ACADÉMIE DE VERSAILLES
Liberté Égalité Fraternité

Pépinière académique de mathématiques

Année 2021-2022 **Stage « filé »**

Classe de seconde **Fiche numéro 1**

Parution lundi 8 novembre **Retour attendu pour le lundi 22 novembre**

Exercice n°1 … de l'origine des inégalités

Définition : on dit qu'un nombre a est inférieur ou égal à un nombre b lorsque $b - a \geq 0$.
Cette définition conduit à une méthode pratique pour comparer deux nombres.
Soit a, b, c et d des nombres réels
Théorème 1 : si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$ et si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a + c \leq b + d$.
(si $a \leq b$ alors $b - a \geq 0$ donc, comme $b - a = (b + c) - (a + c)$, $(b + c) - (a + c) \geq 0$
soit $(b + c) \geq (a + c)$)
Théorème 2 :
Si $a \leq b$ et $c \geq 0$ alors $ac \leq bc$
Si $a \leq b$ et $c \leq 0$ alors $ac \geq bc$
Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$ alors $ac \leq bd$.
Théorème 3 :
Si $0 < a \leq b$ alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} > 0$.
Dans tout exercice portant sur des inégalités, on se ramène souvent à l'un au moins de ces théorèmes.

Démontrer la deuxième partie du théorème 1 ainsi que les théorèmes 2 et 3.

Théorème 1 :
si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $b - a \geq 0$ et $d - c \geq 0$.
Or $(b + d) - (a + c) = (b - a) + (d - c)$. La somme de deux nombres positifs ou nuls est positive ou nulle donc, $(b + d) - (a + c) \geq 0$ soit $(b + d) \geq (a + c)$.
Théorème 2 :
Si $a \leq b$ (c'est-à-dire $b - a \geq 0$) comme $bc - ac = c(b - a)$ alors :
- si $c \geq 0$ alors $c(b - a) \geq 0$ soit $ac \leq bc$
- si $c \leq 0$ alors $c(b - a) \leq 0$ soit $ac \geq bc$

et si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$, alors comme $c \geq 0$, $ac \leq bc$ et comme $b \geq 0$, $bc \leq bd$ d'où $ac \leq bc \leq bd$.
Théorème 3 :
$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab}$ donc si $0 < a \leq b$, alors $a - b \leq 0$ et $ab > 0$ d'où $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \geq 0$ et $a > 0$ soit $\frac{1}{b} \geq \frac{1}{a} > 0$.

Exercice 2 Encadrements

On considère un rectangle de largeur l et de longueur L. On sait que $9{,}99 \leq l \leq 10{,}01$ et $19{,}99 \leq L \leq 20{,}01$.
a. Trouver un encadrement du périmètre P du rectangle. Traduire cet encadrement par l'appartenance à un intervalle du type $[a - r, a + r]$.
Préciser l'amplitude de cet encadrement.
b. Trouver de même un encadrement de l'aire $\mathcal{A}$ du rectangle. Préciser l'amplitude de cet encadrement.
Peut-on en déduire que $199{,}7 \leq \mathcal{A} \leq 200{,}3$?

a. $9{,}99 \leq l \leq 10{,}01$ et $19{,}99 \leq L \leq 20{,}01$. En additionnant membre à membre les inégalités (théorème 1)
$9{,}99 + 19{,}99 \leq l + L \leq 10{,}01 + 20{,}01$ soit $29{,}98 \leq l + L \leq 30{,}02$
Soit, en multipliant par 2 (qui est positif) les deux membres de l'inégalité, $59{,}96 \leq P \leq 60{,}04$.
Comme $\frac{59{,}96+60{,}04}{2} = 60$, ceci signifie que $P \in [60 - 0{,}04, 60 + 0{,}04]$.
On dit que 60 est une *valeur approchée* de P à la précision 0,04.
L'amplitude de cet encadrement est 0,08.
b. $9{,}99 \leq l \leq 10{,}01$ et $19{,}99 \leq L \leq 20{,}01$ donc en multipliant membre à membre les inégalités (théorème 2)
$9{,}99 \times 19{,}99 \leq l \times L \leq 10{,}01 \times 20{,}01$ soit $199{,}7001 \leq \mathcal{A} \leq 200{,}3001$.
L'amplitude de cet encadrement est 0,6 $(200{,}3001 - 199{,}7001)$.
Pour autant, comme $200{,}3001 > 200{,}3$), on ne peut affirmer que $199{,}7 \leq \mathcal{A} \leq 200{,}3$. On pourrait par exemple avoir $\mathcal{A} = 200{,}30005$.

Exercice 3 Multiples et diviseurs

Définition : On dit qu'un nombre entier a est un *multiple* d'un nombre entier b s'il existe un nombre entier k tel que $a = kb$.
On dit alors que b est un *diviseur* de a ou que a est *divisible* par b.
Dans les exercices mieux vaut se ramener à la définition en termes de « multiple de » pour éviter d'écrire des quotients.

Définition : un nombre entier naturel est dit premier lorsqu'il a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.
On admettra le théorème suivant
Théorème : Si un nombre est multiple de plusieurs nombres premiers distincts alors il est multiple du produit de ces nombres premiers.

Théorème (division euclidienne) : soit a et b deux entiers naturels tels que $b \neq 0$, alors il existe un unique couple (q, r) d'entiers naturels tels que $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$.

a. Montrer que la somme de deux nombres impairs consécutifs est un multiple de 4.
b. Montrer que si l'écriture décimale d'un nombre A est $\overline{xy}$ et celle d'un nombre B est $\overline{yx}$ alors le nombre $A + B$ est divisible par 11.
c. Montrer que si l'écriture décimale d'un nombre A est $\overline{cdu}$ et si $c + d + u = 9$ alors le nombre A est divisible par 9.
d. Montrer que pour tous nombres entiers a et b, le produit $ab(a^2 - b^2)$ est un multiple de 3.
(on pourra étudier les restes dans les divisions euclidiennes de a et b par 3).
e. Montrer que pour tout entier n, $n(n + 1)(2n + 1)$ est divisible par 2 et par 3.
f. Montrer que le produit de trois nombres pairs consécutifs est un multiple de 48.

a. Un nombre n est impair s'il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$. Deux entiers impairs consécutifs peuvent donc s'écrire $2k + 1$ et $2k + 3$. Leur somme s'écrit $S = 2k + 1 + 2k + 3 = 4k + 4 = 4(k + 1)$.
On a donc bien un multiple de 4.
b. $A = 10x + y$ et $B = 10y + x$ d'où $A + B = 11x + 11y = 11(x + y)$ et $A + B$ est un multiple de 11 c'est-à-dire divisible par 11.
c. $A = 100c + 10d + u = 99c + 9d + c + d + u = 9(11c + d + 1)$ donc A est un multiple de 9 c'est-à-dire divisible par 9.
d. Si a ou b est multiple de 3, il existe un entier k tel que $ab = 3k$ et donc $ab(a^2 - b^2) = 3k(a^2 - b^2) = 3k'$ où k'est l'entier $k(a^2 - b^2)$.
Sinon, les restes dans la division de a et b par 3 sont 1 ou 2, ce qui donne quatre cas à étudier et il suffit pour chaque cas d'avoir un des nombres du produit $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ multiple de 3 pour que $ab(a^2 - b^2)$ soit multiple de 3. S'il existe deux entiers k et k' tels que :

- $a = 3k + 1$ et $b = 3k' + 1$ alors $a - b$ est multiple de 3 car $a - b = 3(k - k')$
- $a = 3k + 1$ et $b = 3k' + 2$ alors $a + b$ est multiple de 3 car $a + b = 3(k + k' + 1)$
- $a = 3k + 2$ et $b = 3k' + 1$ alors $a + b$ est multiple de 3 car $a + b = 3(k + k' + 1)$
- $a = 3k + 2$ et $b = 3k' + 2$ alors $a - b$ est multiple de 3 car $a - b = 3(k - k')$

e. n et $n + 1$ sont deux entiers consécutifs donc l'un des deux est pair. Le produit $n(n + 1)(2n + 1)$ est donc multiple de 2.
On raisonne ensuite comme dans la question précédente en considérant les restes dans la division euclidienne de n par 3. S'il existe un entier k tel que :

- $n = 3k$ alors le produit $n(n + 1)(2n + 1)$ est multiple de 3 ;
- $n = 3k + 1$ alors $2n + 1 = 2(3k + 1) + 1 = 3(2k + 1)$ et le produit $n(n + 1)(2n + 1)$ est multiple de 3 ;
- $n = 3k + 2$ alors $n + 1 = 3k + 2 + 1 = 3(k + 1)$ et le produit $n(n + 1)(2n + 1)$ est multiple de 3.

Dans tous les cas le théorème admis nous permet d'affirmer que le produit $n(n + 1)(2n + 1)$ est multiple de 6.
f. Soit trois nombres pairs consécutifs. Il existe un entier k tel que ces trois nombres s'écrivent $2k - 2, 2k, 2k + 2$.
Leur produit s'écrit alors $P = 8(k - 1)k(k + 1)$.
Le produit de deux entiers consécutifs est multiple de 2 puisque parmi les deux il y en a un qui est pair donc $(k - 1)k(k + 1)$ est multiple de 2.
De plus, en considérant les restes dans la division euclidienne de k par 3, on montrerait que parmi trois entiers consécutifs, l'un est un multiple de 3 donc P est un multiple de 3.

Comme précédemment, on en déduit que P est un multiple de $8 \times 2 \times 3 = 48$.

Exercice 4 Développement décimal d'un nombre rationnel

Propriété : : soit a et b deux entiers tels que $b \neq 0$. Le développement décimal du nombre rationnel $\frac{a}{b}$ est fini (nombre décimal) ou infini mais périodique à partir d'un certain rang.

On peut procéder par divisions euclidiennes successives :

$a = b\boldsymbol{q_0} + r_0$ et $r_0 < b$, $10r_0 = b\boldsymbol{q_1} + r_1$ et $r_1 < b$, $10r_1 = b\boldsymbol{q_2} + r_2$ et $r_2 < b$, $10r_2 = b\boldsymbol{q_3} + r_3$ et $r_3 < b$, …

Alors $\frac{a}{b} = q_0, q_1q_2q_3 \ldots.$

a. Expliquer pourquoi il suffit de connaitre le développement décimal de $\frac{22}{7}$ jusqu'à la 7e décimale pour connaitre entièrement ce développement décimal. Déterminer la période « à la main ».

b. Combien de décimales au maximum suffit-il calculer pour connaitre le développement décimal de $\frac{43}{13}$?

a. Pour avoir les premières décimales, on procède à des divisions euclidiennes successives par 7, chaque reste devant être strictement inférieur à 7, ce qui donne 7 possibilités (0, 1, …, 6). On finit donc dans le processus par retrouver un reste déjà obtenu et reproduire alors les mêmes calculs :

$22 = 7 \times \mathbf{3} + 1$, $10 \times 1 = 7 \times \mathbf{1} + 3$, $10 \times 3 = 7 \times \mathbf{4} + 2$, $10 \times 2 = 7 \times \mathbf{2} + 6$, $10 \times 6 = 7 \times \mathbf{8} + 4$, $10 \times 4 = 7 \times \mathbf{5} + 5$, $10 \times 5 = 7 \times \mathbf{7} + 1$, $10 \times 1 = 7 \times \mathbf{1} + 3$ et on reprend les mêmes calculs.

On a donc $\frac{22}{7} = 3{,}142857142857 \ldots = 3{,}\overline{142857}$.

b. En appliquant le même raisonnement, on peut affirmer qu'il suffit d'au maximum 13 décimales pour avoir le développement décimal de $\frac{43}{13}$.

c. On peut montrer qu'en fait le développement décimal de $\frac{43}{13}$ est $3{,}\overline{307692}$

Exercice 5 Racines carrées

Théorème : Pour tous nombres réels **positifs ou nuls** a et b :

- $\sqrt{a^2} = a$;
- $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$. En particulier $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$;
- $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Ce théorème est à la base de tous les calculs sur les racines carrées.

1. Montrer que pour tous réels positifs ou nuls x, y, on a $x + y \geq 2\sqrt{xy}$.
En déduire que pour tous réels positifs ou nuls x, y, z, on a $(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz$.

2. Montrer que pour tout $k \in \{1,2,3,4,5\}$, il existe un entier n tel que $\left(1+\sqrt{2}\right)^k = \sqrt{n} + \sqrt{n+1}$.

3. ***a.*** Montrer que pour tout entier n, $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

b. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, comparer $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ et $\sqrt{n} - \sqrt{n-1}$.

c. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{10}$.

d. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \geq 100$.

1. Deux nombres positifs ou nuls sont rangés dans le même ordre que leur carrés (conséquence du théorème « Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$ alors $ac \leq bd$ »). On compare donc $(x+y)^2$ et $\left(2\sqrt{xy}\right)^2$ en étudiant le signe de leur différence :

$(x+y)^2 - \left(2\sqrt{xy}\right)^2 = x^2 + y^2 + 2xy - 4xy = x^2 + y^2 - 2xy$ car $\left(2\sqrt{xy}\right) = 4 \times \left(\sqrt{xy}\right)^2$

Donc $(x+y)^2 - \left(2\sqrt{xy}\right)^2 = (x-y)^2$ qui est un nombre positif ce qui permet d'affirmer que $x + y \geq 2\sqrt{xy}$.

On a de même $y + z \geq 2\sqrt{yz}$ et z+x $\geq 2\sqrt{zx}$. En multipliant membre à membre les trois inégalités, puisque tous les nombres sont positifs ou nuls, on en déduit que :

$(x+y)(y+z)(z+x) \geq 2\sqrt{xy} \times 2\sqrt{yz} \times 2\sqrt{zx}$ soit $(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8\sqrt{x^2y^2z^2}$

C'est-à-dire $(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz$ car x, y et z sont positifs ou nuls.

2. Pour $k = 1$, $1 + \sqrt{2} = \sqrt{1} + \sqrt{2}$

Pour $k = 2$, $\left(1 + \sqrt{2}\right)^2 = 1 + 2 + 2\sqrt{2} = 3 + 2\sqrt{2} = \sqrt{9} + \sqrt{8}$

Pour $k = 3$, $\left(1 + \sqrt{2}\right)^3 = \left(1 + \sqrt{2}\right)^2\left(1 + \sqrt{2}\right) = \left(3 + 2\sqrt{2}\right)\left(1 + \sqrt{2}\right) = 3 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\sqrt{2}$

Soit $\left(1 + \sqrt{2}\right)^3 = 3 + 2 \times 2 + 5\sqrt{2} = 7 + \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{49} + \sqrt{50}$.

Pour $k = 4$, $\left(1 + \sqrt{2}\right)^4 = \left(1 + \sqrt{2}\right)^3\left(1 + \sqrt{2}\right) = \left(7 + 5\sqrt{2}\right)\left(1 + \sqrt{2}\right) = 7 + 5\sqrt{2} + 7\sqrt{2} + 5\sqrt{2}\sqrt{2}$

Soit $\left(1 + \sqrt{2}\right)^4 = 17 + 12\sqrt{2} = \sqrt{289} + \sqrt{288}$

Pour $k = 5$, $\left(1 + \sqrt{2}\right)^5 = \left(1 + \sqrt{2}\right)^4\left(1 + \sqrt{2}\right) = \left(17 + 12\sqrt{2}\right)\left(1 + \sqrt{2}\right) = \cdots = 41 + 29\sqrt{2} = \sqrt{1\,681} + \sqrt{1\,682}$

3. ***a.*** Pour tout entier n, $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\left(\sqrt{n+1}\right)^2-\left(\sqrt{n}\right)^2} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n+1-n} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

b. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ et $\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$.

Or, comme $n + 1 > n > n - 1 \geq 1$, $0 < \sqrt{n} + \sqrt{n-1} < \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$ d'où $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$.

On en déduit que $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$.

c. Comme $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$, on est ramené à chercher le plus petit entier naturel n tel que $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} > 10$. Comme $5 + 5 = 10$, le plus petit entier naturel n qui convient est $n = 25$.

d. Soit $S = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$.

On peut aussi écrire $S = \left(\sqrt{2} - 1\right) + \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) + \left(\sqrt{4} - \sqrt{3}\right) + \cdots + \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

La plupart des termes se simplifient deux à deux et $S = \sqrt{n+1} - 1$

$S \geq 100$ équivaut donc à $\sqrt{n+1} \geq 101$ soit $n \geq 10\,200$.