Pépinière académique de mathématiques

Année 2025-2026 — **Stage « filé »**

Classe de seconde — **Fiche numéro 1**

Parution lundi 17 novembre — **Retour attendu pour le lundi 8 décembre**

Dans cette fiche, chaque énoncé d'exercice est précédé de quelques rappels constituant des outils pour traiter l'exercice.

Exercice 1 – Calcul littéral

Propriété : pour tous réels a et b :
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ et $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
Cette propriété est très utile aussi bien pour factoriser que pour développer.
On peut notamment faire des « factorisations forcées » pour se ramener à l'une de ces égalités pour factoriser une expression.
Méthode : pour démontrer une égalité $A = B$, on peut, suivant les cas :
- montrer que $A - B = 0$
- montrer que $A = C$ et $B = C$
- transformer A pour arriver à B ou transformer B pour arriver à A.

1. Soit x et y deux réels non nuls. On pose $a = x + \frac{1}{x}$, $b = y + \frac{1}{y}$ et $c = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$.
   a. Exprimer en fonction de a les nombres $x^2 + \frac{1}{x^2}$, $x^3 + \frac{1}{x^3}$ et $x^4 + \frac{1}{x^4}$.
   b. Démontrer que $a^2 + b^2 + c^2 = abc + 4$.
2. Soit a, b et c trois réels
   a. Développer les trois expressions $A = (a+b+c)(ab+bc+ca)$, $B = (a+b+c)^2$, $C = (a+b+c)^3$.
   b. Démontrer que si $a+b+c = 0$, alors $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Exercice 2 – Un peu d'arithmétique

Définition : On dit qu'un nombre entier a est un *multiple* d'un nombre entier b s'il existe un nombre entier k tel que $a = kb$.
On dit alors que b est un *diviseur* de a ou que a est *divisible* par b.
Dans les exercices mieux vaut se ramener à la définition en termes de « multiple de » pour éviter d'écrire des quotients.

Définition : un nombre entier naturel est dit premier lorsqu'il a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Théorème (division euclidienne) : soit a et b deux entiers naturels tels que $b \neq 0$, alors il existe un unique couple (q, r) d'entiers naturels tels que $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$.

1. Montrer que le produit de trois entiers naturels consécutifs est un multiple de 3.
2. Déterminer trois entiers consécutifs dont la somme est égale à 2 025. Peut-on faire de même en remplaçant 2 025 par 2 026 ?
3. Déterminer quatre entiers impairs consécutifs dont la somme est égale à 2 024. Est-ce possible avec 2 025 ?

Inégalités et opérations

Définition : on dit qu'un nombre a est inférieur ou égal à un nombre b lorsque $b - a \geq 0$.

Pour comparer deux nombres, on peut étudier le signe de leur différence ou appliquer l'un des théorèmes suivants.

Soit a, b, c et d des nombres réels
Théorème 1 : si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$ et si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a + c \leq b + d$.
(si $a \leq b$ alors $b - a \geq 0$ donc, comme $b - a = (b + c) - (a + c)$, $(b + c) - (a + c) \geq 0$
soit $(b + c) \geq (a + c)$)

Théorème 2 :
Si $a \leq b$ et $c \geq 0$ alors $ac \leq bc$
Si $a \leq b$ et $c \leq 0$ alors $ac \geq bc$
Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$ alors $ac \leq bd$.
Théorème 3 :
Si $0 < a \leq b$ alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} > 0$.
Théorème 4 :
Si $0 \leq a \leq b$ alors $0 \leq \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

Dans tout exercice portant sur des inégalités, on se ramène souvent à l'un au moins de ces théorèmes.

Exercice 3 – Comparaisons de nombres

1. Démontrer le théorème 3.

2. Ranger dans l'ordre croissant les nombres $a, a^2, \frac{1}{a}$ et $\sqrt{a}$:

a. Si $a > 1$ **b.** si $0 < a < 1$.

3. **a.** Soit n un entier naturel non nul et p un entier tel que $1 \leq p \leq n$. Comparer les nombres $\frac{1}{n+p}$ et $\frac{1}{2n}$.

b. En déduire que $\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1} + \cdots + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{2}$.

Exercice 4 – Le nombre d'or

Théorème : Pour tous nombres réels **positifs ou nuls** a et b :

- $\sqrt{a^2} = a$;
- $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$. En particulier $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$;
- $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Ce théorème est à la base de nombreux calculs sur les racines carrées.

1. Montrer que pour tout nombre réel x positif, $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$.

2. On appelle nombre d'or le nombre Φ défini par $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

a. Démontrer que le nombre Φ vérifie les égalités suivantes :

(*) $\Phi^2 = \Phi + 1$ (**) $\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1$ (***) $\Phi^3 = 2\Phi + 1$.

On admet que Φ est l'unique solution positive de chacune de ces équations.

b. Soit ABCD un rectangle tel que $\mathrm{AB} > \mathrm{CD}$. On considère les points E et F situés respectivement sur $[\mathrm{AB}]$ et $[\mathrm{CD}]$ et tels que ADFE est un carré.

Montrer que si le rectangle ABCD est un agrandissement du rectangle BCFE alors $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AD}} = \Phi$.
(On commencera par faire une figure).

Exercice 5 – Encadrements et racines carrées

Définition : on appelle amplitude de l'encadrement $a \leq b \leq c$ le nombre $c - a$.

On cherche à obtenir, sans calculatrice, un encadrement de $\sqrt{17}$ d'amplitude inférieure à 10^{-2}.
On sait que $6 < \sqrt{37} < 7$.

1. Montrer que $\sqrt{37} = 6 + \frac{1}{\sqrt{37}+6}$.

2. Montrer que si a et b sont deux nombres supérieurs à 6 tels que $a < \sqrt{37} < b$ alors $6 + \frac{1}{b+6} < \sqrt{37} < 6 + \frac{1}{a+6}$ et que l'amplitude de cet encadrement est inférieure à $\frac{b-a}{144}$.

3. Expliquer comment procéder pour obtenir un encadrement de $\sqrt{37}$ d'amplitude inférieure à 10^{-2}.