Pépinière académique de mathématiques

Année 2023-2024 — **Stage « filé »**

Classe de seconde — **Fiche numéro 3**

Parution lundi 11 mars — **Retour attendu pour le jeudi 28 mars**

Exercice 1 – De l'utilité du calcul littéral

Le calcul littéral s'appuie sur plusieurs propriétés algébriques, notamment :
- les identités remarquables ;
- les propriétés opératoires sur les nombres rationnels.

Pour montrer que deux nombres A et B sont égaux, on peut :
- montrer que $A - B = 0$.

ou
- montrer que $A = C$ et $B = C$.

Des valeurs particulières peuvent aboutir à une conjecture qui ne devient une propriété qu'à l'issue d'une démonstration dans le cas général, c'est-à-dire pour des nombres quelconques.

1. **a.** Vérifier que $1^2 + 2^2 = \frac{3^2+1}{2}, 2^2 + 3^2 = \frac{5^2+1}{2}, 3^2 + 4^2 = \frac{7^2+1}{2}$.

b. Soit n un entier naturel non nul, émettre une conjecture.

c. Démontrer cette conjecture.

2. **a.** Ecrire chacun des produits suivants comme quotient de deux entiers a et b, $b \neq 0$:
$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right), \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right), \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)$.

b. Vérifier que pour tout entier naturel $n \geq 2$,$1 - \frac{1}{n^2} = \frac{n-1}{n} \times \frac{n+1}{n}$.

c. En déduire, pour tout entier naturel $n \geq 2$, une expression simplifiée du produit
$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 2 – Rectangle d'or

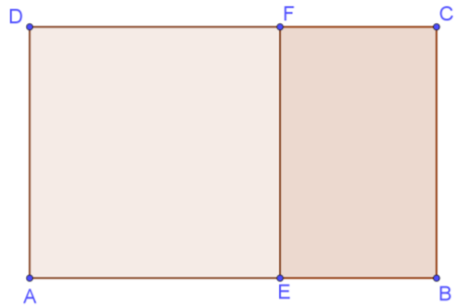
Rappel : Pour tous nombres réels a, b, c et d tels que $b \neq 0$ et $d \neq 0$, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ équivaut à $ad = bc$.

Dans la figure ci-contre, le quadrilatère ABCD est un rectangle. Le point E est un point du segment $[AB]$ et le point F est un point du segment $[CD]$. Ces deux points sont tels que le quadrilatère AEFD est un carré.
On dit que ABCD est un *rectangle d'or* lorsque $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{BE}$. On note φ ce quotient.

1. Montrer que φ est solution de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

2. Montrer que pour tout réel x, $x^2 - x - 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$.

3. En déduire la valeur de φ.



Exercice 3 – Problèmes d'alignement

Le calcul vectoriel est un outil fort utile pour les démonstrations en géométrie :
- Le milieu I d'un segment $[AB]$ est caractérisé par l'une des égalités vectorielles suivantes :

$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$ ou $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ ou, pour un point M du plan, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.
- La colinéarité de deux vecteurs non nuls traduit le parallélisme de deux droites ou l'alignement de trois points.
- L'égalité de deux vecteurs se traduit par une configuration de parallélogramme.
- La relation de Chasles facilite les calculs.

1. Soit ABCD un parallélogramme. On considère les points E et F tels que $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}$.
Montrer que les points C, E et F sont alignés.

2. Soit ABC un triangle. On considère le point M symétrique de A par rapport au point C, le point N symétrique de B par rapport au point A et le point P symétrique de C par rapport au point B.

a. Faire une figure et y placer le point D défini par $\overrightarrow{ND} = \frac{1}{3}\overrightarrow{NP}$.

b. Montrer que $\overrightarrow{NP} = 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

c. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AD}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

d. En déduire que les points M, C, A et D sont alignés.

Exercice 4 – Colinéarité en géométrie analytique

Définition : on dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$.

Théorème : dans le plan muni d'un repère, les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - x'y = 0$.

Définition : dans le plan muni d'un repère, le déterminant du couple de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont les vecteurs de coordonnées respectives $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ est le nombre $dét(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y$.

L'introduction d'un repère dans un exercice de géométrie permet de démontrer des alignements en s'appuyant sur la condition de colinéarité de deux vecteurs par le déterminant.

1. Démonstration du théorème

a. Démontrer que si les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires alors $xy' - x'y = 0$.

b. Démontrer que si les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont tels que $xy' - x'y = 0$ alors ils sont colinéaires.
(on pourra traiter à part le cas où l'un au moins des vecteurs est nul)

2. Application

Soit ABCD un parallélogramme de centre O et I, J les milieux respectifs des segments [AD] et [AB].
On considère un point M de la droite (OI) et un point N de la droite (OJ).

a. Justifier qu'il existe un réel a et un réel b tels que, dans le repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, les coordonnées du point M sont $(a, 0)$ et les coordonnées du point N sont $(0, b)$.

b. Déterminer, en fonction de a et b, les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}, \overrightarrow{DM}, \overrightarrow{BN}$ dans le repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.

c. Démontrer que les points A, M et N sont alignés si et seulement si les droites (DM) et (BN) sont parallèles.

Exercice 5 – Recherche d'extremum

Définition : on dit qu'une fonction f admet un minimum (respectivement un maximum) en a sur un ensemble D lorsque pour tout réel x de D, $f(x) \geq f(a)$ (respectivement $f(x) \leq f(a)$). Le nombre $f(a)$ est alors le minimum (respectivement maximum) de f sur D.

Définition : une fonction f est croissante (respectivement décroissante) sur un **intervalle I** lorsque pour tous réels a et b de I, si $a \leq b$ alors $f(a) \leq f(b)$ (respectivement $f(a) \geq f(b)$).

On rappelle que pour comparer deux nombres, on peut étudier le signe de la différence de ces deux nombres.

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = 4$ et $AC = 3$. Soit M un point du segment [AB], N le point d'intersection de la parallèle à (AC) passant par M avec la droite (BC) et P le point d'intersection de la parallèle à (AB) passant par N avec la droite (AC). On note $AM = x$.

1. Exprimer la distance MN en fonction de x. Dans quel intervalle varie le nombre x ?

2. *a.* Montrer que si $A(x)$ désigne l'aire du quadrilatère AMNP en fonction de x, alors $A(x) = \frac{3}{4}x(4 - x)$.

b. Montrer que cette aire est maximale pour $x = 2$ et déterminer ce maximum.

3. Etudier les variations, sur [0,4], de la fonction qui à x associe le périmètre $P(x)$ du quadrilatère AMNP. Quelle son maximum ?