Pépinière académique de mathématiques

Année 2023-2024 — **Stage « filé »**

Classe de seconde — **Fiche numéro 1**

Parution lundi 13 novembre — **Retour attendu pour le jeudi 30 novembre**

Dans cette fiche, chaque énoncé d'exercice est précédé de quelques rappels constituant des outils pour traiter l'exercice.

Exercice 1 – Calcul littéral

Propriété : pour tous réels a et b :
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ et $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
Cette propriété est très utile aussi bien pour factoriser que pour développer.
On peut notamment faire des « factorisations forcées » pour se ramener à l'une de ces égalités pour factoriser une expression.
Méthode : pour démontrer une égalité $A = B$, on peut, suivant les cas :
- montrer que $A - B = 0$
- montrer que $A = C$ et $B = C$
- transformer A pour arriver à B ou transformer B pour arriver à A.

1. Soit a, b et c trois réels tels que $a^2 + b^2 = c^2$. On dit que (a, b, c) est un *triplet pythagoricien*. On pose $x = a + 2b + 2c, y = 2a + b + 2c$ et $z = 2a + 2b + 3c$.
  a. Exprimer en fonction de a, b et c les nombres x^2, y^2 et z^2.
  b. Montrer que (x, y, z) est un triplet Pythagoricien.

2. Soit n un entier naturel, on veut montrer que l'entier $N = 1 + n(n+1)(n+2)(n+3)$ est un carré parfait (le carré d'un entier).
  a. Montrer que $n(n+3) = (n+1)(n+2) - 2$.
  b. Conclure.

3. Soit a, b et b trois réels non nuls tels que $ab + bc + ca = 0$.
  a. Réduire au même dénominateur l'expression $S = \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c}$.
  b. Démontrer que $S = -3$.

1. **a.** En développant et en regroupant les termes comme pour le carré de la somme de deux nombres, on obtient :
$x^2 = (a + 2b + 2c)^2 = a^2 + (2b)^2 + (2c)^2 + 2 \times a \times 2b + 2 \times a \times 2c + 2 \times 2b \times 2c = a^2 + 4b^2 + 4c^2 + 4ab + 4ac + 8bc$.
De même, $y^2 = 4a^2 + b^2 + 4c^2 + 4ab + 8ac + 4bc$ et $z^2 = 4a^2 + 4b^2 + 9c^2 + 8ab + 12ac + 12bc$.
b. On en déduit que

$$z^2 - (x^2 + y^2) = (4-4-1)a^2 + (4-1-4)b^2 + (9-4-4)c^2 + (8-4-4)ab + (12-8-4)ac + (12-4-8)bc.$$

Soit $z^2 - (x^2 + y^2) = -a^2 - b^2 + c^2 = 0$ puisque (a, b, c) est un triplet pythagoricien et on en déduit que (x, y, z) est bien aussi un triplet pythagoricien.

2. **a.** Pour tout entier n, $(n+1)(n+2) - 2 = n^2 + n + 2n + 2 - 2 = n^2 + 3n = n(n+3)$.
b. Soit $N = 1 + n(n+1)(n+2)(n+3)$.
Alors $N = 1 + (n+1)(n+2)n(n+3) = 1 + (n+1)(n+2)\big((n+1)(n+2) - 2\big)$.
Si on pose $A = (n+1)(n+2)$ alors $N = 1 + A(A-2) = 1 + A^2 - 2A = (A-1)^2$.
Le nombre N est donc le carré de l'entier $(n+1)(n+2) - 1$.

3. **a.** $S = \frac{1}{abc}\big((b+c)bc + (c+a)ca + (a+b)ab\big) = \frac{1}{abc}(bbc + cbc + cca + aca + aab + bab)$
b. On cherche à regrouper différemment les termes pour utiliser la relation $ab + bc + ca = 0$.

$$S = \frac{1}{abc}(a(ca+ab) + b(bc+ab) + c(bc+ca)) = \frac{1}{abc}(a(-bc) + b(-ac) + c(-ab)) = \frac{-3abc}{abc} = -3\,.$$

Inégalités et opérations
Définition : on dit qu'un nombre a est inférieur ou égal à un nombre b lorsque $b - a \geq 0$.

Pour comparer deux nombres, on peut étudier le signe de leur différence ou appliquer l'un des théorèmes suivants.

Soit a, b, c et d des nombres réels
Théorème 1 : si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$ et si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a + c \leq b + d$.
(si $a \leq b$ alors $b - a \geq 0$ donc, comme $b - a = (b + c) - (a + c)$, $(b + c) - (a + c) \geq 0$
soit $(b + c) \geq (a + c)$)
Théorème 2 :
Si $a \leq b$ et $c \geq 0$ alors $ac \leq bc$
Si $a \leq b$ et $c \leq 0$ alors $ac \geq bc$
Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$ alors $ac \leq bd$.
Théorème 3 :
Si $0 < a \leq b$ alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} > 0$.
Théorème 4 :
Si $0 \leq a \leq b$ alors $0 \leq \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

Dans tout exercice portant sur des inégalités, on se ramène souvent à l'un au moins de ces théorèmes.

Exercice 2 – Démonstrations
Dans cet exercice, on demande de démontrer (et **non d'appliquer**) certains des théorèmes énoncés précédemment avec le prérequis :
- Le produit de deux nombres de même signe est positif ;
- Le produit de deux nombres de signes contraires est négatif.

1. Démontrer la deuxième partie du théorème 1.
2. Démontrer le théorème 2.
3. Démontrer le théorème 3.

Théorème 1 :
si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $b - a \geq 0$ et $d - c \geq 0$.
Or $(b + d) - (a + c) = (b - a) + (d - c)$. La somme de deux nombres positifs ou nuls est positive ou nulle donc , $(b + d) - (a + c) \geq 0$ soit $(b + d) \geq (a + c)$.
Théorème 2 :
Si $a \leq b$ (c'est-à-dire $b - a \geq 0$) comme $bc - ac = c(b - a)$ alors :
- si $c \geq 0$ alors $c(b - a) \geq 0$ soit $ac \leq bc$
- si $c \leq 0$ alors $c(b - a) \leq 0$ soit $ac \geq bc$
et si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$, alors comme $c \geq 0$, $ac \leq bc$ et comme $b \geq 0$, $bc \leq bd$ d'où $ac \leq bc \leq bd$.
Théorème 3 :
$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab}$ donc si $0 < a \leq b$, alors $a - b \leq 0$ et $ab > 0$ d'où $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \leq 0$ et $ab > 0$ soit $\frac{1}{b} \geq \frac{1}{a} > 0$.

Exercice 3 – Quelques comparaisons
Dans cet exercice, on traite les questions en appliquant les théorèmes énoncés précédemment.

Soit a un réel strictement positif.

1. Ranger dans l'ordre croissant les nombres $a, a^2, \frac{1}{a}$ et $\sqrt{a}$:

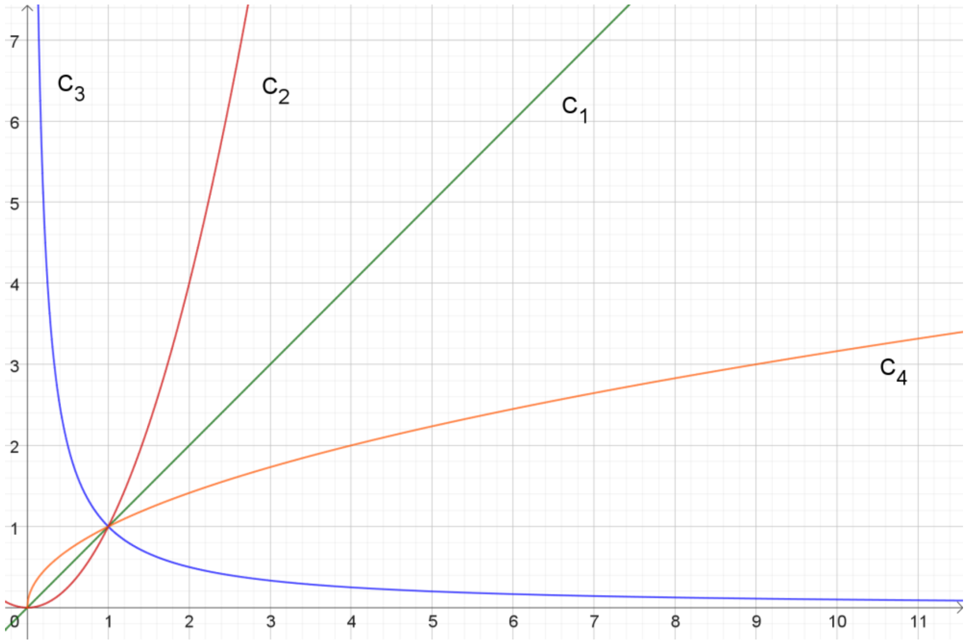
a. Si $a > 1$ **b.** si $0 < a < 1$.

2. a. Montrer que $\frac{a}{a+1} < 1 < \frac{a+1}{a}$.

b. Déterminer, entre les nombres $\frac{a}{a+1}$ et $\frac{a+1}{a}$ celui qui est le plus proche de 1.

1. Pour avoir une idée de l'ordre dans lequel on va ranger ces nombres, on peut commencer par représenter sur l'intervalle $]0, +\infty[$, les fonctions associées :

$f_1 : x \mapsto x,\ f_2 : x \mapsto x^2,\ f_3 : x \mapsto \frac{1}{x},\ f_4 : x \mapsto \sqrt{x}$



a. Si $a > 1$, montrons que $\frac{1}{a} < \sqrt{a} < a < a^2$.

$a^2 - a = a(a-1)$. Comme $a > 1 > 0$, on a bien $a < a^2$.

$a - \sqrt{a} = \sqrt{a}(\sqrt{a} - 1)$. Comme $a > 1 > 0$, $\sqrt{a} > 0$ et $\sqrt{a} > 1$ (théorème 4), on a bien $\sqrt{a} < a$.

Comme $a > 1 > 0$, $\sqrt{a} > 1$ et $\frac{1}{a} < 1$ (théorème 3), on a $\frac{1}{a} < 1 < \sqrt{a}$.

b. Si $0 < a < 1$, montrons que $a^2 < a < \sqrt{a} < \frac{1}{a}$.

Comme $0 < a < 1$, $0 < \sqrt{a} < 1$ (théorème 4) et $1 < \frac{1}{a}$ (théorème 3) donc $\sqrt{a} < \frac{1}{a}$.

$\sqrt{a} - a = \sqrt{a}(1 - \sqrt{a})$. Comme $0 < \sqrt{a} < 1$, on a bien $a < \sqrt{a}$.

$a - a^2 = a(1-a)$. Comme $0 < a < 1$, on a bien $a^2 < a$.

2. **a.** $1 - \frac{a}{a+1} = \frac{a+1-a}{a+1} = \frac{1}{a+1}$. Comme $a > 0$, $\frac{1}{a+1} > 0$ et $\frac{a}{a+1} < 1$.

$\frac{a+1}{a} - 1 = \frac{a+1-a}{a} = \frac{1}{a}$. Comme $a > 0$, $\frac{1}{a} > 0$ et $1 < \frac{a+1}{a}$.

b. Répondre à la question revient à comparer les nombres $\frac{a+1}{a} - 1$ et $1 - \frac{a}{a+1}$ c'est-à-dire les nombres $\frac{1}{a+1}$ et $\frac{1}{a}$.

Comme $0 < a < a+1$, $\frac{1}{a+1} < \frac{1}{a}$ (théorème 3). Le nombre le plus proche de 1 est donc $\frac{a}{a+1}$.

Exercice 4 – Multiples et diviseurs

Définition : On dit qu'un nombre entier a est un *multiple* d'un nombre entier b s'il existe un nombre entier k tel que $a = kb$.
On dit alors que b est un *diviseur* de a ou que a est *divisible* par b.
Dans les exercices mieux vaut se ramener à la définition en termes de « multiple de » pour éviter d'écrire des quotients.

Définition : un nombre entier naturel est dit premier lorsqu'il a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.
On admettra le théorème suivant
Théorème : Si un nombre est multiple de plusieurs nombres premiers distincts alors il est multiple du produit de ces nombres premiers.

Théorème (division euclidienne) : soit a et b deux entiers naturels tels que $b \neq 0$, alors il existe un unique couple (q, r) d'entiers naturels tels que $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$.

1. Montrer que tout nombre impair peut s'écrire comme la différence des carrés de deux entiers consécutifs.
2. Montrer qu'un entier est pair si et seulement si son carré est un entier pair.
3. Soit A un entier dont l'écriture décimale est $\overline{cdu}$, c'est-à-dire $A = 100c + 10d + u$.

a. Montrer que si $d = c + u$ alors A est divisible par 11.
b. Montrer que si $c + d + u = 9$ alors A est divisible par 9.

4. Montrer que pour tous nombres entiers a et b, le produit $ab(a^2 - b^2)$ est un multiple de 3.
(on pourra étudier les restes dans les divisions euclidiennes de a et b par 3).

1. Pour tout entier impair n, il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$. Or $2k + 1 = (k + 1)^2 - k^2$.

2. Si n est un entier pair, alors il existe un entier k tel que $n = 2k$ et donc $n^2 = 4k^2 = 2 \times 2k^2$. Le carré de n est donc pair.
Réciproquement, montrons que si n^2 est pair alors n est pair. Supposons pour cela que n est impair. Il existe alors un entier k tel que $n = 2k + 1$ et alors $n^2 = 4k^2 + 4k + 1$ qui est en contradiction avec le fait que n^2 est pair.
L'équivalence est donc bien démontrée.

3. **a.** Si $d = c + u$ alors $A = 100c + 10c + 10u + u = 110c + 11u = 11(10c + u)$ d'où A est divisible par 11.
b. Si $c + d + u = 9$, alors $A = 99c + c + 9d + d + u = 9(11c + d + 1)$ d'où A est divisible par 9.

4. Si a ou b est multiple de 3, il existe un entier k tel que $ab = 3k$ et donc $ab(a^2 - b^2) = 3k(a^2 - b^2) = 3k'$ où k'est l'entier $k(a^2 - b^2)$.
Sinon, les restes dans la division de a et b par 3 sont 1 ou 2, ce qui donne quatre cas à étudier et il suffit pour chaque cas d'avoir un des nombres du produit $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ multiple de 3 pour que $ab(a^2 - b^2)$ soit multiple de 3. S'il existe deux entiers k et k' tels que :
$a = 3k + 1$ et $b = 3k' + 1$ alors $a - b$ est multiple de 3 car $a - b = 3(k - k')$
$a = 3k + 1$ et $b = 3k' + 2$ alors $a + b$ est multiple de 3 car $a + b = 3(k + k' + 1)$
$a = 3k + 2$ et $b = 3k' + 1$ alors $a + b$ est multiple de 3 car $a + b = 3(k + k' + 1)$
$a = 3k + 2$ et $b = 3k' + 2$ alors $a - b$ est multiple de 3 car $a - b = 3(k - k')$

Exercice 5 Racines carrées

Théorème : Pour tous nombres réels **positifs ou nuls** a et b :

- $\sqrt{a^2} = a$;
- $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$. En particulier $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$;
- $\sqrt{a + b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Ce théorème est à la base de tous les calculs sur les racines carrées.

1. Montrer que pour tout entier naturel n, $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \sqrt{n + 1} - \sqrt{n}$.

2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, comparer $\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$ et $\frac{1}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}$.

3. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $\sqrt{n + 1} - \sqrt{n} < \frac{1}{10}$.

4. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \geq 100$.

1. Pour tout entier naturel n, $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\left(\sqrt{n+1}\right)^2-\left(\sqrt{n}\right)^2} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n+1-n} = \sqrt{n + 1} - \sqrt{n}$.

2. Pour tout entier $n \geq 2$, $\sqrt{n + 1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ et $\sqrt{n} - \sqrt{n - 1} = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$.
Or, comme $n + 1 > n > n - 1 \geq 0$, $0 < \sqrt{n} + \sqrt{n - 1} < \sqrt{n + 1} + \sqrt{n}$ d'où $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$.
On en déduit que $\sqrt{n + 1} - \sqrt{n} < \sqrt{n} - \sqrt{n - 1}$.

3. Comme $\sqrt{n + 1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$, on est ramené à chercher le plus petit entier naturel n tel que $\sqrt{n + 1} + \sqrt{n} > 10$. $\sqrt{26} + \sqrt{25} \geq 10$ et si $n \leq 24$ alors $\sqrt{n} \leq \sqrt{24} < 5$ et $\sqrt{n + 1} \leq 5$ donc $\sqrt{n + 1} + \sqrt{n} < 10$, le plus petit entier naturel n qui convient est $n = 25$.

4. Soit $S = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$.
On peut aussi écrire $S = \left(\sqrt{2} - 1\right) + \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) + \left(\sqrt{4} - \sqrt{3}\right) + \cdots + \left(\sqrt{n + 1} - \sqrt{n}\right)$.
La plupart des termes se simplifient deux à deux et $S = \sqrt{n + 1} - 1$.
$S \geq 100$ équivaut donc à $\sqrt{n + 1} \geq 101$ soit $n \geq 10\,200$.