Jeux et Stratégies.

(Pierre Bornsztein, Octobre 2011.)

Exercice 1 (Fort-Boyard).

On dispose de 21 allumettes. Chacun à son tour, l'un des deux joueurs prend $1, 2$ ou 3 allumettes. Celui qui prend la dernière allumette gagne.
Déterminer celui des deux joueurs qui possède une stratégie gagnante.

Solution.

Le premier joueur prend une seule allumette à son premier coup. Puis, à chaque coup suivant, si son adversaire vient de prendre a allumettes, il en choisit alors $4 - a$. Ainsi, après chacun de ses coups, le nombre d'allumettes prises augmente de 4. En particulier, le premier joueur prendra la $21^{ième}$, et gagne ainsi la partie.

C'est un exemple de stratégie basée sur le principe "si tu peux jouer, alors je pourrais jouer après toi". Dans un jeu qui doit nécessairement s'arrêter, un joueur qui possède une telle stratégie est alors sûr de gagner, puisqu'il ne sera pas le premier à être bloqué...
La difficulté est de trouver la façon adéquate de jouer : si l'exemple est ici assez simple, il peut ne pas paraître évident tout de suite qu'une bonne façon de jouer est de compléter à 4 ce qu'a fait son adversaire au coup précédent...
Nous verrons ci-dessous une autre façon d'analyser la situation, qui rendra la solution trouvée plus naturelle.

Exercice 2.

On dispose d'un jeu complet de dominos. Deux joueurs jouent, chacun à son tour, selon la règle suivante : Le joueur choisit un domino parmi ceux non encore utilisés, et le place à l'une des extrémités de la chaîne déjà formée, de sorte que deux dominos adjacents aient toujours les mêmes numéros marqués sur leurs cases adjacentes.
Le premier qui ne peut jouer perd.
Déterminer celui des deux joueurs qui possède une stratégie gagnante.

Solution.

On peut trouver une stratégie du même type pour le premier joueur, mais un peu plus subtile :
Le premier joueur choisit le domino $(0, 0)$. Alors, le second joueur est obligé de choisir un domino $(0, a)$ (qu'il peut évidemment placer en $(a, 0)$) avec $a \neq 0$. Le premier joueur choisit alors le domino (a, a). Dans cette situation, on constate que l'on a la propriété suivante :
pour tout entier k, le domino $(0, k)$ est encore disponible si et seulement si le domino (a, k) est encore disponible. De plus, le second joueur ne peut choisir un double.
Donc, à partir de maintenant, si le second joueur choisit un domino, il est forcément de la forme $(0, k)$ ou (a, k) et le premier peut alors choisir à son tour suivant celui de ces dominos qui reste disponible, et le mettre à la suite du domino du second joueur. Ce faisant, le second joueur se retrouve dans une situation où la propriété ci-dessus est à nouveau vraie. En procédant ainsi, le premier joueur est sûr de ne pas être le premier bloqué et donc de gagner la partie

Exercice 3.

a) Sur un tableau 2012×2012 formé exclusivement de cases blanches, Alice et Bob jouent au jeu suivant : Alice commence par noircir la case en haut à gauche. Bob doit alors noircir une case non encore noircie et adjacente (i.e. ayant un côté commun) à celle que vient de noircir Alice. Puis c'est au tour d'Alice de jouer, et de noircir une case blanche adjacente à la case précédemment noircie par Bob, et ainsi de suite. Lorsqu'un joueur ne peut plus jouer, il a perdu.
Déterminer lequel des deux joueurs possède une stratégie gagnante.
b) Et s'ils jouaient sur un tableau 2011×2011 ?

Solution.

a) Là encore, on peut trouver une stratégie de ce type, mais pour le second joueur. Celui-ci doit imaginer que le tableau est pavé par des dominos, ce qui possible puisqu'il y a un nombre pair de cases. Un tel pavage étant fixé une fois pour toutes, la stratégie de Bob est alors très simple : il "complète" à chaque fois le domino que vient juste de commencer à colorier Alice. Ainsi, à son premier coup, il colorie la case qui forme un domino avec la case en haut

à gauche. Alice est alors obligée de noircir une case d'un domino non encore utilisé, ce qui laisse à Bob la possibilité de compléter à nouveau le domino à son prochain coup. À chacun de ses coups, Alice est alors obligée "d'ouvrir" un domino, pour autant qu'elle puisse jouer, et laisse à Bob la possibilité de jouer en le complétant.
S'il adopte cette stratégie, c'est donc Alice qui va être bloquée la première, et Bob qui va gagner la partie.
b) Cette fois, c'est Alice qui possède une stratégie gagnante : c'est exactement la même qu'au a), mais en ne considérant que le pavage du tableau dont on a éliminé la case en haut à gauche (il est facile de vérifier qu'une fois cette case éliminée, un tel pavage existe puisque $2011 - 1 = 2010$ est pair).

Remarque.
On aura évidemment observé que les valeurs 2012 ou 2011 sont anecdotiques, dans le sens où seule la parité du nombre choisi est importante.

Nous allons maintenant nous intéresser à une deuxième approche : l'analyse des positions gagnantes, le plus souvent à partir de ce qui est supposé être la fin du jeu (on parle alors d'*analyse rétrograde*). Une position est dite *gagnante* lorsque le joueur qui doit jouer à partir de cette position est sûr de gagner (en jouant au mieux évidemment). Si le jeu doit nécessairement se terminer avec la victoire de l'un ou de l'autre, les positions qui ne sont pas gagnantes sont alors *perdantes*.

Revenons sur l'exercice 1 :
Les positions $1, 2, 3$ sont évidemment gagnantes puisque le joueur à qui c'est le tour peut prendre toutes les allumettes d'un seul coup. Mais la position 4 est perdante car le joueur qui doit jouer est obligé de laisser $1, 2$ ou 3 allumettes et donne ainsi une position gagnante à son adversaire. Du coup, les positions $5, 6, 7$ sont gagnantes puisque le joueur concerné peut ne laisser que 4 allumettes et donne ainsi une position perdante. On en déduit que la position 8 est perdante.
Et ainsi de suite, on prouve que les positions perdantes sont exactement les multiples de 4. En y regardant de plus près, on constate que cela correspond à la stratégie décrite initialement.

Exercice 4.

Partant de 0, Alice et Bob ajoutent chacun leur tour à la quantité en cours un nombre de leur choix parmi $\{1, 2, ..., 10\}$. Celui qui atteint 100 gagne.

Qui a une stratégie gagnante?

Solution.

C'est Alice, qui commence, qui a une stratégie gagnante.
Pour le prouver, on va étudier les positions (i.e. les quantités obtenues) gagnantes de ce jeu :
Clairement, 100 est perdante (le jeu vient de se terminer par la victoire de l'adversaire...). Et donc, les quantités $90, 91, ..., 99$ sont gagnantes (un joueur qui part d'une telle quantité gagne à son prochain coup). Par suite, 89 est perdante, puisque le joueur qui doit alors jouer laissera une quantité égale à l'un des nombres $90, 91, ..., 99$.
Comme ci-dessus, on en déduit que $79, 80, ..., 88$ sont gagnantes. Puis, que 78 est perdante. Et ainsi de suite, on vérifie facilement que les positions perdantes sont de 11 en 11, à savoir $100, 89, 78, 67, 56, 45, 34, 23, 12, 1$.
Puisque 1 est perdante, Alice commence par choisir 1, laisse donc une position perdante à Bob, et assure alors sa victoire en pouvant rester à chaque coup sur des positions gagnantes.

Généralisation.
Si l'on joue avec les entiers de 1 à n, et qu'à chaque coup on ajoute un nombre entre 1 et p, le raisonnement ci-dessus s'adapte en tout point pour montrer que les positions perdantes sont tous les entiers de la forme $n - k(p+1)$. Si $n = q(p+1) + r$ est la division euclidienne de n par $p+1$, alors $r \in \{0, ..., p\}$ et les positions perdantes sont les entiers de la forme $(q-k)(p+1) + r$, avec $0 \leq k \leq q$.
En particulier :
- Si $r = 0$, la position perdante la plus proche du départ (hormis 0) est $p+1$. Le premier joueur ne peut l'atteindre à son premier coup, et quel que soit ce premier coup, le second joueur, lui, pourra s'y placer. C'est donc le second joueur qui a une stratégie gagnante.
- Si $r \neq 0$, le premier joueur peut alors se placer en r à son premier coup et assurer sa victoire comme ci-dessus.

Exercice 5.

On place un jeton sur la case $C1$ d'un échiquier classique. Deux joueurs le déplacent à tour de rôle, en respectant la règle suivante : à chaque tour, on peut déplacer le jeton d'autant de cases que l'on veut, mais au moins une,

soit vers la droite, soit vers le haut soit en diagonale vers la droite et vers le haut. Celui des deux joueurs qui amène le jeton en $H8$ gagne.
Déterminer lequel des deux joueurs a une stratégie gagnante.

Solution.

Si le jeton est au départ en $C1$, c'est le premier joueur qui possède une stratégie gagnante.
En fait, pour toute case de départ, via une analyse des positions, on peut déterminer lequel des deux joueurs a une stratégie gagnante : la case $H8$ est perdante puisque le joueur qui doit jouer alors que le jeton est dans cette case vient juste de perdre... Du coup, toutes les cases de la ligne n°8 ou de la colonne H ou de la diagonale $A1 - H8$ sont des positions gagnantes. Mais alors, les positions $F7$ et $G6$ sont perdantes puisqu'un joueur qui doit jouer à partir d'une telle case met forcément le jeton sur une des cases gagnantes ci-dessus. On en déduit que toutes les cases non encore déterminées dans les colonnes, lignes ou diagonales respectives de ces deux cases sont gagnantes. Comme ci-dessus, cela entraine que les cases $C5$ et $E3$ sont perdantes. De même, les cases non encore déterminées dans les lignes, colonnes ou diagonales respectives de ces deux cases sont alors gagnantes. Par suite, les cases $A4$ et $D1$ sont perdantes, et les autres sont gagnantes.
En particulier, la case $C1$ est gagnante. Donc, le premier joueur possède une stratégie gagnante, décrite ci-dessus : son premier coup consiste à amener le jeton en $D1$ (ou $C5$) qui est perdante puis, selon le coup du second joueur à amener à chaque fois le jeton dans des positions perdantes.

Exercice 6.

Sur la table se trouvent 1999 jetons. Tour à tour, Albert et Barbara doivent enlever au moins un jeton et au plus la moitié des jetons restants au moment où ils jouent. Le joueur qui laisse un unique jeton sur la table perd la partie. C'est Albert qui commence. Déterminer lequel des deux joueurs possède une stratégie gagnante et décrire une telle stratégie.

Solution.

C'est Albert qui possède une stratégie gagnante. Analysons les positions :
Clairement, 1 est gagnante (puisque le joueur qui doit jouer vient de gagner la partie...), et 2 est perdante car celui qui doit jouer est obligé de laisser un

seul jeton et perd la partie. On en déduit que 3 et 4 sont gagnantes (le joueur peut laisser 2 jetons et donne ainsi une position perdante à son adversaire). Du coup, 5 est perdante car le joueur doit alors laisser 3 ou 4 jetons, et donne alors une position gagnante à son adversaire. Cela entraine que $6, 7, 8, 9, 10$ sont gagnantes (le joueur laisse alors 5, qui est perdante), mais que 11 est perdante (le joueur est obligé de laisser $6, 7, 8, 9$ ou 10 qui sont gagnantes).
Afin d'éviter de tout faire à la main, il est judicieux de prendre un peu de hauteur. Pour cela, on constate que si k est perdante alors $k+1, k+2, ..., 2k$ sont gagnantes (le joueur laisse alors k, dont on vient de dire qu'elle était supposée perdante), et $2k + 1$ est perdante (le joueur est obligé de laisser $k+1, k+2, ..., 2k-1$ ou $2k$, qui sont gagnantes). Cela permet de déterminer les positions perdantes (et les positions gagnantes) de proche en proche, mais plus rapidement... Ainsi, les positions perdantes sont
$2, 5, 11, 23, 47, 95, 191, 383, 767, 1535, 3071, ...$
Et donc, 1999 est gagnante, ce qui conclut.

Remarque.
De façon plus générale, à l'aide de ce que l'on vient de faire, on peut prouver que les positions perdantes sont les nombres de la forme $3 \times 2^n - 1$, où $n \geq 0$ est un entier.

Exercice 7.

Alice et Bob jouent aux échecs, mais en ayant le droit d'enchaîner deux coups par tour. C'est Alice qui commence. Prouver qu'elle peut s'assurer de ne pas perdre.

Solution.

Qu'Alice soit assurée de ne pas perdre, c'est dire que Bob ne possède pas de stratégie gagnante.
Par l'absurde : supposons que Bob ait une stratégie gagnante.
Alors Alice commence par déplacer son cavalier de $B1$ en $A3$ et retour. C'est donc Bob qui doit jouer, comme s'il était le premier joueur. Or, puisque le second joueur possède une stratégie gagnante, Alice peut l'utiliser et donc s'assurer de battre Bob. Ainsi, Bob possède une stratégie gagnante mais est sûr de perdre. Contradiction.
Donc, Bob n'a pas de stratégie gagnante, ce qui assure qu'Alice est sûre de pouvoir éviter de perdre.

Remarques.
Attention, qu'Alice soit sûre de ne pas perdre ne signifie pas qu'elle soit sûre de gagner, car il pourrait y avoir partie nulle... De plus, nous n'avons finalement pas décrit de stratégie adéquate pour Alice.
Cela dit, l'exemple ci-dessus est un exemple de ce que l'on peut appeler un "vol de stratégie" : afin de prouver qu'un joueur ne possède pas de stratégie gagnante, on suppose (par l'absurde) qu'il en a une et on prouve que l'autre joueur peut l'utiliser à son tour (i.e. la lui voler), d'où la contradiction.
Pour que tout fonctionne au mieux, et que l'on soit assuré que l'un des joueurs ait effectivement une stratégie gagnante (là, on a juste prouvé qu'un joueur n'en avait pas, ce qui n'est pas du tout pareil), il serait idéal que l'on soit sûr que le jeu se finisse, jamais sur une partie nulle, et qu'il soit possible de prouver que, pour un tel jeu, l'un des deux joueurs possède toujours une stratégie gagnante (du coup, si on a éliminé une possibilité, c'est donc que l'autre joueur possède la stratégie désirée). Et justement, c'est exactement ce que dit le théorème suivant, dû à Zermelo :

Théorème (Zermelo)

Dans un jeu fini à deux joueurs, à information parfaite et n'ayant que deux issues possibles (à savoir la victoire du joueur n°1 ou la victoire du joueur n°2), l'un des deux joueurs possède une stratégie gagnante.

Quelques précisions : dire que le *jeu est fini* signifie que l'arbre de toutes les positions possibles, aussi gigantesque soit-il, est tout de même fini, et dire qu'il est *à information parfaite* signifie que l'on exclut toute intervention du hasard (ainsi, on ne parle pas ici de la plupart des jeux de dés, par exemple).
Pour ceux qui voudraient en savoir plus et, en particulier, lire la démonstration de ce théorème, que nous n'allons pas faire ici, peuvent se reporter à l'adresse suivante :
http://www.math.ens.fr/culturemath/maths/pdf/jeux/strategies.pdf
Disons juste, qu'en gros, il s'agit de remonter l'arbre de toutes les positions possibles du jeu, à partir des feuilles (les situations finales) pour remonter à la racine (la position de départ) en controlant à chaque étape lequel des deux joueurs est en position gagnante. C'est, en plus raffiné, ce que nous avons fait dans les exercices précédents.

On constate que le type d'approche ci-dessus est "non constructive" dans la mesure où l'on ne décrit pas ce que serait alors une stratégie gagnante. Il

peut alors être un peu difficile d'accepter l'idée que l'on sache qu'un joueur donné ait une stratégie gagnante sans pour autant être capable d'en expliciter une...
Et pourtant, c'est bien ce que l'on va voir dans les exercices ci-dessous :

Exercice 8.

On inscrit $n = 2$ sur un tableau. A tour de rôle, Alice (la première) et Bob ajoutent un diviseur d du nombre n qui est inscrit au moment où ils jouent, avec $0 < d < n$ (et laissent donc $n + d$).
(a) Le premier joueur qui fait dépasser 2011^{2012} perd. Qui a une stratégie gagnante?
(b) Le premier joueur qui fait dépasser 2012^{2011} perd. Qui a une stratégie gagnante?

Solution.
a) Bon, là, on peut encore s'en sortir facilement. En effet, Alice peut décider d'ajouter 1 à chaque tour. Ce faisant, il est facile de vérifier qu'elle laisse un nombre impair à Bob, qui est donc obligé de choisir un nombre d impair et de laisser alors un nombre pair. Quel que soit ce nombre pair, soit Bob vient de perdre (et donc le premier vient de gagner) soit il vient de laisser un nombre qui est strictement inférieur à 2011^{2012} (qui est impair!). Ainsi, en ajoutant à nouveau 1, Alice ne dépasse toujours pas 2011^{2012} et laisse encore un nombre impair à Bob.
On retrouve une stratégie du type "si tu peux jouer, alors moi aussi", qui assure que ce n'est pas Alice qui va être bloquée la première. Or, il est clair que le jeu se finira après un nombre fini de coups (pas plus de $2011^{2012} - 1$ coups) et que l'un des deux joueurs finira par gagner.
Ainsi, c'est Alice qui possède une stratégie gagnante, et celle-ci est particulièrement simple à mettre en oeuvre...

b) En fait, quel que soit le nombre $N \geq 6$ que l'on ne doit pas dépasser, c'est toujours Alice qui possède une stratégie gagnante. Evidemment, si N est impair, la stratégie du a) fonctionne parfaitement. Par contre, dans le cas où N est pair, si Alice décide de jouer de cette façon, il est facile pour Bob de faire de même et de gagner, ce qui montre que la façon de jouer d'Alice est alors une stratégie...perdante! Alice va donc devoir trouver autre chose. Mais le théorème de Zermelo lui dit qu'elle a bien raison d'y croire : en effet, comme on l'a signalé ci-dessus, le jeu est clairement fini, sans partie nulle et à information parfaite, donc l'un des deux joueurs possède une stratégie gagnante.

Par l'absurde : supposons que Bob ait une stratégie gagnante.
Lors de son premier tour, Alice est obligée de laisser $n = 3$ (elle ne peut choisir que $d = 1$). Du coup, Bob est obligé de choisir $d = 1$ et laisse $n = 4$.
Á partir de là, deux options sont possibles pour Alice : laisser $n = 5$ ou $n = 6$.
Mais, puisque Bob possède une stratégie gagnante, c'est donc que si Alice laisse $n = 5$, Bob qui est alors obligé de laisser $n = 6$ va gagner. Cela assure que le joueur qui laisse $n = 6$ gagne. Dans ces conditions, Alice peut choisir de directement laisser $n = 6$ puis, en utilisant la stratégie de Bob, gagner la partie. Cela contredit donc que Bob possède une stratégie gagnante.

Ainsi, Bob n'a pas de stratégie gagnante, et le théorème de Zermelo assure que c'est donc Alice qui en possède une. Par contre, à la différence du a), sauf à étudier toutes les parties possibles, il paraît difficile de donner une description simple d'une telle stratégie...

Exercice 9.

Une plaquette de chocolat est un rectangle de $m \times n$ carrés-unité. Seul le carré en bas à gauche est empoisonné. A tour de rôle, Achille, en premier, et Béatrice découpe la plaquette selon la règle suivante : on choisit un carré c et prend tout le rectangle dont c est le coin inférieur gauche (il se peut que certains des carrés de ce rectangle aient déjà été pris auparavant). Evidemment, celui des deux qui prend le carré empoisonné perd.
Quel est celui qui a une stratégie gagnante?

Solution.

Il est évident que si $m = n = 1$, le premier joueur va perdre... On suppose donc que $m \geq 2$ ou $n \geq 2$.

Clairement, nous sommes face à un jeu pour lequel le théorème de Zermelo s'applique. L'un des deux joueurs possède donc une stratégie gagnante.
Par l'absurde : supposons que ce soit Béatrice.
Si Achille choisit le carré situé en haut et à gauche, il laisse la plaque quasi entière à Béatrice qui, à partir de cette position, possède une stratégie qui

va lui assurer la victoire. En particulier, selon cette stratégie, Béatrice va choisir un carré c et découper le “rectangle” correspondant. On note qu'à ce rectangle il manque en fait exactement le carré choisi par Achille pour être complet. Mais alors, Achille pourrait dès le départ choisir le carré c et découper le rectangle tout entier, et laisser ainsi Béatrice dans la position exacte dans laquelle lui-même se trouvait selon sa première option. Il n'a alors plus qu'à suivre la stratégie gagnante de Béatrice pour gagner lui-même, privant ainsi celle-ci de la victoire qu'elle était assurée d'obtenir, ce qui est absurde.
Ainsi, Béatrice n'a pas de stratégie gagnante, et c'est donc Achille qui en possède une.

Remarque.
Ce jeu est connu sous le nom de *Chomp* et a été inventé par le mathématicien David Gale. Sauf dans certain cas très simples (par exemple, si $m = 1$ auquel cas le premier joueur ne laisse directement que le carré empoisonné), on ne connaît pas de description d'une stratégie gagnante sans recours à un ordinateur afin d'analyser toutes les positions possibles.

Exercice 10.

Soit $n > 0$ un entier. A tour de rôle, Alice et Bob écrivent au tableau un entier strictement positif et ne dépassant pas n. Aucun nombre n'est effacé, et il est interdit d'écrire un nombre qui divise un nombre déjà écrit au tableau. C'est Alice qui commence et le premier qui ne peut plus jouer perd la partie. Qui a une stratégie gagnante?

Solution.

C'est Alice qui posède une stratégie gagnante. Le raisonnement est très proche de celui de l'exercice précédent.
D'après le théorème de Zermelo, nous savons que l'un des deux joueurs possède une telle stratégie. Par l'absurde : supposons que ce soit Bob.
Si Alice écrivait 1, Bob écrirait alors un certain nombre k de façon à suivre sa stratégie et à assurer sa victoire. Mais alors, Alice peut directement écrire k, ce qui interdit à chacun des deux joueurs d'écrire ultérieurement 1, et laisse donc Alice dans la situation exacte où était Bob lorsqu'il suivait sa stratégie. En suivant cette même stratégie, Alice a donc assurer sa victoire, en contradiction avec notre hypothèse.

Ainsi, Bob n'a pas de stratégie gagnante et, selon ce qui a été dit au départ, c'est donc qu'Alice en a une.