilité de ne pas pouvoir accueillir ses clients, le calcul montre que la compagnie aérienne est dans la position la moins confortable. En effet la probabilité demandée n'est pas une fonction monotone décroissante de la taille.

Exercice 3

1. Il suffit d'observer que le nombre de « paires » de poissons est $\frac{49 \times 50}{2} = 1225$. On ne peut pas partager cet ensemble de 1225

« paires » en deux sous-ensembles de même effectif.

2. S'il y a n poissons avec a d'un sexe et b de l'autre, la probabilité de tirer 2 poissons de sexes différents est égale à

$$\frac{ab}{\binom{n}{2}} = \frac{2ab}{n(n-1)}. \text{ Elle est égale à } \frac{1}{2} \text{ si } n(n-1) = 4ab \text{ avec } a+b = n \text{ d'où l'on tire :}$$

$$n = a + b = (a - b)^2 : n \text{ est donc un carré.}$$

Réciproquement : S'il existe un entier naturel k tel que $n = k^2$ on obtient $a = \frac{k^2 + k}{2}$ et $b = \frac{k^2 - k}{2}$

$$\text{(ou } a = \frac{k^2 - k}{2} \text{ et } b = \frac{k^2 + k}{2} \text{)}.$$

Conclusion : La probabilité de tirer deux poissons de sexes différents est égale à $\frac{1}{2}$ si et seulement si le nombre n de poissons

dans l'aquarium est un carré k^2 , le nombre de poissons de chaque sexe étant $\frac{k^2-k}{2}$ et $\frac{k^2+k}{2}$.

Si $n = 49$ alors $k = 7$ et s'il y a 21 poissons d'un sexe et 28 de l'autre, le vendeur a raison.

Autre solution :

Soit x le nombre de femelles.

1) S'il y a 50 poissons au total dans l'aquarium, on établit à l'aide d'un arbre que la probabilité de choisir deux poissons de même sexe est : $\frac{x}{50} \times \frac{x-1}{49} + \frac{50-x}{50} \times \frac{49-x}{49}$.

L'équation $\frac{x}{50} \times \frac{x-1}{49} + \frac{50-x}{50} \times \frac{49-x}{49} = 0,5$ équivaut à : $2x^2 - 100x + 1225 = 0$. Cette équation du second degré n'a pas de solution entière.

2) S'il y a 49 poissons au total dans l'aquarium, on établit de même que la probabilité de choisir deux poissons de même sexe est égale à 0,5 si et seulement si $2x^2 - 98x + 1176 = 0$. Cette équation a pour solutions 21 et 28.

Donc s'il y a 21 femelles et 28 mâles, ou bien s'il y a 28 femelles et 21 mâles, la probabilité de tirer deux poissons de même sexe est égale à la probabilité de tirer deux poissons de sexes différents.

Le vendeur a donc raison s'il y a 21 poissons d'un sexe et 28 de l'autre.

Exercice 4

Soit E_n le nombre moyen de coups nécessaires pour obtenir au moins une fois chacun des nombres, dans un tirage équiprobable des nombres de 1 à n .

Ayant tiré un nombre quelconque au premier coup, on a ensuite, à chaque tirage la probabilité $\frac{1}{n}$ de retomber sur le premier

nombre, donc la probabilité $\frac{n-1}{n}$ de tirer l'un des $n-1$ autres : On en déduit que $E_n = 1 + E_{n-1} \times \frac{n-1}{n}$. (E_n) est une suite

croissante: $E_1 = 1, E_2 = 3, E_3 = \frac{11}{2}, E_4 = \frac{25}{3}, E_5 = \frac{135}{12}, \dots, E_{20} = 71,955\dots$ J'ai donc fabriqué un icosaèdre.

Remarque : il existe 5 sortes de polyèdres convexes réguliers, ce sont les cinq polyèdres de Platon (le tétraèdre avec $n = 4$, le cube avec $n = 6$, l'octaèdre pour $n = 8$, le dodécaèdre pour $n = 12$ et l'icosaèdre pour $n = 20$).

Exercice 5

Premier cas : On fait un seul paquet. Soit X la variable aléatoire correspondant à la valeur des envois arrivés à bon port.

La loi de probabilité de X est la suivante :

Ω	Paquet égaré	Paquet arrivé à bon port	$E(X) = 0,1 \times 0 + 0,9 \times 250 = 225$
X	0	250	
probabilités	0,1	0,9	

Deuxième cas : On fait deux paquets séparés. Notons A l'événement « le premier colis est arrivé » et B l'événement « le deuxième colis est arrivé ». Soit Y la variable aléatoire correspondant à la valeur des envois arrivés à bon port.

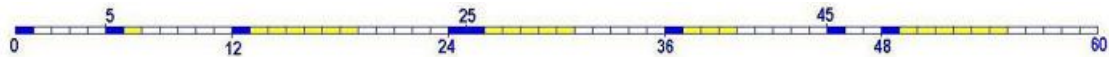
La loi de probabilité de Y est la suivante :

Ω	\bar{A} et \bar{B}	\bar{A} et B	A et \bar{B}	A et B	$E(Y) = 0,01 \times 0 + 0,09 \times 100 + 0,09 \times 150 + 0,81 \times 250 = 225$
Y	0	100	150	250	

probabilités	0,01	0,09	0,09	0,81
--------------	------	------	------	------

L'espérance ne dépend pas du nombre de colis.

Exercice 6



La durée d'attente est de 11 min si Émilie se présente à la station à :13 ou à :49 quand le bus vient de partir. C'est la valeur maximale.

La durée d'attente d'Émilie dépend de la position à l'instant de son arrivée à la station dans l'intervalle $[0, 60[$.

Sur l'échelle ci-dessus, on a représenté en jaune l'ensemble des instants pour lesquels la durée d'attente sera supérieure à 5 min. IL s'agit de 5 intervalles d'une durée totale de 21 min.

La probabilité pour qu'Émilie attende plus de 5 min est donc $p = \frac{21}{60} = 0,35$.

Fonctions

Exercice 1

a) Ensemble de définition de f : $D = [1, +\infty[$

b) $[f(x)]^2 = x + 2\sqrt{x-1} + x - 2\sqrt{x-1} + 2\sqrt{(x-2)^2}$ soit $[f(x)]^2 = 2x + 2|x-2|$. Donc $\begin{cases} f(x) = 2 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ f(x) = 2\sqrt{x-1} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Exercice 2

On dénombre : 9^{10} entiers de dix chiffres ne comportant aucun 0, 8^{10} entiers de dix chiffres ne comportant ni 0, ni 1.

On a donc $10^{10} - 9^{10}$ nombres k pour lesquels $f(k) = 0$ et $9^{10} - 8^{10}$ nombres k pour lesquels $f(k) = 1$.

De même, on a $8^{10} - 7^{10}$ nombres k pour lesquels $f(k) = 2$, etc.

On en déduit que :

$$\sum_{k=10^9}^{10^{10}-1} f(k) = 0 \times (10^{10} - 9^{10}) + 1 \times (9^{10} - 8^{10}) + 2 \times (8^{10} - 7^{10}) + 3 \times (7^{10} - 6^{10}) + \dots + 8 \times (2^{10} - 1^{10}) + 9 \times (1^{10} - 0^{10}) \text{ soit}$$

$$\sum_{k=10^9}^{10^{10}-1} f(k) = 9^{10} + 8^{10} + 7^{10} + \dots + 2^{10} + 1^{10} = 4\,914\,341\,925.$$

Exercice 3

Considérer les nombres $x - E(x), 2x - E(2x), \dots, (n-1)x - E((n-1)x)$, partager l'intervalle $[0;1]$ en n parties égales et après avoir éliminé le premier et le dernier, utiliser le principe des tiroirs.

Exercice 4

Soit $f : x \mapsto x+1$ définie sur \mathbb{R} et $g : x \mapsto \frac{x}{x+1}$. Notons que tout réel y a un unique antécédent par f qui est $y-1$

(en effet $x+1 = y \Leftrightarrow x = y-1$) et que tout réel y différent de 1 a un unique antécédent par g qui est $\frac{y}{1-y}$ (en effet

$$\frac{x}{x+1} = y \Leftrightarrow x = \frac{y}{1-y}$$

En remontant la chaîne arrivant à $\frac{7891}{1987}$, on constate qu'il y a deux sortes d'opérations possibles : Soustraire 1, la deuxième, calculer $\frac{y}{1-y}$. Les résultats obtenus étant strictement positifs, la première (A) ne s'applique qu'à des nombres plus grands que 1 et la deuxième (B) à des nombres strictement compris entre 0 et 1. La suite d'opération est donc nécessairement unique.

On obtient la chaîne suivante : $\frac{7891}{1987} \xrightarrow{A(3 \text{ fois})} \frac{1930}{1987} \xrightarrow{B} \frac{1930}{57} \xrightarrow{A(33 \text{ fois})} \frac{49}{57} \xrightarrow{B} \frac{49}{8} \xrightarrow{A(6 \text{ fois})} \frac{1}{8} \xrightarrow{B} \frac{1}{7} \xrightarrow{B} \frac{1}{6} \xrightarrow{B} \frac{1}{5} \xrightarrow{B} \frac{1}{4} \xrightarrow{B} \frac{1}{3} \xrightarrow{B} \frac{1}{2} \xrightarrow{B} 1$

Exercice 5

Pour tout x réel, $f(x) \leq g(x)$ donc $f(-x) \leq g(-x)$ d'où $f(-x) \leq -g(x) \leq -f(x)$ (1)

Or : $f(x + (-x)) \leq f(x) + f(-x)$. Donc $f(0) \leq f(x) + f(-x)$ ou encore $f(-x) \geq f(0) - f(x)$ (2)

En outre, $f(x + 0) \leq f(x) + f(0)$. Par conséquent : $f(0) \geq 0$.

On a donc $f(-x) \geq f(0) - f(x) \geq -f(x)$ et comme, d'après (1), $f(-x) \leq -f(x)$, on en déduit que, pour tout x réel :

$-f(x) \leq f(-x) \leq -f(x)$ d'où : **Pour tout x réel, $-f(x) = f(-x)$. f est donc impaire.**

Exercice 6

Pour tout x réel, $f(x-x) = f(0) = f(x) + x$. Donc, pour tout réel x , $f(x) = -x + f(0)$. f est donc une fonction affine.

Exercice 7

1. Si, pour tout $x > 0$, $f(x) = \frac{1}{x}$, alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ et, pour tout } x > 0 \text{ et pour tout } y > 0, f(xf(y)) = \frac{1}{x \times \frac{1}{y}} = y \times \frac{1}{x} \text{ soit } f(xf(y)) = yf(x).$$

2. a) Si $x = y$, la relation $f(xf(y)) = yf(x)$ devient : $f(xf(x)) = xf(x)$, c'est-à-dire que $xf(x)$ est un point fixe de f .

Si $x = y = 1$, on obtient $f(f(1)) = f(1)$

Si $x=1$ et $y = f(1)$, on obtient $f(f(f(1))) = f(1) \times f(1)$ soit $f(1) = f(1) \times f(1)$ et comme $f(1)$ est non nul on a $f(1)=1$.

b) En appliquant f à la relation de départ : $f(f(xf(y))) = f(yf(x))$ d'où $f(f(xf(y))) = xf(y)$

En remplaçant y par 1, on obtient : $f(f(xf(1))) = xf(1)$ et comme $f(1)=1$, on a : pour tout $x > 0$, $f(f(x)) = x$.

Remplaçons y par $f(z)$ dans la relation $f(xf(y)) = yf(x)$, on obtient : $f(xf(f(z))) = f(z)f(x)$ et comme $f(f(z)) = z$, on

en déduit que pour tout $x > 0$ et tout $z > 0$, $f(xz) = f(z)f(x)$. En particulier, si $z = \frac{1}{x}$, $f(1) = f\left(\frac{1}{x}\right)f(x)$.

Donc, pour tout $x > 0$, $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$

c) Supposons qu'il existe un réel $a \neq 1$ ($a > 0$) tel que $f(a) = a$, alors $f(a^2) = f(a) \times f(a) = a^2$, puis par une récurrence immédiate : Pour tout entier naturel n , $f(a^n) = a^n$.

Si $a > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a^n) = +\infty$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Si $0 < a < 1$, alors $\frac{1}{a} > 1$ et $f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{f(a)} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a}$ serait donc un point fixe de f strictement supérieur à 1, ce qui est

impossible.

Il en résulte que le seul point fixe de f est 1 et comme, d'après 2. a), pour tout $x > 0$, $f(xf(x)) = xf(x)$, on en déduit que :

Pour tout $x > 0$, $xf(x) = 1$ d'où $f(x) = \frac{1}{x}$.

Suites

Exercice 1 Réponse : 1244

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_1 = 2013 \text{ et } u_2 = a \text{ et, pour tout entier } n \text{ supérieur ou égal à } 2, u_n = u_{n-2} - u_{n-1}$$

On obtient successivement :

$$u_1 = 2013, u_2 = a, u_3 = 2013 - a, u_4 = 2a - 2013, u_5 = 2 \times 2013 - 3a, u_6 = 5a - 3 \times 2013, u_7 = 5 \times 2013 - 8a,$$

$$u_8 = 13a - 8 \times 2013, u_9 = 13 \times 2013 - 21a, u_{10} = 34a - 21 \times 2013, u_{11} = 34 \times 2013 - 55a, u_{12} = 89a - 55 \times 2013,$$

Pour maximiser le nombre de termes, on doit choisir une valeur de a pour laquelle le plus grand nombre possible de termes soient positifs. Le premier « terme » négatif indique que la suite s'est terminée au terme précédent.

Ces termes sont positifs si :

$$0 \leq \frac{a}{2013} \leq 1, \frac{1}{2} \leq \frac{a}{2013} \leq \frac{2}{3}, \frac{3}{5} \leq \frac{a}{2013} \leq \frac{5}{8}, \frac{8}{13} \leq \frac{a}{2013} \leq \frac{13}{21}, \frac{21}{34} \leq \frac{a}{2013} \leq \frac{34}{55}, \frac{55}{89} \leq \frac{a}{2013} \leq \frac{89}{144}, \frac{144}{233} \leq \frac{a}{2013} \leq \frac{233}{377}, \dots$$

On vérifie qu'il existe un entier naturel a unique tel que $\frac{55}{89} \leq \frac{a}{2013} \leq \frac{89}{144}$. Cet entier est $a = 1244$.

Il n'y a pas d'entier a tel que $\frac{144}{233} \leq \frac{a}{2013} \leq \frac{233}{377}$.

La réponse est donc : $a = 1244$.

Remarque

En posant $F_1 = 1, F_2 = 1$ et, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$ (suite de Fibonacci) on établit que :

Pour tout entier naturel n , $\begin{cases} u_{2n-1} = F_{2n-1}a - F_{2n-2} \times 2013 \\ u_{2n} = F_{2n-1} \times 2013 - F_{2n}a \end{cases}$. Ces deux termes sont positifs si et seulement si :

$$\frac{F_{2n-2}}{F_{2n-1}} \leq \frac{a}{2013} \leq \frac{F_{2n-1}}{F_{2n}}. \text{ Comme } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_{2n-2}}{F_{2n-1}} = \varphi \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_{2n-1}}{F_{2n}} = \varphi \text{ (où } \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{), } a \text{ est l'entier compris entre } 1 \text{ et } 2013 \text{ pour lequel}$$

le rapport $\frac{a}{2013}$ est « le plus proche » de φ .

Exercice 2

Notons u_k le nombre de médailles distribuées le k ème jour ($k \geq 1$).

$$u_1 = 1 + \frac{m-1}{7}, u_2 = 2 + \frac{m-u_1-2}{7}, u_3 = 3 + \frac{m-u_1-u_2-3}{7} \dots u_k = k + \frac{m-u_1-u_2-\dots-u_{k-1}-k}{7} \dots$$

D'où $u_{k+1} - u_k = 1 - \frac{u_k + 1}{7}$ soit $u_{k+1} = \frac{6}{7}(u_k + 1)$. On en déduit que $u_{k+1} - 6 = \frac{6}{7}(u_k - 6)$. $(u_k - 6)_{k \geq 1}$ est une suite géométrique de

raison $\frac{6}{7}$. Donc, pour tout entier $k \geq 1$, $u_k - 6 = (u_1 - 6) \times \left(\frac{6}{7}\right)^{k-1}$ soit $u_k = 6 + (u_1 - 6) \times \left(\frac{6}{7}\right)^{k-1}$

Par hypothèse, $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = m$ donc $\sum_{k=1}^n \left(6 + (u_1 - 6) \times \left(\frac{6}{7} \right)^{k-1} \right) = m$.

$$\text{Or } \sum_{k=1}^n \left(6 + (u_1 - 6) \times \left(\frac{6}{7} \right)^{k-1} \right) = \sum_{k=1}^n 6 + (u_1 - 6) \sum_{k=1}^n \left(\frac{6}{7} \right)^{k-1} \text{ soit } \sum_{k=1}^n \left(6 + (u_1 - 6) \times \left(\frac{6}{7} \right)^{k-1} \right) = 6n + (u_1 - 6) \frac{1 - \left(\frac{6}{7} \right)^n}{1 - \frac{6}{7}}.$$

On a donc $6n + 7(u_1 - 6) \left(1 - \left(\frac{6}{7} \right)^n \right) = m$. De plus $u_n = n$ donc $n = 6 + (u_1 - 6) \times \left(\frac{6}{7} \right)^{n-1}$ d'où $u_1 - 6 = \frac{n - 6}{\left(\frac{6}{7} \right)^{n-1}}$. En reportant cette

valeur dans l'égalité $6n + 7(u_1 - 6) \left(1 - \left(\frac{6}{7} \right)^n \right) = m$, on obtient : $6n + 7 \frac{n - 6}{\left(\frac{6}{7} \right)^{n-1}} \times \left(1 - \left(\frac{6}{7} \right)^n \right) = m$ soit $6n + (n - 6) \times \left(\frac{7^n}{6^{n-1}} - 6 \right) = m$

m devant être entier, 6^{n-1} doit diviser $(n - 6)7^n$. Or 7^n n'est pas divisible par 6 donc 6^{n-1} doit diviser $(n - 6)$.

Par hypothèse, $n > 1$. Le plus petit entier qui convient est $n = 6$. Pour $n > 6$, $0 < n - 6 < 6^{n-1}$ (démonstration qui peut se faire par récurrence).

On a donc $n = 6$ et $m = 36$: Il a été distribué 36 médailles pendant 6 jours.

Exercice 3

Soit q_1 et r_1 le quotient et le reste de la division euclidienne de n par 8.

$n = 8q_1 + r_1$ où q_1, r_1 sont des entiers positifs et $0 \leq r_1 < 8$.

Alphonse doit faire q_1 sauts de 8 carrés et faire r_1 sauts de 1 carré. Le nombre de sauts que doit faire Alphonse est donc :

$A(n) = q_1 + r_1$. De même :

Soit q_2 et r_2 le quotient et le reste de la division euclidienne de n par 7.

$n = 7q_2 + r_2$ où q_2, r_2 sont des entiers positifs et $0 \leq r_2 < 7$, et $B(n) = q_2 + r_2$.

(a) Étant donné que le saut que fait Alphonse, qui est de 8 carrés, est supérieur à celui de Béryl, qui est de 7 carrés, pour que Béryl finisse plus vite qu'Alphonse, n doit être un entier tel que Béryl fasse très peu de sauts de 1 carré et qu'Alphonse fasse beaucoup de sauts de 1 carré; donc r_2 doit être le plus petit possible et r_1 le plus grand possible.. Donc $r_1 = 7$ et $r_2 = 0$.

On a donc $n = 8q_1 + 7 = 7q_2$. On en déduit que q_1 est un multiple de 7 : Il existe un entier k tel que $q_1 = 7k$.

D'où $n = 7(8k + 1) = 7q_2$. Par conséquent : $n = 56k + 7$.

$231 = 33 \times 7$ donc $B(231) = 33$. $231 = 28 \times 8 + 7$, donc $A(231) = 35$. Par conséquent, $B(231) < A(231)$. Donc, $n = 231$, un entier positif satisfait les conditions voulues.

(b) Si $B(n) \leq A(n)$, alors $q_2 + r_2 \leq q_1 + r_1$ d'où $r_2 \leq q_1 + r_1 - q_2$. Comme $8q_1 + r_1 = 7q_2 + r_2$ et, on a donc :

$$8q_1 + r_1 \leq 7q_2 + q_1 + r_1 - q_2 \text{ d'où } 7q_1 \leq 6q_2. \text{ Par conséquent, } q_2 \geq \frac{7q_1}{6}$$

Or $8q_1 + r_1 = 7q_2 + r_2$. En majorant q_2 par $\frac{7q_1}{6}$, on obtient : $-8q_1 + r_1 \geq \frac{49}{6} q_1 + r_2$. D'où $\frac{q_1}{6} \leq r_1 - r_2$.

Comme $r_1 \leq 7$ et $r_2 \geq 0$, on en déduit que $r_1 - r_2 \leq 7$, d'où $q_1 \leq 42$ et $8q_1 + r_1 \leq 8 \times 42$ soit $n \leq 343$.

Montrons que 343 est le plus grand entier tel que $B(n) \leq A(n)$.

$343 = 42 \times 8 + 7$, d'où $A(343) = 42 + 7 = 49$. $343 = 49 \times 7$, d'où $B(343) = 49$.

Par conséquent, $A(343) = B(343)$. D'après le raisonnement qui précède, si $n > 343$, $B(n) > A(n)$.

Donc $n = 343$ est le plus grand entier positif tel que $B(n) \leq A(n)$.

Exercice 4

Si on pose $m = n = 0$, l'équation devient : $a_0 + a_0 = \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{2}a_0$. D'où $2a_0 = a_0$, ou $a_0 = 0$.

Si on pose $m = 1$ et $n = 0$, l'équation devient : $a_1 + a_1 = \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2}a_0$ d'où $1 + 1 = \frac{1}{2}a_2$ ou $a_2 = 4$

Avec $m = 2$ et $n = 1$, l'égalité initiale devient : $a_1 + a_3 = \frac{1}{2}a_4 + \frac{1}{2}a_2$ soit $1 + a_3 = \frac{1}{2}a_4 + 2$

Calcul de a_4 : Avec $m = 2$ et $n = 0$, l'égalité initiale devient : $a_2 + a_2 = \frac{1}{2}a_4 + \frac{1}{2}a_0$. On en déduit que $a_4 = 16$.

En remplaçant a_4 par 16 dans l'égalité $1 + a_3 = \frac{1}{2}a_4 + 2$, on obtient $a_3 = 9$.

2. Soit n un entier naturel quelconque. Avec $m = n$, l'égalité initiale devient $b_0 + b_{2n} = b_{2n} + b_{2n}$. D'où $b_0 = b_{2n}$.

Donc, tous les termes dont l'indice est pair ont une même valeur.

Avec $m = 1$ et $n = 0$, l'égalité initiale devient : $b_1 + b_1 = b_2 + b_0$

Puisque $b_2 = b_0$, cette égalité devient $2b_1 = 2b_0$, ou $b_1 = b_0$.

Soit n un entier naturel et $m = n + 1$. L'égalité initiale devient : $b_1 + b_{2n+1} = b_{2n} + b_{2n+2}$

Puisque $b_1 = b_0$ et $b_{2n} = b_{2n+2} = b_0$, l'égalité devient : $b_0 + b_{2n+1} = 2b_0$, ou $b_{2n+1} = b_0$.

Donc, tous les termes qui ont un indice impair ont la même valeur que b_0 .

On en déduit que la suite (b_n) est constante.

Exercice 5

Soit x_1 un entier naturel. On pose : $x_2 = x_1 + \lceil \sqrt{x_1} \rceil$, et, pour tout entier naturel n , $x_{n+1} = x_n + \lceil \sqrt{x_n} \rceil$.

Supposons que x_1 ne soit pas un carré parfait (sinon on s'arrête à $n = 1$).

x_1 est compris entre deux carrés parfaits n^2 et $(n + 1)^2$. Il existe donc un entier k tel que $x_1 = n^2 + k$ avec $1 \leq k \leq 2n$.

Supposons en outre que x_1 soit plus proche de n^2 que de $(n + 1)^2$. Alors $1 \leq k \leq n$.

On obtient : $x_2 = n^2 + k + n$, $x_3 = n^2 + k + 2n = (n + 1)^2 + k - 1$. On établit de même que $x_5 = (n + 2)^2 + k - 2$ et, plus généralement :

$$x_{2p+1} = (n + p)^2 + k - p. \text{ On a donc } x_{2k+1} = (n + k)^2$$

Si x_1 est plus proche de $(n + 1)^2$ que de n^2 , alors $n + 1 \leq k \leq 2n$. Il existe donc un entier k' tel que $k = n + k'$ avec $1 \leq k' \leq n$.

On a donc : $x_1 = n^2 + n + k'$ avec $1 \leq k' \leq n$. On est donc ramené au cas précédent avec un décalage de un rang.