ACADÉMIE DE VERSAILLES
Liberté Égalité Fraternité

Pépinière académique de mathématiques

Année 2023-2024 **Stage « filé »**

Classe de seconde **Fiche numéro 1**

Parution lundi 13 novembre **Retour attendu pour le jeudi 30 novembre**

Dans cette fiche, chaque énoncé d'exercice est précédé de quelques rappels constituant des outils pour traiter l'exercice.

Exercice 1 – Calcul littéral

Propriété : pour tous réels a et b :
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ et $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
Cette propriété est très utile aussi bien pour factoriser que pour développer.
On peut notamment faire des « factorisations forcées » pour se ramener à l'une de ces égalités pour factoriser une expression.
Méthode : pour démontrer une égalité $A = B$, on peut, suivant les cas :
- montrer que $A - B = 0$
- montrer que $A = C$ et $B = C$
- transformer A pour arriver à B ou transformer B pour arriver à A.

1. Soit a, b et c trois réels tels que $a^2 + b^2 = c^2$. On dit que (a, b, c) est un *triplet pythagoricien*. On pose $x = a + 2b + 2c, y = 2a + b + 2c$ et $z = 2a + 2b + 3c$.
   a. Exprimer en fonction de a, b et c les nombres x^2, y^2 et z^2.
   b. Montrer que (x, y, z) est un triplet Pythagoricien.
2. Soit n un entier naturel, on veut montrer que l'entier $N = 1 + n(n+1)(n+2)(n+3)$ est un carré parfait (le carré d'un entier).
   a. Montrer que $n(n+3) = (n+1)(n+2) - 2$.
   b. Conclure.
3. Soit a, b et b trois réels non nuls tels que $ab + bc + ca = 0$.
   a. Réduire au même dénominateur l'expression $S = \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c}$.
   b. Démontrer que $S = -3$.

Inégalités et opérations

Définition : on dit qu'un nombre a est inférieur ou égal à un nombre b lorsque $b - a \geq 0$.

Pour comparer deux nombres, on peut étudier le signe de leur différence ou appliquer l'un des théorèmes suivants.

Soit a, b, c et d des nombres réels
Théorème 1 : si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$ et si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a + c \leq b + d$.
(si $a \leq b$ alors $b - a \geq 0$ donc, comme $b - a = (b + c) - (a + c)$, $(b + c) - (a + c) \geq 0$ soit $(b + c) \geq (a + c)$)
Théorème 2 :
Si $a \leq b$ et $c \geq 0$ alors $ac \leq bc$
Si $a \leq b$ et $c \leq 0$ alors $ac \geq bc$
Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$ alors $ac \leq bd$.
Théorème 3 :
Si $0 < a \leq b$ alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} > 0$.
Théorème 4 :
Si $0 \leq a \leq b$ alors $0 \leq \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

Dans tout exercice portant sur des inégalités, on se ramène souvent à l'un au moins de ces théorèmes.

Exercice 2 – Démonstrations

Dans cet exercice, on demande de démontrer (et **non d'appliquer**) certains des théorèmes énoncés précédemment avec le prérequis :

- Le produit de deux nombres de même signe est positif ;
- Le produit de deux nombres de signes contraires est négatif.

1. Démontrer la deuxième partie du théorème 1.
2. Démontrer le théorème 2.
3. Démontrer le théorème 3.

Exercice 3 – Quelques comparaisons

Dans cet exercice, on traite les questions en appliquant les théorèmes énoncés précédemment.

Soit a un réel strictement positif.

1. Ranger dans l'ordre croissant les nombres $a, a^2, \frac{1}{a}$ et $\sqrt{a}$:

a. Si $a > 1$ **b.** si $0 < a < 1$.

2. **a.** Montrer que $\frac{a}{a+1} < 1 < \frac{a+1}{a}$.

b. Déterminer, entre les nombres $\frac{a}{a+1}$ et $\frac{a+1}{a}$ celui qui est le plus proche de 1.

Exercice 4 – Multiples et diviseurs

Définition : On dit qu'un nombre entier a est un *multiple* d'un nombre entier b s'il existe un nombre entier k tel que $a = kb$.
On dit alors que b est un *diviseur* de a ou que a est *divisible* par b.
Dans les exercices mieux vaut se ramener à la définition en termes de « multiple de » pour éviter d'écrire des quotients.

Définition : un nombre entier naturel est dit premier lorsqu'il a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.
On admettra le théorème suivant
Théorème : Si un nombre est multiple de plusieurs nombres premiers distincts alors il est multiple du produit de ces nombres premiers.

Théorème (division euclidienne) : soit a et b deux entiers naturels tels que $b \neq 0$, alors il existe un unique couple (q, r) d'entiers naturels tels que $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$.

1. Montrer que tout nombre impair peut s'écrire comme la différence des carrés de deux entiers consécutifs.
2. Montrer qu'un entier est pair si et seulement si son carré est un entier pair.
3. Soit A un entier dont l'écriture décimale est $\overline{cdu}$, c'est-à-dire $A = 100c + 10d + u$.
   a. Montrer que si $d = c + u$ alors A est divisible par 11.
   b. Montrer que si $c + d + u = 9$ alors A est divisible par 9.
4. Montrer que pour tous nombres entiers a et b, le produit $ab(a^2 - b^2)$ est un multiple de 3.
(on pourra étudier les restes dans les divisions euclidiennes de a et b par 3).

Exercice 5 Racines carrées

Théorème : Pour tous nombres réels **positifs ou nuls** a et b :

- $\sqrt{a^2} = a$;
- $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$. En particulier $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$;
- $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Ce théorème est à la base de tous les calculs sur les racines carrées.

1. Montrer que pour tout entier naturel n, $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.
2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, comparer $\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$ et $\frac{1}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}$.
3. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{10}$.
4. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \geq 100$.