Pépinière académique de mathématiques

ACADÉMIE DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Année 2022-2023 — **Stage « filé »**

Classe de troisième — **Fiche numéro 3**

Parution lundi 13 mars — **Retour attendu le jeudi 30 mars**

Exercice 1 – Un peu de calcul littéral

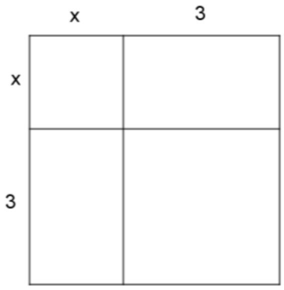
Dans le calcul littéral, trois propriétés facilitent les calculs :

(1) Pour tous nombres a et b, $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
(2) Pour tous nombres a et b, $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
(3) Pour tous nombres a et b, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

Dans les calculs faisant intervenir des quotients, deux propriétés interviennent souvent :

- Pour tous nombres a, b, c et d tels que $b\neq 0$ et $d\neq 0$, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ équivaut à $ad=bc$
- Pour tous nombres a, b et c tels que $b\neq 0$ et $c\neq 0$, $\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}$

1. Démontrer les propriétés (2) et (3).
2. Pour trouver une solution positive de l'équation $x^2+6x=40$, le mathématicien du IX^e siècle Al Khwarizmi a utilisé une méthode géométrique s'appuyant sur la figure ci-contre, figure dans laquelle on suppose que x est un nombre positif solution de l'équation $x^2+6x=40$.



   a. Exprimer l'aire du grand carré en fonction de x.
   b. En déduire la valeur positive de x.
   c. Déterminer toutes les solutions (positives comme négatives) de l'équation $x^2+6x=40$.
3. Soit a et b deux nombres tels que $b\neq 1$ et $b\neq -1$.
   Démontrer que si x et y sont définis par $\frac{x-a}{x+a}=b$ et $\frac{y-a}{y+a}=-b$ alors $xy=a^2$.

Exercice 2 – Ecriture d'un nombre rationnel

Propriété : Tout nombre rationnel (quotient de deux entiers) admet une écriture décimale finie (nombre décimal) ou infinie périodique (nombre non décimal).

Exemples : $\frac{3}{8}=0{,}375$ est un nombre décimal et $\frac{3}{11}=0{,}272727\ldots$ n'est pas un nombre décimal et son écriture décimale est illimitée mais périodique de période 27. On note alors $\frac{3}{11}=0,\overline{27}$. De même $\frac{35}{8}=5{,}83333\ldots=5{,}8\overline{3}$ et $\frac{1\,216}{495}=2{,}4\overline{56}$.

1. On considère le nombre rationnel dont l'écriture décimale périodique est $2,\overline{468}$.
   En considérant le nombre $1\,000x$ où $x=0,\overline{468}$, déterminer des entiers p et q tels que $\frac{p}{q}=2,\overline{468}$.
2. Déterminer de même une écriture fractionnaire de $N=0{,}43\overline{21}$.

Exercice 3 – Multiples et diviseurs

<u>Définition :</u> soit a et b deux nombres entiers tels que $b\neq 0$. On dit que a est un multiple de b lorsqu'il existe un entier k tel que $a=kb$.
On dit alors que b est un diviseur de a.

<u>Théorème (division euclidienne) :</u> Soit a et b deux entiers naturels avec $b\neq 0$, alors il existe un unique couple (q,r) d'entiers naturels tels que $a=bq+r$ et $0\leq r<b$.

<u>Définition :</u> Soit a et b deux entiers naturels avec $b\neq 0$. Si (q,r) est un couple d'entiers naturels tels que $a=bq+r$ et $0\leq r<b$ alors q et r sont appelés respectivement quotient et reste de la division euclidienne de a par b.

1. Montrer qui si a, b, c et d sont quatre nombres entiers et x un nombre entier non nul tels que $a-b$ et $c-d$ sont multiples de x, alors $ac-bd$ est un multiple de x.
2. On suppose qu'un nombre entier naturel a est tel que :
   - dans la division euclidienne de a par 23, le quotient est q et le reste est 1 ;
   - dans la division euclidienne de a par 17, le quotient est encore q et le reste est 13.

   Déterminer les nombres q et a.

Dans tout exercice de géométrie, on commence par faire une figure, au moins à main levée.

Exercice 4 – Autour de la symétrie centrale

Propriété : Un parallélogramme possède un centre de symétrie qui est le milieu commun de ses diagonales.
Définition : Le symétrique d'un point M par rapport à un point O est le point M' tel que O soit le milieu de [MM'].
Propriété : Une symétrie centrale transforme le segment [AB] en le segment [A'B'] tel que :

- A' et B' sont les symétriques respectivement de A et B,
- A'B' = AB
- (A'B') est parallèle à (AB)
- Le milieu de [A'B'] est le symétrique du milieu de [AB].

Soit ABC un triangle rectangle en B et un point D tel que BCD soit un triangle rectangle en C.
On note I et J les milieux respectifs des segments [AC] et [BD].
Le symétrique de B par rapport à I est le point B' et le symétrique de C par rapport au point J est le point C'.

1. Déterminer la nature des quadrilatères ABCB' et DCBC'.
2. Déterminer la nature des triangles BIC et CJB.
3. Déterminer, s'il existe, le centre de la symétrie transformant B' en C' et A en D. A quelle condition ce centre appartient-il au segment [BC] ?

Exercice 5 – Dans un triangle isocèle

Propriété 1 : Dans un triangle isocèle, la hauteur issue du sommet principal est aussi médiatrice du côté opposé et bissectrice de l'angle au sommet.
Propriété 2 : Si dans un triangle, la hauteur issue d'un sommet est aussi médiatrice du côté opposé, alors ce triangle est isocèle en ce sommet.
Définition : On appelle projeté orthogonal d'un point A sur une droite D le point d'intersection de la droite D avec la perpendiculaire à D passant par A.

Soit ABC un triangle isocèle de sommet A. On note I le milieu de [BC], J le point d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{\mathrm{ABC}}$ avec la droite (AI).
Le point K est le projeté orthogonal de J sur (AB) et le point L est le projeté orthogonal de J sur (AC).

1. Montrer que les triangles IJB et KJB sont isomériques ainsi que les triangles JIB et JIC.
2. En déduire que JI = JK = JL.
3. Que représente le point J pour les bissectrices des angles du triangle ABC ?

Exercice 6 – Angle inscrit, angle au centre

Définition : On dit qu'un angle $\widehat{BAC}$ est un angle inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ lorsque A, B et C sont trois points deux à deux distincts du cercle $\mathcal{C}$.
Définition : On dit qu'un angle $\widehat{BOC}$ est un angle au centre dans un cercle $\mathcal{C}$ lorsque O est le centre du cercle $\mathcal{C}$ et les points B et C sont deux points du cercle $\mathcal{C}$.
Dans les deux cas, on dit que l'angle intercepte l'arc BC.

L'objectif de l'exercice est de trouver une relation entre angle au centre et angle inscrit qui interceptent le même arc.

1. Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et A, B, C trois points deux à deux distincts de ce cercle tels que $\widehat{COB}$ et $\widehat{CAB}$ interceptent le même arc BC. Montrer que $\widehat{CAB} = \frac{1}{2}\widehat{COB}$ en considérant les trois cas suivants.
   a. Le segment [AB] est un diamètre de $\mathcal{C}$.
   b. Aucun des côtés du triangle ABC n'est un diamètre de $\mathcal{C}$ et le point O est à l'intérieur du triangle ABC.
   c. Aucun des côtés du triangle ABC n'est un diamètre de $\mathcal{C}$ et le point O est à l'extérieur du triangle ABC.
   Dans les cas b et c, on pourra considérer le point D diamétralement opposé à A sur le cercle $\mathcal{C}$.
2. On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et quatre points A, B, C et D placés dans cet ordre sur ce cercle tels que les triangles AOB et COD soient rectangles en O. On note I le point d'intersection des droites (AC) et (BD).
   a. Montrer que le triangle CBI est rectangle isocèle en I.
   b. Montrer que les droites (AD) et (BC) sont parallèles.