Pépinière académique de mathématiques Stage des 21 et 22 octobre 2019

« Srinivasa Ramanujan [né en 1887] est d'une famille pauvre du sud de l'Inde. À 13 ans, il acquiert un résumé de mathématiques contenant 6 165 énoncés de théorèmes quasiment sans démonstrations. Il absorbe tout, comprenant à sa manière. (…) Ayant eu connaissance d'un livre d'Hardy [Godfrey Harold Hardy, 1877 – 1947], Ramanujan lui écrit à Cambridge en janvier 1913, envoyant une liste de 120 de ses formules. Quelle lettre ! Hardy se convainc qu'elle est de la main d'un génie et invite Ramanujan à Cambridge. »

***Petites histoires des mathématiques,* Jean-Pierre ESCOFFIER, Éditions Dunod**

La Pépinière académique de mathématique organise, bénévolement, des regroupements d'élèves désignés par leurs établissements. Quatre niveaux sont concernés cette année : les collégiens de troisième en octobre, les lycéens de première en décembre, les lycéens de terminale présentés au concours général en février et les lycéens de seconde en avril.
La Pépinière s'est assurée du concours de partenaires qui hébergent traditionnellement nos stages : l'université de Versailles Saint Quentin en Yvelines et le siège d'INRIA à Rocquencourt, le lycée Camille Pissarro de Pontoise, le collège Paul Fort de Montlhéry, le lycée de la Vallée de Chevreuse de Gif sur Yvette, le lycée La Bruyère de Versailles et le lycée Hoche de Versailles. Elle a reçu le soutien de l'Institut de hautes études scientifiques de Bures sur Yvette.
Les élèves sont désignés et recensés par leurs établissements, parce que l'éducation nationale est responsable des élèves qui lui sont confiés, et donc des projets et des actions auxquels ils sont invités à participer. Nos stages se déroulent pendant les congés scolaires, mais ils ne sont pas des stages « de vacances ». **Une appétence et un répondant minimum sont attendus des élèves, sur lesquels les établissements veillent.**

Le secrétariat opérationnel : Frédérique CHAUVIN, rectorat de Versailles
Les inspecteurs : Anne ALLARD, Joëlle DEAT, Xavier GABILLY, Anne MENANT, Pierre MICHALAK (IPR honoraire), Vincent PANTALONI, Évelyne ROUDNEFF, Jean-François REMETTER, Charles SEVA, Christine WEILL
Les responsables des établissements d'accueil : Caroline TALLEC, Principale du collège Paul Fort, Bernard POIGT, Proviseur du lycée Camille Pissarro, Guy SEGUIN, Proviseur du lycée Hoche.
Les professeurs : Bruno BAUDIN (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Christophe DEGUIL (Lycée Notre Dame, SAINT GERMAIN EN LAYE), Odile DELASSUS (Lycée Alfred Kastler, Thomas DUMAS (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Nicolas FIXOT (Lycée Vallée de Chevreuse, GIF SUR YVETTE), Catherine HOUARD (Lycée Camille Pissarro, PONTOISE), Sébastien PORCHER (Collège Jacqueline Auriol, BOULOGNE BILLANCOURT), Konrad RENARD (Lycée René Cassin, GONESSE), Martine SALMON (Lycée Évariste Galois, SARTROUVILLE), Carine SIMONDET (Lycée Maurice Genevoix, MONTROUGE), Martine ZNATY (Collège Les Hauts Grillets, SAINT GERMAIN EN LAYE)
Et les professeurs qui accompagnent leurs élèves : Isabelle ANDRÉ et Élise CHEMINANT(Collège de l'Agiot à ÉLANCOURT), Pascale DUQUESNEL-SALON (Collège Charles Péguy, LE CHESNAY), Florence FERRY (Collège Alain Fournier, ORSAY), Rémi MOURTERON (Collège Descartes à FONTENAY LE FLEURY), Papababacar NIANG (Collège Montaigne, CONFLANS SAINTE HONORINE), Rémi NIGUÈS (Collège Auguste Renoir à ASNIÈRES SUR SEINE), Christopher SPARKES (Collège Charles Gounod à SAINT CLOUD)

Programme du stage des 21 et 22 octobre 2019

<table>
<tr><th colspan="5">Mardi 21 octobre</th></tr>
<tr><th>Montlhéry</th><th>Pontoise</th><th>Versailles 1</th><th>Versailles 2</th><th>Versailles 3</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Nombres
N. Fixot</td><td rowspan="2">Dénombrement
Algorithmes
T. Dumas</td><td colspan="3">Film</td></tr>
<tr><td rowspan="2">11.
Équations
M. Znaty</td><td rowspan="2">Aires et volumes
C. Simondet</td><td rowspan="2">Angles et distances
S. Porcher</td></tr>
<tr><td>Repas</td><td>11.30 Repas</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Angles et distances
N. Fixot</td><td rowspan="2">12.30
Aires et volumes
O. Delassus</td><td colspan="3">12.30
Repas</td></tr>
<tr><td rowspan="2">13.15 Angles et distances
S. Porcher</td><td rowspan="2">Équations
M. Znaty</td><td rowspan="2">Aires et volumes
C. Simondet</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Dénombrement
Algorithmes
C. Weill</td><td rowspan="2">14
Nombres
K. Renard</td></tr>
<tr><td>15 Aires et volumes
C. Simondet</td><td>Angles et distances
S. Porcher</td><td>Équations
M. Znaty</td></tr>
<tr><td>Exposé</td><td>15.30 Film</td><td colspan="3">Exposé</td></tr>
</table>

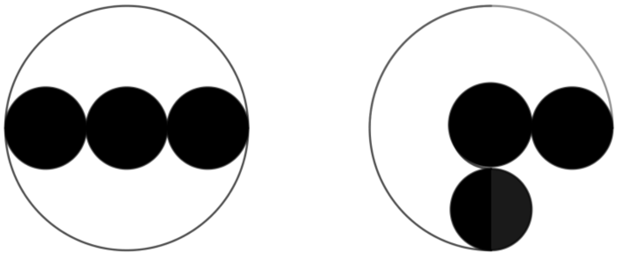
<table>
<tr><th colspan="5">Mardi 22 octobre</th></tr>
<tr><th>Montlhéry</th><th>Pontoise</th><th>Versailles 1</th><th>Versailles 2</th><th>Versailles 3</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Aires et volumes
X. Gabilly</td><td rowspan="2">Équations
B. Baudin</td><td colspan="3">Exposé</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Dénombrement
Algorithmes
M. Salmon</td><td rowspan="2">Nombres
C. Deguil</td><td rowspan="2">Rallye</td></tr>
<tr><td>Repas</td><td>11.30
Repas</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Équations
C. Weill</td><td rowspan="2">12.30
Angles et distances
C. Houard</td><td colspan="3">Repas</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Rallye</td><td rowspan="2">DénombrementAlgorithmes
M. Salmon</td><td rowspan="2">Nombres
C. Deguil</td></tr>
<tr><td>Film</td><td>14
Rallye</td></tr>
<tr><td>Rallye
X. Gabilly</td><td>Exposé</td><td>Nombres
C. Deguil</td><td>Rallye</td><td>Dénombrement
Algorithmes
M. Salmon</td></tr>
</table>

Attention : Les horaires sont propres à chaque lieu, ainsi que l'ordre de la succession des types et thèmes des séances. La seule contrainte porte sur l'horaire global : 10 heures à 16h30.

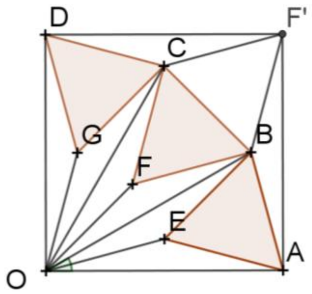
Aires et volumes

Exercice 1 Disques troués

Dans un disque de rayon 3, on a découpé trois disques de rayon 1 comme sur la figure, à gauche. Les deux morceaux restants du disque ont été séparés. L'un des deux morceaux a été replacé sur l'autre après une rotation d'un angle droit (à droite sur la figure). Quelle est l'aire de cette nouvelle surface ?

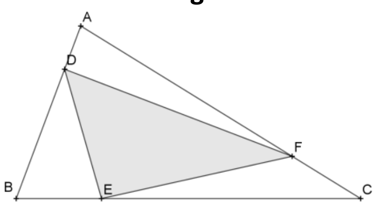


Exercice 2 Aire d'un dodécagone régulier



Les triangles OAB, OBC et OCD sont tous isocèles de sommet principal O. Leurs angles au sommet ont tous pour mesure 30°. Les triangles ABE, BFC, OGD et BCF' sont tous équilatéraux. Montrer que le quadrilatère OAF'D est un carré.
En déduire que l'aire du dodécagone régulier inscrit dans un cercle de rayon R est $3R^2$.

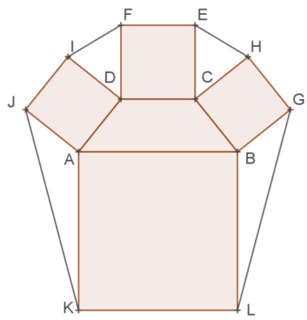
Exercice 3 Triangle réduit



Le triangle ABC a pour aire 48. On place le point D sur le côté [AB], le point E sur le côté [BC] et le point F sur le côté [CA] de sorte que $\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{BD}} = \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{CE}} = \frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{AF}} = \frac{1}{3}$.
Quelle est l'aire du triangle DEF ?

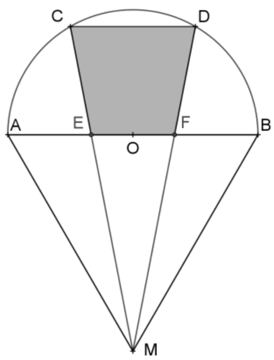
Exercice 4 Trapèze et alentours

Le trapèze isocèle ABCD a pour côtés parallèles [AB], de longueur 15 et [CD] de longueur 7, les autres côtés [AD] et [BC] mesurant 5. Sur chacun de ces côtés on construit un carré, et on complète la figure comme ci-contre. Quelle est l'aire du polygone ainsi construit ?



Exercice 5 Abside

Les points E et F divisant le segment [AB] en trois, on trace les demi-droites passant respectivement par E et F et issues du sommet M du triangle équilatéral ABM. Ces droites coupent le demi-cercle de diamètre [AB] en trois.
1. Les arcs $\widehat{\mathrm{AC}}$, $\widehat{\mathrm{CD}}$ et $\widehat{\mathrm{DB}}$ sont-ils de même mesure ?
2. Le segment [AB] mesure 15 unités. Quelle est l'aire du trapèze (est-ce bien un trapèze ?) CDEF ?
N.B. Cette construction aurait été utilisée par les constructeurs de temples ou d'églises pour découper régulièrement des fonds d'absides. Si on découpe le segment [AB] en cinq, on réalise une très bonne approximation d'un découpage régulier en cinq, etc.

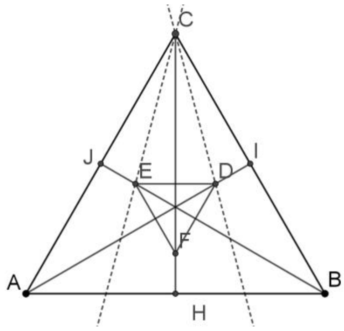


Exercice 6 Économie de carton

À partir d'un tétraèdre régulier creux (les faces sont en carton), on effectue les constructions suivantes :

1. Sur chacune des faces, on trace un triangle équilatéral dont les côtés ont une longueur égale à deux fois la distance de chacun des sommets à l'arête la plus proche. Montrer que les points d'intersection entre les hauteurs du triangle et les bissectrices des « demi-angles aux sommets » (en pointillés) sont les sommets de ce triangle.

2. On crée un solide avec de nouvelles arêtes [DE], [EF], [FD], [AE], [AF], [BF], [BD], [CD] et [CE] et leurs homologues construites à partir des autres faces. Les arêtes du tétraèdre initial disparaissent en tant qu'arêtes et le solide obtenu est composé de quatre pyramides régulières à base hexagonale posées sur quatre faces hexagonales d'un tétraèdre tronqué. Calculer son volume et le comparer à celui du tétraèdre initial.



N.B. Des éléments de maquette sont proposés en annexe

Nombres

Exercice 1 Chaînes de multiples de 7

Le nombre 7 possède 13 multiples qui s'écrivent dans le système décimal avec deux chiffres. On constitue des « chaînes » de multiples de 7 telles que le chiffre des unités d'un multiple soit le chiffre des dizaines du multiple suivant. Chaque multiple doit y apparaître au plus une fois. Quelles sont les chaînes les plus longues ?

Exercice 2 Patriarche antédiluvien

D'après un texte ancien, Mathusalem mourut l'année du Déluge, 1 *6xy* années (les deux derniers chiffres ne peuvent être lus) après la création d'Adam. Trois autres textes font référence au patriarche, qui aurait vécu plus de 900 ans. Trois autres textes indiquent, l'un que le nombre d'années écoulées jusqu'au Déluge est un multiple de 8, l'autre un multiple de 7, le troisième un multiple de 9. Il est possible qu'un des trois se trompe. Quelles sont les possibilités restantes ?

Exercice 3 Calculs avec des approximations

Rappels :

1. Le nombre x est une valeur approchée du nombre X à a près si $|X - x| \leq a$;

2. Le nombre y est obtenu par troncature au [millième] à partir du nombre positif Y si l'écriture décimale de y coïncide avec celle de y jusqu'au [troisième] chiffre à droite de la virgule et ne possède que des 0 (qu'on n'écrit pas) après.

2 bis. Adapter les mots entre crochets dans la définition précédente. Adapter aussi aux troncatures à l'unité, à la dizaine, etc. en tenant compte des 0 que dans ce cas on écrit…

3. La troncature au [millième] w du nombre positif Z peut être prise pour *arrondi* au [millième] de Z si $Z - w < 5 \times 10^{-4}$. Si $Z - w \geq 5 \times 10^{-4}$, l'arrondi au [millième] de Z est $w + 10^{-3}$.

3 bis. Adapter les mots entre crochets de la définition précédente.

Ce qui distingue principalement ces notions, c'est que *valeur approchée* porte sur les *distances*, tandis que *troncature* et *arrondi* portent sur des *formats d'écriture.*

Soit a un entier positif et soit m un nombre réel strictement positif. On pose $P = \frac{a}{100} \times m$ et $\bar{P}$ l'arrondi au centième de P.

1. Résoudre l'équation $\bar{P} = 2\ 019$ lorsque $m = 0{,}321$
2. Résoudre l'équation $\bar{P} = 2\ 020$ lorsque $m = 0{,}56$

Exercice 4 Archéologie

Un nombre entier n étant écrit dans le système décimal, on appelle *fragment de n* tout entier obtenu en supprimant des chiffres par lesquels débute ou finit l'écriture de n. Par exemple, 19, 9, 201, 20, 2 sont les *fragments de 2 019.* Quel est le plus petit entier positif n qui, ajouté à un de ses fragments, donne 2 019 ?

Exercice 5 Reste 1 000

Quels sont les entiers n tels que la division euclidienne de n^2 par $2n + 1$ donne pour reste 1 000 ?

Exercice 6 Millésimes « variés »

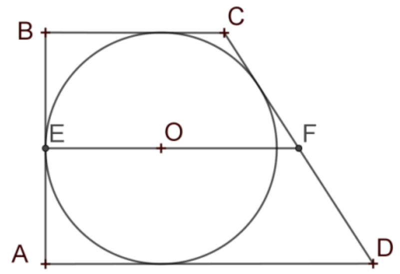
Le millésime 2019 est « varié » : les quatre chiffres qui le composent sont tous distincts. 2020 n'est pas « varié ». Le millésime 2019 est le septième terme d'une suite de millésimes « variés » consécutifs : 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019.

1. Quelle est la prochaine suite de sept millésimes « variés » consécutifs ?
2. Peut-on trouver, entre 1000 et 9999 une suite de **huit** millésimes « variés » consécutifs ?

Angles et distances

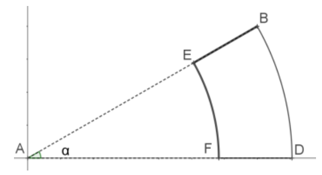
Exercice 1 Cercle inscrit

Le quadrilatère ABCD est un trapèze rectangle (les angles en A et B sont droits). Le cercle de centre O et de rayon 10 est tangent aux quatre côtés du trapèze. Le côté [CD] a pour longueur 24.
Si E et F sont les milieux respectifs de [AB] et (CD], quelle est la longueur EF ?

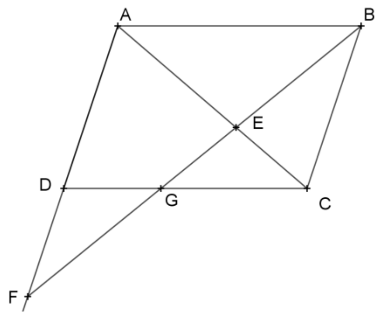


Exercice 2 Il suffit de passer le pont

Deux ponts, [EB] et [FD] permettent de traverser un fleuve, dont le cours suit (partiellement) une couronne circulaire, entre deux secteurs d'angle au sommet α. Pour aller de B à D, peut-il être plus court de passer par E et F ?

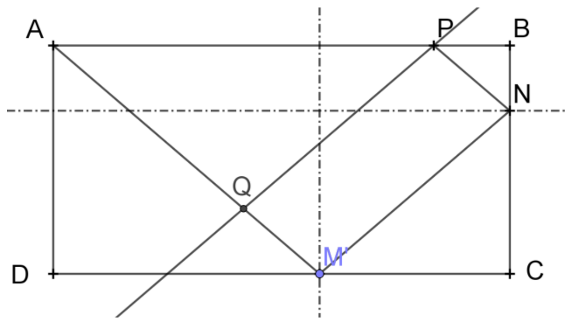


Exercice 3 Parallélogramme Une droite passant par B coupe le côté [CD] du parallélogramme ABCD en G, la demi-droite [AD) en F et la diagonale [AC] en E.
Montrer que $\frac{1}{\mathrm{BE}} = \frac{1}{\mathrm{BG}} + \frac{1}{\mathrm{BF}}$



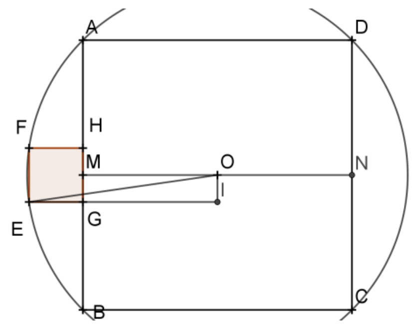
Exercice 4 Billard

Sur un billard rectangulaire ABCD (de longueur AB = 4 et de largeur BC = 2), une boule (assimilée à un point) part de A, rebondit successivement en M, N et P sur les côtés [CD], [BC] et [BA] et sa trajectoire coupe le segment [AM] en Q. Le rebond en M, par exemple, s'effectue en suivant la direction symétrique de la direction d'arrivée par rapport à la perpendiculaire en M au côté [CD].



1. Pour quelles positions de M parvient-on à un quadrilatère MNPQ ?
2. Quelle est l'aire de ce quadrilatère ?
3. Ce quadrilatère peut-il être un losange ?

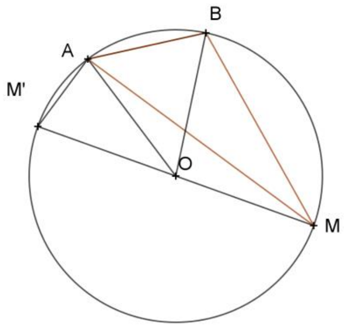
Exercice 5 Grand carré et petit carré



Au carré ABCD, de côté 4, on adjoint le carré EFHG, dont les sommets E et F appartiennent au cercle circonscrit à ABCD et les sommets G et H au côté [AB]. Combien mesure le côté du petit carré ?

Exercice 6 Le théorème de l'angle inscrit (rappel)

Si deux points A et B appartiennent à un cercle de centre O, alors pour tout point M de ce cercle tel que l'angle $\widehat{AMB}$ soit aigu, la mesure de l'angle $\widehat{AMB}$ est la moitié de la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$

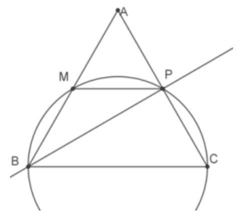


.

Exercice 6 bis Angle inconnu

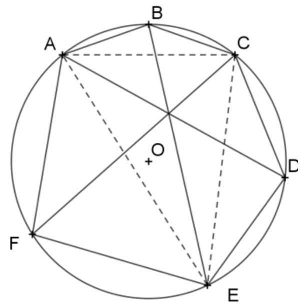
Le triangle ABC est isocèle de sommet principal A. La bissectrice de l'angle en B coupe le côté [AC] en P. Le cercle circonscrit au triangle BPC coupe le côté [AB] en son milieu M.

Quelle est la mesure de l'angle en B ?



Exercice 7 Un hexagone pas très régulier

L'hexagone ABCDEF est inscrit dans un cercle de centre O. Il est tel que les égalités AB = BC, CD = DE, EF=FA. Prouver que les droites



N. B. Une annexe proposant un survol de la question des droites remarquables du triangle est proposée en fin de livret

Équations

Exercice 1 Partie entière (sans calculatrice)
Pour tout réel positif x, il existe un entier n tel que $n \leq x < n+1$. L'entier n est appelé *partie entière de* x. On note : $n = [x]$ ou $n = E(x)$.

Quelle est la *partie entière* du nombre $x = \sqrt{10-\sqrt{10-\sqrt{10-\sqrt{10-\sqrt{10-\sqrt{10}}}}}}$?

Exercice 2 Inégalités

Les nombres x, y et z satisfont les inégalités suivantes : $\begin{cases} x+y+3z \geq 13 \\ x+2y \geq 4 \\ x \geq 1 \end{cases}$.

Quelle est la valeur minimale de $x+y+z$?

Exercice 3 Répétition
Une suite de 2019 nombres possède les propriétés suivantes :
1. Tous les groupes de quatre termes consécutifs ont la même somme ;
2. Les différences de deux termes consécutifs ont toutes la même valeur absolue.
On sait d'autre part que les trois premiers termes, a, b et c sont tels que $a < b < c$ et $b = 6$.
Quelle est la somme de tous les termes de cette suite ?

Exercice 4 Petit foot entre amies
Aïssatou, Eugénie et Wendie enchaînent des petits matchs : à chaque fois, l'une d'entre elles est gardienne de but, les deux autres joueuses de champ. Quand un but est marqué, la gardienne échange sa place avec celle qui a marqué. Aïssatou a été 12 fois joueuse de champ, Eugénie 21 fois et Wendie a gardé 8 fois le but. Qui gardait le but lors du premier match ?

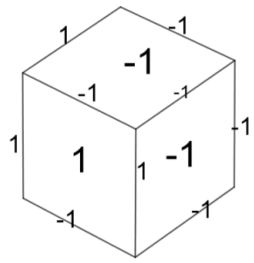
Exercice 5 Classement
Les nombres a, b, c et d sont des entiers supérieurs à 2. On pose $= \frac{a+b}{c+d}, B = \frac{a\times b}{c+d}, C = \frac{a+b}{c\times d}, D = \frac{a\times b}{c\times d}$. Quel est le plus grand de ces quatre nombres ?

Exercice 6 Équations en morceaux
Pour tout nombre réel positif a, on note $\lfloor a \rfloor$ le plus grand entier inférieur ou égal à a (on l'appelle la *partie entière de* a ; elle peut être aussi notée $[a]$ ou $E(a)$) . On note $\{a\}$ la *mantisse de* a, c'est-à-dire la différence entre a et sa partie entière : $\{a\} = a - \lfloor a \rfloor$.
Les nombres x, y, z vérifient : $\begin{cases} 3\lfloor x \rfloor - \{y\} + \{z\} = 20{,}3 \\ 3\lfloor y \rfloor + 5\lfloor z \rfloor - \{x\} = 15{,}1. \\ \{y\} + \{z\} = 0{,}9 \end{cases}$
Que sont x, y et z ?

Dénombrement et algorithmes

Exercice 1 Zéro délai mais pas zéro papier
Un imprimeur veut lancer une série d'impressions de documents sur 2 imprimantes. Tout document doit être imprimé entièrement sur une même imprimante. Les imprimantes vont à la même vitesse et enchaînent les documents sans délai entre eux. Donner une répartition des impressions sur les 2 imprimantes de façon à terminer le tout en un minimum de temps, s'il veut imprimer les documents suivants :
1. Il y a 4 documents comportant respectivement 1, 3, 5 et 7 pages ;
2. Il y a 5 documents comportant respectivement 1, 3, 5, 7 et 9 pages ;
3. Il y a 6 documents comportant 1, 3, 5, 7, 9 et 11 pages ;
4. Il y a 50 documents dont les nombres de pages sont tous les entiers impairs compris entre 1 et 99 ;
5. Il y a n documents dont les nombres de pages sont les entiers compris entre 1 et $2n-1$.

Exercice 2 Produit d'arêtes
Sur chaque arête d'un cube, on écrit le nombre 1 ou le nombre -1. Sur chaque face, on écrit le produit des nombres figurant sur les quatre arêtes de la face. On fait ensuite le total de ces 18 nombres (12 arêtes et 6 faces). Quelle est la plus petite valeur possible de cette somme ?

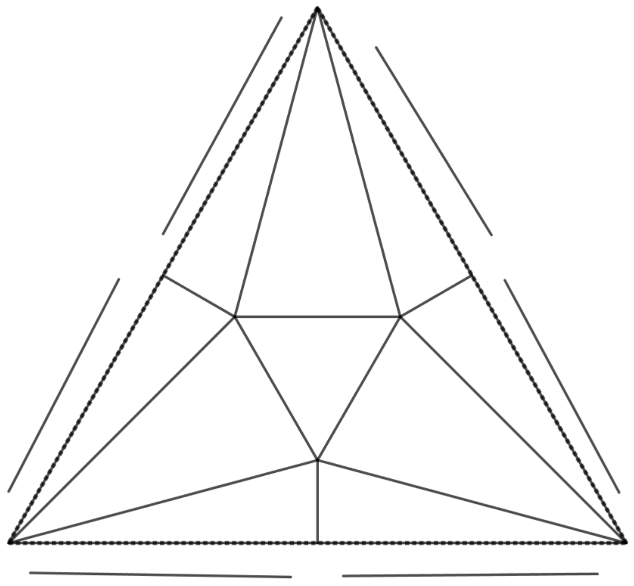
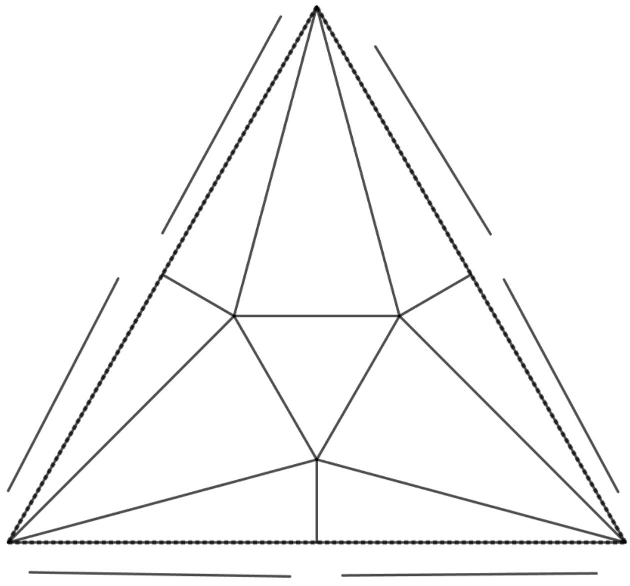
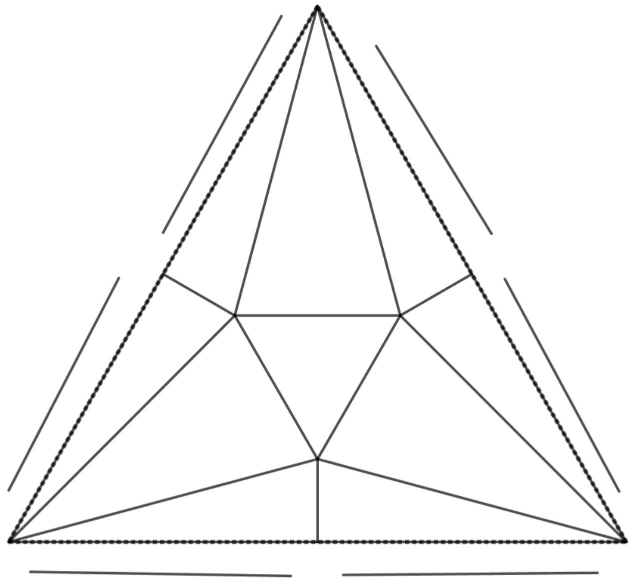
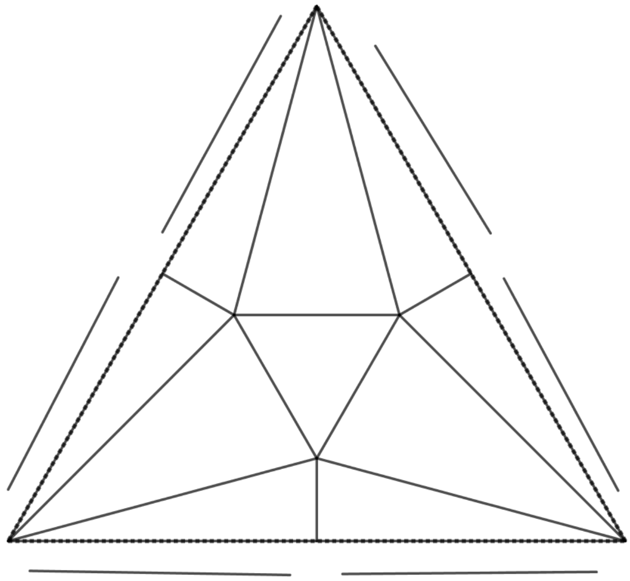


Exercice 3 Fair play
Les étudiants participant à la finale d'une compétition de mathématiques ont été répartis, un par table, sur m lignes et n colonnes. Ils sont polis et respectueux les uns des autres et, avant le début de l'épreuve, chacun serre les mains de ses voisins (un à gauche, un à droite, un devant, un derrière, un devant à droite, un devant à gauche, un derrière à droite, un derrière à gauche au maximum). Au total 1 020 poignées de mains sont échangées. Combien d'étudiants participaient à ce concours ?

Exercice 4 Déménageurs
La piscine à balles du jardin d'enfants contient 110 balles jaunes, 120 balles rouges et 140 bleues. Combien les gamins facétieux (et sachant un peu compter…) doivent-ils en jeter par-dessus bord *au minimum* pour être sûrs que dans ce qu'ils ont éliminé se trouvent au moins 113 balles de la même couleur ?

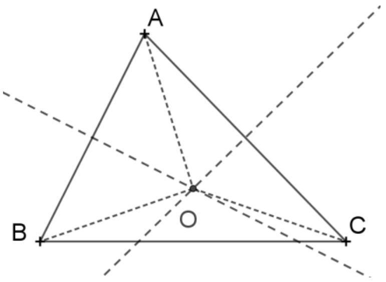
Exercice 5 Tireuse de cartes
On place sur une table quatre cartes à jouer et on note l'ordre des couleurs apparues, par exemple « Cœur, Carreau, Pique, Cœur ». Combien de telles séries sont-elles possibles si on écarte les séries comportant exactement deux fois la même couleur ?

Exercice 6 L'addition, s'il vous plaît !
Cinq amis ont déjeuné ensemble. L'addition s'élève à 180 euros. Trois d'entre eux ont réglé la facture, à charge pour les autres de les rembourser (chacun paiera la même somme, on n'est pas dans un sketch).
Argan donne 90 euros, Béline donne 57 euros et Cléante 33 euros.
À combien de transactions *au minimum* procèdera-t-on pour que Diafoirus et Fleurant paient leur écot ?

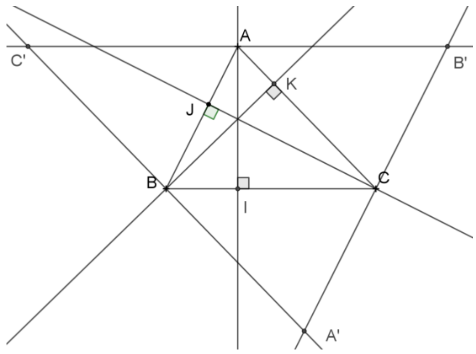





Annexe : droites remarquables du triangle

Médiatrices

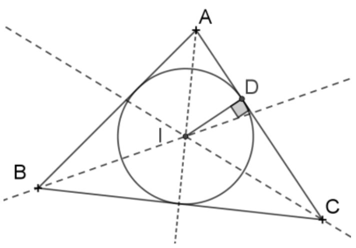


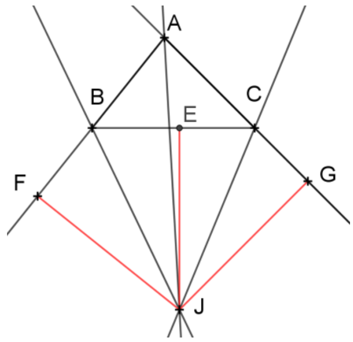
Hauteurs



Deux **médiatrices** de côtés d'un triangle sont nécessairement sécantes. L'égalité des distances de leur point d'intersection O aux sommets du triangle montre que ce point appartient à la troisième. Le cercle de centre O passant par A passe aussi par B et C. On l'appelle ***cercle circonscrit au triangle** ABC.* Les **hauteurs** du triangle ABC sont perpendiculaires aux parallèles menées respectivement par A, B et C aux côtés du triangle. Par construction, ABA'C, BCB'A et CAC'B sont des parallélogrammes, et donc les hauteurs de ABC sont les médiatrices de A'B'C'. Elles sont concourantes. Les point de concours est appelé ***orthocentre du triangle** ABC.*

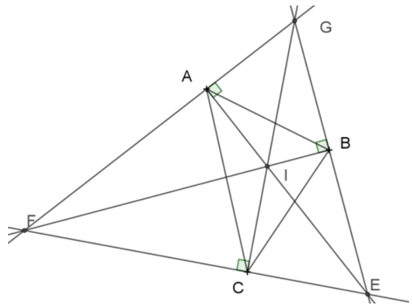
Bissectrices





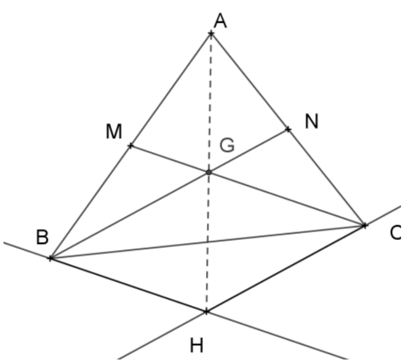
On peut utiliser pour les **bissectrices** un argument semblable à celui utilisé pour les médiatrices : tout point de la bissectrice d'un angle étant équidistant des côtés de l'angle (propriété caractéristique), le point d'intersection de deux bissectrices appartient à la troisième. Ce point noté ici I est équidistant des côtés du triangle ABC : le cercle centré en I et tangent à un des côtés (donc aux autres) est appelé ***cercle inscrit dans le triangle ABC**.* Le même raisonnement vaut pour deux bissectrices extérieures et une bissectrice intérieure : le point J est équidistant lui aussi des côtés du triangle. Le cercle de centre J passant par son projeté E sur (BC) passe aussi par ses autres projetés F et G. C'est le ***cercle exinscrit dans l'angle A du triangle ABC**.*

Bissectrices pour toi, hauteurs pour moi



Deux bissectrices extérieures du triangle ABC sont sécantes en un point par lequel passe la bissectrice intérieure du troisième angle. Les hauteurs du triangle EFG sont donc les bissectrices intérieures du triangle ABC. Le triangle ABC, dont les sommets sont les pieds des hauteurs de EFG, est appelé ***triangle orthique du triangle EFG***.

Changement radical avec les médianes



Menons par C la parallèle à la médiane issue de B et par B la parallèle à la médiane issue de C. Ces deux droites sont sécantes en H (il faudrait montrer qu'il est impossible que deux médianes d'un triangle soient parallèles…). Pour le triangle AHC, la droite (BN), parallèle à un côté passant par le milieu d'un autre, est une « droite des milieux ». Même chose pour le triangle ABH et la droite (CM). Les droites (CM) et (BN) passent donc par le milieu G du segment [AH]. Comme le quadrilatère BHCG est un parallélogramme (on l'a construit avec des parallèles… mais on ne savait pas que le sommet opposé à H appartient à la droite (AH)), ses diagonales ont même milieu, et donc (AG) passe par le milieu de [BC] : les médianes sont concourantes. Leur point de concours est appelé ***centre de gravité du triangle ABC.***

À méditer : les stratégies différentes utilisées pour ces démonstrations illustrent le fait que la notion de milieu a plus à voir avec le parallélisme et les intersections de droites qu'avec les distances. C'est une notion *affine.*