ACADÉMIE DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Pépinière académique de mathématiques

Année 2024-2025 **Stage « filé »**

Classe de seconde **Fiche numéro 1**

Parution lundi 18 novembre **Retour attendu pour le lundi 30 décembre**

Dans cette fiche, chaque énoncé d'exercice est précédé de quelques rappels constituant des outils pour traiter l'exercice.

Exercice 1 – Calcul littéral

Propriété : pour tous réels a et b :
$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$ et $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$
Cette propriété est très utile aussi bien pour factoriser que pour développer.
On peut notamment faire des « factorisations forcées » pour se ramener à l'une de ces égalités pour factoriser une expression.
Méthode : pour démontrer une égalité $A = B$, on peut, suivant les cas :

- montrer que $A - B = 0$
- montrer que $A = C$ et $B = C$
- transformer A pour arriver à B ou transformer B pour arriver à A.

1. Soit x et y deux réels quelconques, développer et réduire les expressions $(x+y)^3$ et $(x+y)^4$.

2. Soit a et b deux nombres tels que $b \neq 1$ et $b \neq -1$.

a. Démontrer que si x et y sont définis par $\frac{x-a}{x+a} = b$ et $\frac{y-a}{y+a} = -b$ alors $xy = a^2$.

b. On pose $m = \frac{x+y}{2}$. Montrer que $(m-x)^2 = (m-y)^2 = (m-a)(m+a)$.

3. Soit a et b deux nombres réels tels que $1+a \neq 0$ et $1+b \neq 0$.

a. Montrer que si $ab = 1$ alors $\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} = 1$.

b. La réciproque est-elle vraie ?

1. Pour tous réels x et y, $(x+y)^3 = (x+y)(x+y)^2 = (x+y)(x^2+2xy+y^2)$
Soit $(x+y)^3 = x^3+2x^2y+xy^2+yx^2+2xy^2+y^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$.
De même $(x+y)^4 = (x+y)(x+y)^3 = (x+y)(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)$ soit, en développant et regroupant
$(x+y)^4 = x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$.

2. a. $\frac{x-a}{x+a} = b$ équivaut à $x-a = b(x+a)$ soit $x(1-b) = a(1+b)$ c'est-à-dire, puisque $b \neq 1$, $x = \frac{a(1+b)}{1-b}$
et $\frac{y-a}{y+a} = -b$ équivaut à $y-a = -b(y+a)$ soit $y(1+b) = a(1-b)$ c'est-à-dire, puisque $b \neq -1$, $y = \frac{a(1-b)}{1+b}$
On en déduit $xy = \frac{a(1+b)}{1-b} \times \frac{a(1-b)}{1+b} = a^2\frac{(1-b)(1+b)}{(1+b)(1-b)} = a^2$

b. $(m-x)^2 = \left(\frac{x+y}{2}-x\right)^2 = \left(\frac{-x+y}{2}\right)^2 = \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$ et $(m-y)^2 = \left(\frac{x+y}{2}-y\right)^2 = \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$.

Et $(m-a)(m+a) = m^2-a^2 = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy = \frac{1}{4}(x^2+2xy+y^2) - xy = \frac{1}{4}(x^2+2xy+y^2-4xy)$

Soit $(m-a)(m+a) = \frac{1}{4}(x^2-2xy+y^2) = \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$

3. a. Pour tous réels a et b tels que $1+a \neq 0$ et $1+b \neq 0$, $\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} = \frac{a(1+b)+b(1+a)}{(1+a)(1+b)} = \frac{a+b+2a}{1+a+b+ab}$.
Donc si $ab = 1$ alors $\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} = \frac{a+b+2}{1+a+b+1} = 1$.

b. Réciproquement, si $\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} = 1$ ce qui équivaut à $\frac{a+b+2ab}{1+a+b+ab} = 1$ alors $a+b+2ab = 1+a+b+ab$ soit, après simplification, $ab = 1$.

Exercice 2 – Inégalités et opérations

Définition : on dit qu'un nombre a est inférieur ou égal à un nombre b lorsque $b - a \geq 0$.

Pour comparer deux nombres, on peut étudier le signe de leur différence ou appliquer l'un des théorèmes suivants.

Soit a, b, c et d des nombres réels

Théorème 1 : si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$ et si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a + c \leq b + d$.
(si $a \leq b$ alors $b - a \geq 0$ donc, comme $b - a = (b + c) - (a + c)$, $(b + c) - (a + c) \geq 0$ soit $(b + c) \geq (a + c)$)

Théorème 2 :
Si $a \leq b$ et $c \geq 0$ alors $ac \leq bc$
Si $a \leq b$ et $c \leq 0$ alors $ac \geq bc$
Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$ alors $ac \leq bd$.

Théorème 3 :
Si $0 < a \leq b$ alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} > 0$.

Théorème 4 :
Si $0 \leq a \leq b$ alors $0 \leq \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

Dans tout exercice portant sur des inégalités, on se ramène souvent à l'un au moins de ces théorèmes.

1. Démontrer le théorème 2.
2. Soit a un nombre réel tel que $a > 1$. On considère deux rectangles R_1 et R_2 dont les dimensions sont a et $\frac{1}{a}$ pour R_1, a^2 et $\frac{1}{a^2}$ pour R_2.
   a. Comparer les aires A_1 et A_2 respectivement de R_1 et R_2.
   b. Montrer que $\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) - \left(a + \frac{1}{a}\right) = \frac{(a-1)(a^3-1)}{a^2}$.
   c. Comparer les périmètres P_1 et P_2 respectifs de R_1 et R_2.
   d. Comparer les longueurs des diagonales des deux rectangles.

1. Démonstration du théorème 2 :
Si $a \leq b$ (c'est-à-dire $b - a \geq 0$) comme $bc - ac = c(b - a)$ alors :
- si $c \geq 0$ alors $c(b - a) \geq 0$ soit $ac \leq bc$
- si $c \leq 0$ alors $c(b - a) \leq 0$ soit $ac \geq bc$
et si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$, alors comme $c \geq 0$, $ac \leq bc$ et comme $b \geq 0$, $bc \leq bd$ d'où $ac \leq bc \leq bd$.

2. a. $A_1 = a \times \frac{1}{a} = 1$ et $A_2 = a^2 \times \frac{1}{a^2} = 1$ donc les deux aires sont égales.
   b. $\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) - \left(a + \frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a^2}(a^4 + 1 - a^3 - a)$. Or $(a - 1)(a^3 - 1) = a^4 - a - a^3 + 1$
   On a donc bien $\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) - \left(a + \frac{1}{a}\right) = \frac{(a-1)(a^3-1)}{a^2}$.
   c. $P_1 = 2\left(a + \frac{1}{a}\right)$ et $P_2 = 2\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)$ donc $P_2 - P_1 = 2\left(\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) - \left(a + \frac{1}{a}\right)\right) = 2\frac{(a-1)(a^3-1)}{a^2}$.
   Comme $a > 1 > 0$, $a^2 > 1^2 > 0$ soit $a^2 > 1$ et, par produit ne faisant intervenir que des nombres positifs, $a \times a^2 > 1$ soit $a^3 > 1$.
   On a donc $a - 1 > 0$ et $a^3 - 1 > 0$. On en déduit que $P_2 - P_1 > 0$ soit $P_2 > P_1$.
   d. En appliquant le théorème de Pythagore, les longueurs des diagonales des rectangles R_1 et R_2 sont respectivement $d_1 = \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}}$ et $d_2 = \sqrt{a^4 + \frac{1}{a^4}}$.
   Ces deux nombres étant positifs, les comparer revient à comparer leurs carrés $a^2 + \frac{1}{a^2}$ et $a^4 + \frac{1}{a^4}$.
   Or, en posant $b = a^2$, comme $b > 1$, on peut affirmer, en utilisant le résultat de la question précédente, $a^4 + \frac{1}{a^4} > a^2 + \frac{1}{a^2}$ donc $d_2 > d_1$.

Exercice 3 – Comparaison de fractions

Pour comparer deux nombres, on peut étudier le signe de leur différence.

Pour additionner deux fractions on se réfère aux deux propriétés suivantes :

Propriété 1 : pour tous nombres a, b et c tels que $c \neq 0, \frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$.

Propriété 2 : pour tous nombres a, b et k tels que $b \neq 0$ et $k \neq 0, \frac{a}{b}=\frac{ka}{kb}$.

Soit a, b, c et d quatre nombres strictement positifs tels que $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$. Comparer les trois nombres $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ et $\frac{a+c}{b+d}$.

$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ signifie que $\frac{c}{d}-\frac{a}{b} \geq 0$ c'est-à-dire, en réduisant les deux fractions au même dénominateur, grâce à, la propriété 2 puis en appliquant la propriété 1 (en ajoutant les numérateurs) $\frac{bc-ad}{bd} \geq 0$. Comme b et d sont strictement positifs, cela signifie que $bc-ad \geq 0$.

Comparons alors $\frac{a+c}{b+d}$ et $\frac{a}{b}$ en étudiant le signe de leur différence.

$\frac{a+c}{b+d}-\frac{a}{b}=\frac{(a+c)b-a(b+d)}{b(b+d)}=\frac{ab+cb-ab-a}{b(b+d)}=\frac{cb-ad}{b(b+d)}$

Or $bc-ad \geq 0$ et $b>0, d>0$ donc $b(b+d)>0$ d'où $\frac{bc-a}{b(b+d)} \geq 0$ c'est-à-dire $\frac{a+c}{b+d} \geq \frac{a}{b}$.

Comparons de même $\frac{a+c}{b+d}$ et $\frac{c}{d}$ en étudiant le signe de leur différence.

$\frac{a+c}{b+d}-\frac{c}{d}=\frac{(a+c)d-(b+d)c}{d(b+d)}=\frac{ad+cd-bc-cd}{d(b+d)}=\frac{ad-bc}{d(b+d)}=-\frac{bc-ad}{d(b+d)}$

Or $bc-ad \geq 0$ et $b>0, d>0$ donc $b(b+d)>0$ d'où $-\frac{bc-ad}{d(b+d)} \leq 0$ c'est-à-dire $\frac{a+c}{b+d} \leq \frac{c}{d}$.

On a donc $\frac{a}{b} \leq \frac{a+c}{b+d} \leq \frac{c}{d}$.

Exercice 4 – Multiples et diviseurs

Définition : On dit qu'un nombre entier a est un *multiple* d'un nombre entier b s'il existe un nombre entier k tel que $a=kb$.

On dit alors que b est un *diviseur* de a ou que a est *divisible* par b.

Dans les exercices mieux vaut se ramener à la définition en termes de « multiple de » pour éviter d'écrire des quotients.

Définition : un nombre entier naturel est dit premier lorsqu'il a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Théorème (division euclidienne) : soit a et b deux entiers naturels tels que $b \neq 0$, alors il existe un unique couple (q, r) d'entiers naturels tels que $a=bq+r$ et $0 \leq r<b$.

1. **a.** Montrer que la somme de deux nombres impairs consécutifs est un multiple de 4.
   b. Montrer qu'un entier est pair si et seulement si son carré est un entier pair.

4. Soit A un entier dont l'écriture décimale est $\overline{cdu}$, c'est-à-dire $A=100c+10d+u$.
   a. Montrer que si $d=c+u$ alors A est divisible par 11.
   b. Montrer que si $c+d+u=9$ alors A est divisible par 9.

5. Montrer que pour tout entier n, le produit $n(n^4-1)$ est un multiple de 5.
   (on pourra étudier les restes dans les divisions euclidiennes de n par 5).

1. **a.** Un nombre n est impair s'il existe un entier k tel que $n=2k+1$. Deux entiers impairs consécutifs peuvent donc s'écrire $2k+1$ et $2k+3$. Leur somme s'écrit $S=2k+1+2k+3=4k+4=4(k+1)$.
   b. Si n est un entier pair, alors il existe un entier k tel que $n=2k$. On en déduit que $n^2=4k^2=2\times 2k^2$ et donc n^2 est pair.
   Réciproquement, soit n un entier dont le carré est pair. Si n était impair, il existerait un entier k tel que $n=2k+1$ et alors $n^2=(2k+1)^2=2(2k^2+2k)+1$. Comme $2k^2+2k$ est un entier, n^2 serait un nombre impair, ce qui contredit l'hypothèse de départ « n^2 est pair ». Donc n est pair.

2. **a.** Si $d = c + u$ alors $A = 100c + 10c + 10u + u = 110c + 11u = 11(10c + u)$ d'où A est divisible par 11.
   b. Si $c + d + u = 9$, alors $A = 99c + c + 9d + d + u = 9(11c + d + 1)$ d'où A est divisible par 9.
3. Pour tout entier n, $N = n(n^4 - 1) = n(n-1)(n+1)(n^2+1)$. S'il existe un entier k tel que :
   - $n = 5k$ alors n est multiple de 5 donc N est aussi multiple de 5
   - $n = 5k + 1$ alors $n - 1$ est multiple de 5 donc N est aussi multiple de 5
   - $n = 5k + 2$ alors $n^2 + 1 = (5k+2)^2 + 1 = 25k^2 + 20k + 4 + 1 = 5(5k^2 + 4k + 1)$ qui est multiple de 5 donc N est aussi multiple de 5
   - $n = 5k + 3$ alors $n^2 + 1 = (5k+3)^2 + 1 = 25k^2 + 30k + 9 + 1 = 5(5k^2 + 6k + 2)$ qui est multiple de 5 donc N est aussi multiple de 5
   - $n = 5k + 4$ alors $n + 1 = 5k + 5$ qui est multiple de 5 donc N est aussi multiple de 5.

Exercice 5 Racines carrées

Théorème : Pour tous nombres réels **positifs ou nuls** a et b :
- $\sqrt{a^2} = a$;
- $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$. En particulier $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$;
- $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Ce théorème est à la base de nombreux calculs sur les racines carrées.

1. Soit le nombre $A = \sqrt{7 + 2\sqrt{6}} - \sqrt{7 - 2\sqrt{6}}$.
   a. Quel résultat affiche la calculatrice pour ce nombre ?
   b. Calculer la valeur exacte du nombre $B = \sqrt{\left(7 + 2\sqrt{6}\right)\left(7 - 2\sqrt{6}\right)}$.
   c. En déduire la valeur exacte du nombre A.
2. Montrer que pour tout $k \in \{1,2,3,4,5\}$, il existe un entier n tel que $\left(1+\sqrt{2}\right)^k = \sqrt{n} + \sqrt{n+1}$.

1. **a.** La calculatrice affiche 2 comme valeur approchée du nombre A.
   b. $B = \sqrt{7^2 - \left(2\sqrt{6}\right)^2} = \sqrt{49 - 4 \times 6} = \sqrt{25} = 5$.
   c. Le nombre A est positif et, pour calculer sa valeur exacte, on va d'abord calculer son carré.

$$A^2 = \left(\sqrt{7+2\sqrt{6}} - \sqrt{7-2\sqrt{6}}\right)^2 = \left(\sqrt{7+2\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\sqrt{7-2\sqrt{6}}\right)^2 - 2\sqrt{7+2\sqrt{6}}\sqrt{7-2\sqrt{6}}$$

   Soit $A^2 = 7 + 2\sqrt{6} + 7 - 2\sqrt{6} - 2B = 14 - 10 = 4$
   Comme $A > 0$, on en déduit que la valeur exacte de A est 2.

2. Pour $k = 1$, $1 + \sqrt{2} = \sqrt{1} + \sqrt{2}$

Pour $k = 2$, $\left(1+\sqrt{2}\right)^2 = 1 + 2 + 2\sqrt{2} = 3 + 2\sqrt{2} = \sqrt{9} + \sqrt{8}$

Pour $k = 3$, $\left(1+\sqrt{2}\right)^3 = \left(1+\sqrt{2}\right)^2\left(1+\sqrt{2}\right) = \left(3+2\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right) = 3 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\sqrt{2}$

Soit $\left(1+\sqrt{2}\right)^3 = 3 + 2 \times 2 + 5\sqrt{2} = 7 + \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{49} + \sqrt{50}$.

Pour $k = 4$, $\left(1+\sqrt{2}\right)^4 = \left(1+\sqrt{2}\right)^3\left(1+\sqrt{2}\right) = \left(7+5\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right) = 7 + 5\sqrt{2} + 7\sqrt{2} + 5\sqrt{2}\sqrt{2}$

Soit $\left(1+\sqrt{2}\right)^4 = 17 + 12\sqrt{2} = \sqrt{289} + \sqrt{288}$

Pour $k = 5$, $\left(1+\sqrt{2}\right)^5 = \left(1+\sqrt{2}\right)^4\left(1+\sqrt{2}\right) = \left(17+12\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right) = \cdots = 41 + 29\sqrt{2} = \sqrt{1\,681} + \sqrt{1\,682}$