ACADÉMIE DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Pépinière académique de mathématiques

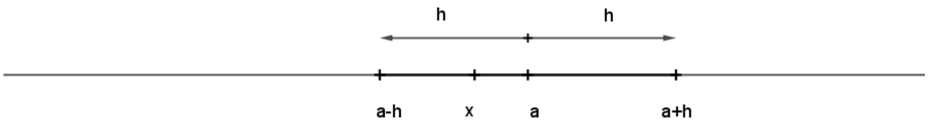
Année 2022-2023 **Stage « filé »**

Classe de seconde **Fiche numéro 2**

Parution mardi 3 janvier **Retour attendu pour le lundi 23 janvier**

Exercice 1 – Encadrements et valeurs approchées

Définition : on dit qu'un nombre a est inférieur ou égal à un nombre b lorsque $b - a \geq 0$.
Cette définition conduit à une **méthode pratique pour comparer deux nombres**.
Pour tout exercice portant sur des inégalités, on peut aussi s'appuyer sur les théorèmes ci-dessous.
Soit a, b, c et d des nombres réels
Théorème 1 : si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$ et si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a + c \leq b + d$.
(si $a \leq b$ alors $b - a \geq 0$ donc, comme $b - a = (b + c) - (a + c)$, $(b + c) - (a + c) \geq 0$
C'est-à-dire $(b + c) \geq (a + c)$)
Théorème 2 :
Si $a \leq b$ et $c \geq 0$ alors $ac \leq bc$
Si $a \leq b$ et $c \leq 0$ alors $ac \geq bc$
Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$ alors $ac \leq bd$.
Théorème 3 :
Si $0 < a \leq b$ alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} > 0$.
Définition : soit a et x deux nombres réels et soit h un réel strictement positif. On dit que a est une valeur approchée de x à la précision h (ou « à h près ») lorsque $a - h < x < a + h$.



On obtient un encadrement de x de longueur $2h$.

1. Soit a un nombre réel strictement positif. Ranger dans l'ordre croissant les nombres $a, a^2, \frac{1}{a}$
   a. si $a > 1$ **b.** si $0 < a < 1$
2. **a.** Sachant que $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$, donner un encadrement de $\sqrt{2} - 1$ d'amplitude 10^{-2} et un encadrement de $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ d'amplitude 2×10^{-3}.
   b. Peut-on comparer $\sqrt{2} - 1$ et $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ à l'aide de ces encadrements ?
   c. Calculer $\sqrt{2} - 1 - \frac{1}{\sqrt{2}+1}$. Quel commentaire peut-on en tirer concernant les questions a. et b. ?
3. On suppose que x est un nombre réel tel que $0 < x < 2$. Déterminer dans quels intervalles (là chaque fois, le plus petit possible) se trouvent $1 - x, \frac{1}{x}, x^2$.
4. On suppose que x est un nombre réel tel que $3{,}248 < x < 3{,}25$. Donner une valeur approchée de x à 10^{-3} près.

Exercice 2 – Inéquations

On rappelle qu'un triangle ABC est constructible si et seulement si l'inégalité triangulaire est vérifiée, c'est-à-dire $BC \leq BA + AC, CA \leq CB + BA$ et $AB \leq AC + CB$
Soit x un réel strictement positif. On veut construire un triangle ABC non aplati tel que $BC = 2x - 3, CA = 5x + 2$ et $AB = 4x + 1$.
Déterminer les valeurs de x pour lesquelles le triangle ABC est constructible.

Exercice 3 – Arithmétique et nombres premiers

Définition : On dit qu'un nombre entier a est un *multiple* d'un nombre entier b s'il existe un nombre entier k tel que $a = kb$.
On dit alors que b est un *diviseur* de a ou que a est *divisible* par b.
Dans les exercices c'est à la définition en termes de « multiple de » à laquelle il vaut mieux se ramener pour éviter d'écrire des quotients.
Définition : un nombre entier naturel est dit premier lorsqu'il a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.
Définition : deux nombres sont dits premiers entre eux lorsque leur seul diviseur positif commun est 1.
On admettra le théorème suivant :
Théorème : Si un nombre est multiple de deux nombres premiers entre alors il est multiple du produit de ces nombres.
Théorème (division euclidienne): soit a et b deux entiers naturels tels que b est non nul, alors il existe un unique couple (q, r) d'entiers naturels tels que $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$.

1. Soit a, b et c trois entiers naturels. Montrer que si c est un diviseur de a et de b, alors il divise $a + b$. La réciproque est elle-vraie ?
2. Déterminer les diviseurs du carré d'un nombre premier p.
3. Montrer que si p est un nombre premier tel que $p \geq 5$, alors $p^2 - 1$ est divisible par 24.

(On pourra étudier les restes de la division euclidienne de p par 4 et par 6)

4. Trouver tous les entiers naturels x tels que $x^2 - 24$ soit le carré d'un nombre entier.
5. Trouver tous les entiers naturels compris entre 500 et 5 000 tels que dans la division euclidienne de ces nombres par 18, 30 et 42, le reste soit égal à 13.

Exercice 4 – Triangle rectangle et cercle

Pour déterminer la nature d'un triangle ou d'un quadrilatère, on fait appel aux caractérisations d'un triangle particulier (isocèle, équilatéral, isocèle) ou d'un quadrilatère particulier (parallélogramme, rectangle, losange, carré) en étant le plus précis possible.

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre I. On considère deux points A et B diamétralement opposés sur ce cercle et un point C, distinct de A et B, sur le cercle $\mathcal{C}$.

1. Soit D le point diamétralement opposé à C sur $\mathcal{C}$. Déterminer la nature du quadrilatère ADBC.
2. En déduire la nature du triangle ABC.

Exercice 5 – Relations métriques

En dehors du théorème de Pythagore souvent utile dans un exercice contenant un triangle rectangle, il faut penser à la notion de triangles semblables et à celle de triangles isométriques.
Cas de similitude :
- Deux angles de mêmes mesures.
- Un angle de même mesure compris entre deux côtés de longueurs proportionnelles.
- Trois côtés de longueurs proportionnelles.

Cas d'isométrie :
- Un côté de même longueur compris entre deux angles de mêmes mesures.
- Un angle de même mesure compris entre deux côtés de mêmes longueurs.
- Trois côtés de longueurs égales.

Il faut de plus penser à l'application de ces caractérisations aux cas particuliers des triangles rectangles, isocèles ou équilatéraux.

Soit ABC un triangle et $\mathcal{C}$ son cercle circonscrit. On note H le pied de la hauteur issue du sommet A et D le point diamétralement opposé à A sur $\mathcal{C}$.
On admet que les deux angles $\widehat{\mathrm{ABC}}$ et $\widehat{\mathrm{ADC}}$, qui sont des angles inscrits interceptant le même arc AC, ont même mesure.
Montrer que $\mathrm{AB} \times \mathrm{AC} = \mathrm{AH} \times \mathrm{AD}$.

Exercice 6 – Hauteurs concourantes

Au collège, on démontre que les médiatrices des côtés d'un triangle sont concourantes.
Théorème (à démontrer dans la suite) : les trois hauteurs du triangle ABC sont concourantes.
Le point de concours des hauteurs d'un triangle est appelé orthocentre du triangle

Soit ABC un triangle. On note respectivement D, E et F les pieds des hauteurs issues de A, B et C dans le triangle ABC.

1. On considère les droites parallèles $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ respectivement à (BC), (CA) et (AB) et passant respectivement par A, B et C. Les droites $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ se coupent en A', les droites $\mathcal{D}_3$ et $\mathcal{D}_1$ se coupent en B' et les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ se coupent en C'. Déterminer la nature du quadrilatère ABCB'.
2. Montrer que la droite (AD) est la médiatrice du segment [B'C'].
3. En déduire que les hauteurs du triangle ABC sont concourantes.

Application

On reprend les notations précédentes dans un triangle ABC. On note H l'orthocentre du triangle.

4. En considérant plusieurs triangles semblables, montrer l'égalité $\mathrm{AD} \times \mathrm{DH} = \mathrm{BD} \times \mathrm{CD}$.
5. Démontrer que $\mathrm{AD} \times A\mathrm{H} = \mathrm{AB} \times AF = \mathrm{AC} \times A\mathrm{E}$.