Pépinière académique de mathématiques

Année 2021-2022 **Stage « filé »**

Classe de troisième **Fiche numéro 2**

Parution lundi 31 janvier **Retour attendu le jeudi 17 février**

Exercice 1 Écriture décimale d'un entier

Dire que $\overline{ab}$ est l'écriture décimale de l'entier N, c'est dire que $N = 10a + b$.
On convient que cette écriture a deux chiffres si $a \neq 0$.

a. Déterminer les nombres entiers N (de deux chiffres) égaux au double du produit de leurs deux chiffres dans leur écriture décimale.
b. Déterminer l'expression générale du carré de l'entier naturel dont l'écriture décimale est $N = \overline{a5}$.
En déduire, sans calculatrice et sans poser l'opération, le carré de 35 et celui de 65.

Exercice 2 Divisibilité par 9

Définition : soit a et b deux entiers naturels. On dit que a est un *multiple* de b s'il existe un entier k tel que $a = bk$.
On dit alors que b est un *diviseur* de a ou que a est *divisible* par b.
Dans les exercices mieux vaut se ramener à la définition en termes de « multiple de » pour éviter d'écrire des quotients.

a. Soit $N = \overline{abcd}$ un nombre entier naturel dont l'écriture décimale comporte quatre chiffres a, b, c et d où $a \neq 0$.
Montrer que le nombre N est la somme de ses chiffres et d'un multiple de 9.
b. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que l'entier N soit divisible par 9.

Exercice 3 Pair et impair

Un nombre entier naturel n est un nombre pair lorsqu'il est multiple de 2. Sinon, n est impair.
Pour résoudre des exercices, on écrit :
- Un entier naturel n est un nombre pair lorsqu'il existe un entier k tel que $n = 2k$.
- Un entier naturel n est un nombre impair lorsqu'il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$.

Montrer qu'il n'existe pas de nombres naturels impairs m, n et p vérifiant la "relation de Pythagore" :
$$(m+n)^2 + (n+p)^2 = (p+m)^2. \qquad \text{(E)}$$

Exercice 4 Comparaison de fractions

Pour comparer deux nombres, on étudie le signe de leur différence.
Pour additionner deux fractions on se réfère aux deux propriétés suivantes :
Propriété 1 : pour tous nombres a, b et c tels que $c \neq 0$, $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$.
Propriété 2 : pour tous nombres a, b et k tels que $b \neq 0$ et $k \neq 0$, $\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}$.

Soit a, b, c et d quatre nombres strictement positifs tels que $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$. Comparer les trois nombres $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ et $\frac{a+c}{b+d}$.

Exercice 5 Aire et périmètre d'un rectangle

Dans un problème concret faisant intervenir une ou plusieurs variables, il ne faut pas oublier de préciser dès le départ les contraintes concernant ces variables, par exemple une distance doit être positive.

On considère un rectangle de dimensions x et y. On note $2p$ son périmètre. Si on augmente x de 5 et y de 3, l'aire augmente de 195.
a. Traduire les données en équations. Pour quelles valeurs de p le problème a-t-il des solutions ?
b. Pour quelle valeur de p le rectangle est-il un carré ?
c. Calculer x et y ainsi que l'aire du rectangle dans le cas où $p = 50$.

Exercice 6 Triangle rectangle et cercle

Pour déterminer la nature d'un triangle ou d'un quadrilatère, on fait appel aux caractérisations d'un triangle particulier (isocèle, équilatéral, isocèle) ou d'un quadrilatère particulier (parallélogramme, rectangle, losange, carré) en étant le plus précis possible.

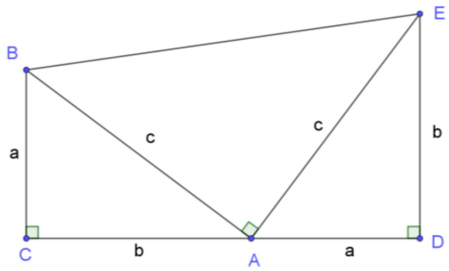
1. Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre I. On considère deux points A et B diamétralement opposés sur ce cercle et un point C, distinct de A et B, sur le cercle $\mathcal{C}$.
   a. Soit D le point diamétralement opposé à C sur $\mathcal{C}$. Déterminer la nature du quadrilatère ADBC.
   b. En déduire la nature du triangle ABC.
2. Réciproquement, soit ABC un triangle rectangle en C et soit D le symétrique de C par rapport au milieu I de [AB].
   a. Déterminer la nature du quadrilatère ADBC.
   b. En déduire que le segment [AB] est un diamètre du cercle circonscrit au triangle ABC.
3. Énoncer les théorèmes démontrés à l'issue des questions 1 et 2.

Exercice 7 Deux démonstrations du théorème de Pythagore

Pour montrer que deux triangles sont semblables, on commence par identifier les éléments correspondants (côtés ou angles) que, dans ce qui suit, on qualifie d'homologues. Ils sont alors semblables si l'une des conditions suivantes est vérifiée :
- Tous les angles homologues sont de même mesure (deux suffisent, évidemment).
- Ils ont un angle de même mesure compris entre deux côtés homologues de longueurs proportionnelles.
- Les longueurs de leurs trois côtés sont proportionnelles.

Il s'agit, dans cet exercice de démontrer de deux façons différentes le théorème de Pythagore.
Soit ABC un triangle rectangle en C. On note $BC = a$, $\mathrm{CA} = b$ et $\mathrm{AB} = c$.

1. Sur la figure ci-contre, le point A appartient au segment [CD] et le triangle ADE est isométrique au triangle ABC.
   a. Préciser la nature du quadrilatère BCDE.
   b. Démontrer que le triangle ABE est rectangle en A.
   c. En calculant de deux façons différentes l'aire du trapèze BCDE, démontrer que $a^2 + b^2 = c^2$.



2. Sur la figure ci-contre, le point A est sur le cercle de centre B, milieu de [DE], et de rayon c.
   a. Montrer que les triangles CAD et CEA sont semblables.
   b. En déduire que $\frac{c+a}{b} = \frac{b}{c-a}$.
   c. Conclure.