ACADÉMIE DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Pépinière académique de mathématiques

Année 2022-2023 — **Stage « filé »**

Classe de seconde — **Fiche numéro 3**

Parution lundi 13 février — **Retour attendu pour le jeudi 16 mars**

Le calcul vectoriel est un outil fort utile pour les démonstrations en géométrie :

- Le milieu I d'un segment $[AB]$ est caractérisé par l'une des égalités vectorielles suivantes :

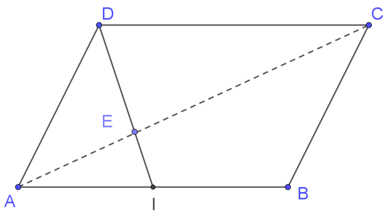
$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$ ou $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ ou, pour un point M du plan, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

- La colinéarité de deux vecteurs non nuls traduit le parallélisme de deux droites ou l'alignement de trois points.
- L'égalité de deux vecteurs se traduit par une configuration de parallélogramme.
- La relation de Chasles facilite les calculs.

Exercice 1

Soit ABCD un parallélogramme. On note I le milieu du segment [AB] et on considère le point E du segment [ID] tel que $\mathrm{IE} = \frac{1}{3}\mathrm{ID}$.

Montrer que les points A, E et C sont alignés.



Le point E est sur le segment [ID] et tel que $\mathrm{IE} = \frac{1}{3}\mathrm{ID}$. On en déduit que $\overrightarrow{IE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{ID}$.

Alors, comme I est le milieu du segment [AB], $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IE}$

Soit $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{ID} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD}\right)$.

Soit $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{6}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)$

Comme ABCD est un parallélogramme, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ d'où $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

On en déduit que les points A, E et C sont alignés.

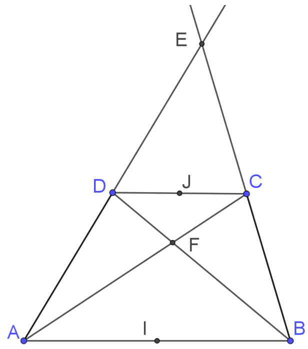
Exercice 2 – le trapèze complet

Dans la figure ci-contre ABCD est un trapèze convexe de bases [AB] et [DC].

Les droites (AD) et (BC) se coupent en un point E.

I et J désignent les milieux respectifs de [AB] et [CD].

F est le point d'intersection des droites (AC) et (BD).



1. ***a.*** Expliquez pourquoi il existe un réel a tel que $\overrightarrow{EA} = a\overrightarrow{ED}$. Préciser le signe de a.
   b. Montrer que $\overrightarrow{EB} = a\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{EI} = a\overrightarrow{EJ}$.
2. ***a.*** Expliquez pourquoi il existe un réel b tel que $\overrightarrow{FA} = b\overrightarrow{CF}$. Préciser le signe de b.
   b. Montrer que $\overrightarrow{FB} = b\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{FI} = b\overrightarrow{JF}$.
3. Que peut-on dire des points E, F, I et J ?

1. ***a.*** Les points E, D et A sont alignés donc les vecteurs $\overrightarrow{EA}$ et $\overrightarrow{ED}$ sont colinéaires et il existe bien un réel a tel que $\overrightarrow{EA} = a\overrightarrow{ED}$. (si D est sur le segment [EA], comme sur la figure, on peut même préciser $a > 1$).
   b. Les triangles EDC et EAB ont l'angle E en commun et les angles $\widehat{EDC}$ et $\widehat{EAB}$ de même mesure (angles correspondants puisque les droites (AB) et (CD) sont parallèles). Ces triangles sont donc semblables. On en déduit que $\frac{\mathrm{EB}}{\mathrm{EC}} = \frac{\mathrm{EA}}{\mathrm{ED}}$ d'où, puisque $a > 0$, $\mathrm{EB} = a\mathrm{EC}$.
   Comme $\mathrm{C} \in [\mathrm{EB}]$, on peut alors écrire $\overrightarrow{EB} = a\overrightarrow{EC}$.
   Le point I est le milieu de [AB] et le point J est le milieu de [CD] donc $\overrightarrow{EI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB}\right) = \frac{a}{2}\left(\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{EC}\right) = a\overrightarrow{EJ}$.

2. ***a.*** Les points A, F et C sont alignés dans cet ordre donc les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{FA}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CF}}$ sont colinéaires et il existe bien un réel b tel que $\overrightarrow{\mathrm{FA}} = b\overrightarrow{\mathrm{CF}}$. De plus, comme F est sur le segment [AC], $b > 0$.
b. Les triangles DFC et BFA ont leurs angles en F de même mesure (angles opposés par le sommet) et les angles $\widehat{\mathrm{ABF}}$ et $\widehat{\mathrm{CDF}}$ de même mesure (angles alternes internes puisque les droites (AB) et (CD) sont parallèles).
Ces triangles sont donc semblables. On en déduit que $\frac{\mathrm{FB}}{\mathrm{DF}} = \frac{\mathrm{FA}}{\mathrm{CF}}$ d'où, puisque $b > 0$, $\mathrm{FB} = b\mathrm{DF}$.
Comme $\mathrm{F} \in [\mathrm{DB}]$, on peut écrire $\overrightarrow{\mathrm{FB}} = b\overrightarrow{\mathrm{DF}}$.
Le point I est le milieu de [AB] et le point J est le milieu de [CD] donc $\overrightarrow{\mathrm{FI}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{FA}} + \overrightarrow{\mathrm{FB}}) = \frac{b}{2}(\overrightarrow{\mathrm{CF}} + \overrightarrow{\mathrm{DF}}) = b\overrightarrow{\mathrm{JF}}$.
3. $\overrightarrow{\mathrm{EI}} = a\overrightarrow{\mathrm{EJ}}$ donc les points E, I et J sont alignés et $\overrightarrow{\mathrm{FI}} = b\overrightarrow{\mathrm{JF}}$ donc les points F, I et J sont alignés.
On en déduit que les points E, F, I et J sont alignés.

Exercice 3

Un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est orthonormé lorsque les points I et J définis par les vecteurs $\overrightarrow{OI} = \vec{\imath}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{\jmath}$ sont tels que OI = OJ et les droites (OI) et (OJ) sont perpendiculaires.
Définition : on dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$.
Théorème : dans le plan muni d'un repère orthonormé, les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - x'y = 0$.
Définition : dans le plan muni d'un repère orthonormé, le déterminant du couple de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont les vecteurs de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ est le nombre $dét(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y$.
L'introduction d'un repère dans un exercice de géométrie permet de démontrer des alignements en s'appuyant sur la condition de colinéarité de deux vecteurs par le déterminant.

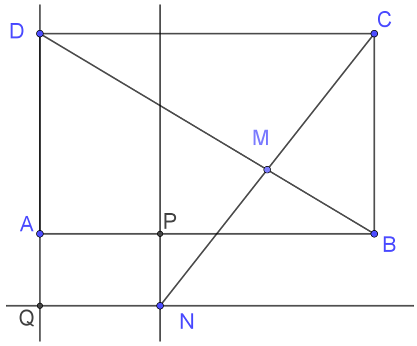
1. Démonstration du théorème
   a. Démontrer que si les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires alors $xy' - x'y = 0$.
   b. Démontrer que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont tels que $xy' - x'y = 0$ alors ils sont colinéaires.
   (on pourra traiter à part le cas où l'un au moins des vecteurs est nul)
2. Application

Soit ABCD un rectangle et M un point du segment [BD]. On considère le symétrique N du point C par rapport à M.
La parallèle à (AD) passant par N coupe (AB) en P et la parallèle à (AB) passant par N coupe (AD) en Q.
L'objectif est de montrer que les points M, P et Q sont alignés. Pour cela on se place dans le repère orthonormal $\left(\mathrm{A}, \frac{1}{a}\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \frac{1}{b}\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)$ où $\mathrm{AB} = a$ et $\mathrm{AD} = b$.
   a. Précisez les coordonnées des points A, B, C et D dans ce repère.
   b. Justifier l'existence d'un réel k tel que $\overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{BD}$. Déterminer les coordonnées du point M puis celles des points N, P et Q en fonction de k.
   c. Conclure.

1. ***a.*** Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires, alors il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$. Si $\vec{u} = k\vec{v}$ alors $\begin{cases} x = kx' \\ y = ky' \end{cases}$ d'où $xy' - x'y = kx'y' - x'ky' = 0$. Par symétrie, si $\vec{v} = k\vec{u}$ alors $xy' - x'y = xky - kxy = 0$.
   b. Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont tels que $xy' - x'y = 0$ alors :
   - Soit l'un des vecteurs est nul : si $\vec{u} = \vec{0}$ alors $0\vec{v} = \vec{u}$ et si $\vec{v} = \vec{0}$ alors $0\vec{u} = \vec{v}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires (*on retrouve que le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur, propriété découlant directement de la définition*)

- Soit aucun des vecteurs n'est nul. Comme $\vec{u} \neq \vec{0}$, on a $x \neq 0$ ou $y \neq 0$. Si $x \neq 0$, comme $xy' = x'y$, si on pose $k = \frac{x'}{x}$ alors $y' = ky$ et $\vec{v} = k\vec{u}$. Sinon, $y \neq 0$ et en posant $k = \frac{y'}{y}$, l'égalité $xy' = x'y$ donne $x' = kx$ et on retrouve $\vec{v} = k\vec{u}$.

Dans les deux cas, on en déduit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.



2. ***a.*** Dans le repère $\left(\mathrm{A}, \frac{1}{a}\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \frac{1}{b}\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)$, orthonormal puisque ABCD est un rectangle et $\mathrm{AB} = a$, $\mathrm{AD} = b$, on a $\mathrm{A}(0,0), \mathrm{B}(a,0), \mathrm{C}(a,b), \mathrm{D}(0,b)$ (car $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}}$. Donc, si $\vec{\imath} = \frac{1}{a}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\vec{\jmath} = \frac{1}{b}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ alors $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$ ce qui donne $C(a,b)$ et de même pour D).

b. Comme M est un point de [BD], les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{BM}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ sont colinéaires. Il existe donc bien un réel k tel que $\overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{BD}$. Cela se traduit par le système :

$\begin{cases} x_M - a = k(0-a) \\ y_M - 0 = k(b-0) \end{cases}$ soit $\begin{cases} x_M = a(1-k) \\ y_M = kb \end{cases}$.

N est le symétrique de C par rapport à M donc $\overrightarrow{\mathrm{MN}} = \overrightarrow{\mathrm{CM}}$ ce qui se traduit par le système :

$\begin{cases} x_N - a(1-k) = a(1-k) - a \\ y_N - kb = kb - b \end{cases}$ soit $\begin{cases} x_N = 2a(1-k) - a \\ y_N = 2kb - b \end{cases}$ soit $\begin{cases} x_N = a(1-2k) \\ y_N = b(2k-1) \end{cases}$.

Le point P est sur la parallèle à (AD) (axe des ordonnées) passant par N donc $x_P = x_N = a(1-2k)$ et il est sur la droite (AB) (axe des abscisses) donc $y_P = 0$.

De même, $x_Q = 0$ et $y_Q = y_N = b(2k-1)$.

3. On en déduit les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\begin{pmatrix} -a(1-2k) \\ b(2k-1) \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{MP}}\begin{pmatrix} a(1-2k) - a(1-k) \\ -kb \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{\mathrm{MP}}\begin{pmatrix} -ka \\ -kb \end{pmatrix}$.

dét$\left(\overrightarrow{\mathrm{PQ}}, \overrightarrow{\mathrm{MP}}\right) = -a(1-2k)(-kb) - b(2k-1)(-ka) = kab(1-2k-1+2k) = 0$

On en déduit que les points P, Q et M sont alignés.

Exercice 4

Définition : un point M' est le symétrique d'un point M par rapport à une droite $\mathcal{D}$ lorsqu'il est sur cette droite ou lorsque la droite $\mathcal{D}$ est la médiatrice du segment [MM'].

Définition : la courbe représentative C_f d'une fonction f est l'ensemble des points $\mathrm{M}(x, f(x))$ où x prend toutes les valeurs pour lesquelles $f(x)$ existe (ensemble de définition de la fonction)

Soit f et g les fonctions définies sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sqrt{x}$. On note C_f et C_g les courbes représentatives respectives de f et g dans un repère orthonormal $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

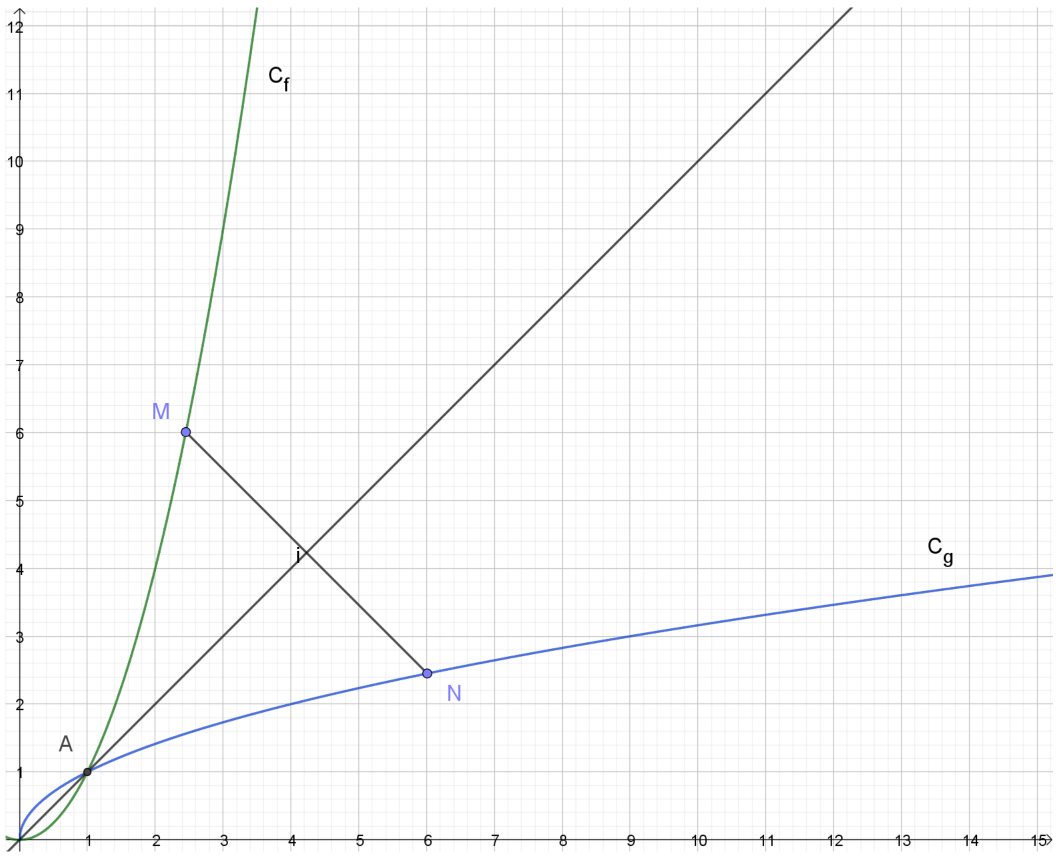
a. Tracer C_f et C_g et déterminer leurs points d'intersection. On notera A celui d'abscisse strictement positive.

b. Soit x un réel positif ou nul, M le point de C_f d'abscisse x et N le point de C_g d'abscisse x^2. Montrer que les points M et N sont symétriques par rapport à la droite (OA).

c. Que peut-on en déduire pour les courbes C_f et C_g ?

a. L'abscisse des points d'intersection des deux courbes représentatives C_f et C_g , s'ils existent, sont les solutions de l'équation $x^2 = \sqrt{x}$ soit ($x \geq 0$ et $x^4 = x$) soit $x(x^3 - 1) = 0$ (car l'égalité $x^4 = x$ entraine $x \geq 0$) soit $x = 0$ ou $x = 1$.

Il n'y a donc que deux points d'intersection : l'origine O du repère et le point A(1,1).



b. Soit x un réel positif. M est le point de C_f d'abscisse x et N est le point de C_g d'abscisse x^2. On a donc $\mathrm{M}(x, x^2)$ et $\mathrm{N}(x^2, x)$ (car si $x \geq 0$, alors $\sqrt{x^2} = x$).
Si M est sur la droite (OA) alors M = O ou M = A et dans les deux cas N = M car alors $x = x^2 = \sqrt{x}$.
Si M n'est pas situé sur la droite (OA), alors montrons que cette droite est la médiatrice de [MN] en montrant que les points O et A sont tous les deux équidistants de M et N.
On a $\mathrm{O}(0{,}0), \mathrm{A}(1{,}1), \mathrm{M}(x, x^2)$ et $\mathrm{N}(x^2, x)$ donc $\mathrm{OM} = \sqrt{x^2 + x^4} = \sqrt{x^4 + x^2} = \mathrm{ON}$
et $\mathrm{AM} = \sqrt{(x-1)^2 + (x^2-1)^2} = \sqrt{(x^2-1)^2 + (x-1)^2} = \mathrm{AN}$.
La droite (OA) est donc bien la médiatrice de [MN].

c. C_f est l'ensemble des points M lorsque x prend toutes les valeurs positives ou nulles. Le symétrique N du point M par rapport à la droite (OA) est alors un point de C_g. Réciproquement, pour tout point $Q(a, b)$ de C_g tel que $b = \sqrt{a}$ et si on pose $y = a$ alors $a = b^2$ et Q est le symétrique du point $P(b, b^2)$ de C_f.
On peut donc affirmer que les courbes C_f et C_g sont symétriques par rapport à la droite (OA).

Exercice 5

Définition : on dit qu'une fonction f admet un minimum (respectivement un maximum) en a sur un ensemble D lorsque pour tout réel x de D, $f(x) \geq f(a)$ (respectivement $f(x) \leq f(a)$). Le nombre $f(a)$ est alors le minimum (respectivement maximum) de f sur D.
Définition : une fonction f est croissante (respectivement décroissante) sur un **intervalle I** lorsque pour tous réels a et b de I, si $a \leq b$ alors $f(a) \leq f(b)$ (respectivement $f(a) \geq f(b)$).
On rappelle que pour comparer deux nombres, on peut étudier le signe de la différence de ces deux nombres.

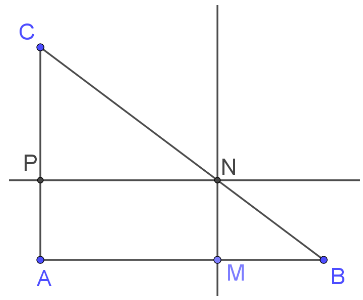
Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = 4$ et $AC = 3$. Soit M un point du segment [AB], N le point d'intersection de la parallèle à (AC) passant par M avec la droite (BC) et P le point d'intersection de la parallèle à (AB) passant par N avec la droite (AC). On note $\mathrm{AM} = x$.

1. Exprimer la distance MN en fonction de x. Dans quel intervalle varie le nombre x ?

2. ***a.*** Montrer que si $A(x)$ désigne l'aire $A(x)$ du quadrilatère AMNP en fonction de x, alors $A(x) = \frac{3}{4}x(4-x)$.

b. Montrer que cette aire est maximale pour $x = 2$ et déterminer ce maximum.

3. Etudier les variations, sur [0,4], de la fonction qui à x associe le périmètre $P(x)$ du quadrilatère AMNP. Quelle son maximum ?



1. On commence par remarquer que par construction le quadrilatère AMNP a ses côtés deux à deux parallèles et un angle doit. C'est donc un rectangle. De plus, les triangles ABC et MBN ont l'angle en B en commun et sont rectangles tous les deux. Ce sont donc des triangles semblables d'où $\frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{BA}}$

   Soit $\mathrm{MN} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} \times \mathrm{BM} = \frac{3}{4}(4-x)$.

   Comme M appartient au segment [AB], $x \in [0,4]$.

<u>Remarque :</u> on dit que lorsque M *décrit* le segment [AB], x *décrit* l'intervalle [0,4].

2. ***a.*** Comme AMNP est un rectangle, $A(x) = \mathrm{AM} \times \mathrm{MN} = x \times \frac{3}{4}(4-x) = \frac{3}{4}x(4-x)$.

   b. Pour tout $x \in [0,4]$, $A(x) - A(2) = \frac{3}{4}x(4-x) - 3 = \frac{3}{4}(4x - x^2 - 4) = -\frac{3}{4}(x^2 - 4x + 4) = -\frac{3}{4}(x-2)^2$.

   Un carré étant toujours positif, pour tout $x \in [0,4]$, $A(x) - A(2) \leq 0$. Donc l'aire $A(x)$ admet un maximum en 2 (c'est-à-dire lorsque M est le milieu de [AB]) et ce maximum vaut $A(2) = 3$.

3. Pour tout $x \in [0,4]$, $P(x) = 2(AM + MN) = 2\left(x + \frac{3}{4}(4-x)\right) = 6 + \frac{1}{2}x$. Pour tous réels a et b de $[0,4]$ $a \leq b$, $P(a) - P(b) = \left(6 + \frac{1}{2}a\right) - \left(6 + \frac{1}{2}b\right) = \frac{1}{2}(a-b)$. Si $a \leq b$ alors $a - b \leq 0$ donc $P(a) - P(b) \leq 0$.

   On en déduit que la fonction P est croissante sur $[0,4]$ et que son maximum est lorsque $x = 4$, ce qui correspond à un rectangle aplati donc d'aire minimale.

Exercice 6

Pour montrer que deux nombres A et B sont égaux, on peut montrer que $A - B = 0$.

Pour tous nombres réels a, b, c et d tels que $b \neq 0$ et $d \neq 0$, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ équivaut à $ad = bc$.

On considère quatre nombres réels non nuls tels que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Démontrer que : (i) $\frac{a^2+c^2}{b^2+d^2} = \frac{ac}{bd}$ (ii) $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{3a-2b}{3c-2d}$

(On se place dans la situation où tous ces quotients sont bien définis.)

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ équivaut à $ad = bc$.

(i) Montrons que $\frac{a^2+c^2}{b^2+d^2} = \frac{ac}{bd}$, ce qui équivaut à $(a^2 + c^2)bd = (b^2 + d^2)ac$

Or $(a^2 + c^2)bd - (b^2 + d^2)ac = aabd + ccbd - bbac - ddac = ab(ad - bc) + dc(bc - ad) = 0$

On a donc bien $\frac{a^2+c^2}{b^2+d^2} = \frac{ac}{bd}$.

(ii) Montrons maintenant que $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{3a-2b}{3c-2d}$.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ équivaut à $ad = bc$ et $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ équivaut aussi à $ad = bc$. On a donc bien $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

$\frac{a}{c} = \frac{3a-2b}{3c-2d}$ équivaut à $a(3c - 2d) = c(3a - 2b)$.

Or $a(3c - 2d) - c(3a - 2b) = 3ac - 2ad - 3ac + 2bc = 2(bc - ad) = 0$.

On a donc bien $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{3a-2b}{3c-2d}$.