ACADÉMIE DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Pépinière académique de mathématiques

Année 2021-2022 — **Stage « filé »**

Classe de seconde — **Fiche numéro 2**

Parution mardi 4 janvier — **Retour attendu pour le mardi 18 janvier**

Exercice 1 Inégalités et égalités remarquables

Définition : on dit qu'un nombre a est inférieur ou égal à un nombre b lorsque $b - a \geq 0$.
Cette définition conduit à une méthode pratique pour comparer deux nombres.
Soit a, b, c et d des nombres réels
Théorème 1 : si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$ et si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a + c \leq b + d$.
(si $a \leq b$ alors $b - a \geq 0$ donc, comme $b - a = (b + c) - (a + c)$, $(b + c) - (a + c) \geq 0$
C'est-à-dire $(b + c) \geq (a + c)$)
Théorème 2 :
Si $a \leq b$ et $c \geq 0$ alors $ac \leq bc$
Si $a \leq b$ et $c \leq 0$ alors $ac \geq bc$
Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$ alors $ac \leq bd$.
Théorème 3 :
Si $0 < a \leq b$ alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} > 0$.
Dans tout exercice portant sur des inégalités ou sur des inéquations à résoudre, on se ramène souvent à l'un au moins de ces théorèmes.

a. Démontrer que pour tous nombres réels a et b, $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$.
b. En déduire que pour tous nombres réels a, b et c, $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$.

Exercice 2 Inéquations

Soit x un réel. On veut construire un triangle ABC tel que $BC = 2x + 4, CA = 3x - 7$ et $AB = 2x - 4$.
Déterminer les valeurs de x pour lesquelles le triangle ABC est constructible et non aplati.

Exercice 3 Arithmétique et nombres premiers

Définition : On dit qu'un nombre entier a est un *multiple* d'un nombre entier b s'il existe un nombre entier k tel que $a = kb$.
On dit alors que b est un *diviseur* de a ou que a est *divisible* par b.
Dans les exercices c'est à la définition en termes de « multiple de » à laquelle il vaut mieux se ramener pour éviter d'écrire des quotients.

Définition : un nombre entier naturel est dit premier lorsqu'il a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.
On admettra le théorème suivant :
Théorème : Si un nombre est multiple de plusieurs nombres premiers distincts alors il est multiple du produit de ces nombres premiers.

Théorème (division euclidienne) : soit a et b deux entiers naturels tels que b est non nul, alors il existe un unique couple (q, r) d'entiers naturels tels que $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$.

a. Déterminer les entiers naturels n'admettant qu'un seul diviseur autre qu'eux-mêmes et 1.
b. Soit p un nombre premier. On considère le produit $P = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \ldots \times p$ de tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à p.
Montrer que $P + 2, P + 3, P + 4, \ldots, P + p$ ne sont pas des nombres premiers.
En déduire un exemple de 20 nombres consécutifs non premiers.
c. Trouver tous les entiers naturels compris entre 500 et 5 000 tels que dans la division euclidienne de ces nombres par 18, 30 et 42, le reste soit égal à 13.
d. Montrer que si p est un nombre premier tel que $p \geq 5$, alors $p^2 - 1$ est divisible par 24.
(On pourra étudier les restes de la division euclidienne de p par 4 et par 6)

Exercice 4 Relations métriques

En dehors du théorème de Pythagore souvent utile dans un exercice faisant intervenir un triangle rectangle, il faut penser à la notion de triangles semblables et à celle de triangles isométriques.

Pour comparer deux triangles dans le but de prouver qu'ils sont isométriques ou semblables, on commence par identifier les éléments correspondants (côtés ou angles) que, dans ce qui suit, on appelle homologues.

Cas de similitude :

- Tous les angles homologues de même mesure (deux suffisent, évidemment).
- Un angle de même mesure compris entre deux côtés homologues de longueurs proportionnelles.
- Trois côtés de longueurs proportionnelles.

Cas d'isométrie :

- Un côté de même longueur compris entre deux angles homologues de mêmes mesures.
- Deux côtés homologues de mêmes longueurs définissant deux angles homologues de même mesure.
- Trois côtés de longueurs égales.

Il faut de plus penser à l'application de ces caractérisations aux cas particuliers des triangles rectangles, isocèles ou équilatéraux.

Soit un cercle $\mathcal{C}$ de centre O, de diamètre [AB] et de rayon r. On considère un point M sur le cercle $\mathcal{C}$.
On appelle tangente en A au cercle $\mathcal{C}$ la droite perpendiculaire en A au rayon [OA].
On trace les tangentes à $\mathcal{C}$ en A, en B et en M.
La tangente à $\mathcal{C}$ en M coupe les tangentes en A et en B respectivement en C et D.
a. Montrer que le triangle COD est rectangle.
b. Montrer que $\mathrm{AC} \times \mathrm{BD} = r^2$.

Exercice 5 Hauteurs concourantes

Au collège, on démontre que les médiatrices des côtés d'un triangle sont concourantes.
Théorème (à démontrer dans la suite) : les trois hauteurs du triangle ABC sont concourantes.
Le point de concours des hauteurs d'un triangle est appelé orthocentre du triangle

Soit ABC un triangle. On note respectivement D, E et F les pieds des hauteurs issues de A, B et C dans le triangle ABC.
a. On considère les droites parallèles $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ respectivement à (BC), (CA) et (AB) et passant respectivement par A, B et C. Les droites $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ se coupent en A', les droites $\mathcal{D}_3$ et $\mathcal{D}_1$ se coupent en B' et les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ se coupent en C'. Déterminer la nature du quadrilatère ABCB'.
b. Montrer que la droite (AD) est la médiatrice du segment [B'C'].
c. En déduire que les hauteurs du triangle ABC sont concourantes.

Application

On reprend les notations précédentes dans un triangle ABC. On note H l'orthocentre du triangle.
d. En considérant plusieurs triangles semblables, montrer l'égalité $\mathrm{AD} \times \mathrm{DH} = \mathrm{BD} \times \mathrm{CD}$.
e. Démontrer que $\mathrm{AD} \times AH = \mathrm{AB} \times AF = \mathrm{AC} \times AE$.

Exercice 6

Soit un cercle $\mathcal{C}$ de centre O, de diamètre [BC] et de rayon r et soit D un point du cercle $\mathcal{C}$ tel que $\widehat{\mathrm{BOD}} = 120°$. La perpendiculaire à (BC) passant par D coupe [BC] en I et recoupe le cercle $\mathcal{C}$ en E. Les droites (BD) et (EC) se coupent en A.
Montrer que le triangle ABC est isocèle.