ACADÉMIE
DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Pépinière académique de mathématiques

Année 2025-2026 **Stage « filé »**

Classe de seconde **Fiche numéro 1**

Parution lundi 17 novembre **Retour attendu pour le lundi 8 décembre**

Dans cette fiche, chaque énoncé d'exercice est précédé de quelques rappels constituant des outils pour traiter l'exercice.

Exercice 1 – Calcul littéral

Propriété : pour tous réels a et b :

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ et $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Cette propriété est très utile aussi bien pour factoriser que pour développer.

On peut notamment faire des « factorisations forcées » pour se ramener à l'une de ces égalités pour factoriser une expression.

Méthode : pour démontrer une égalité $A = B$, on peut, suivant les cas :

- montrer que $A - B = 0$
- montrer que $A = C$ et $B = C$
- transformer A pour arriver à B ou transformer B pour arriver à A.

1. Soit x et y deux réels non nuls. On pose $a = x + \frac{1}{x}$, $b = y + \frac{1}{y}$ et $c = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$.

a. Exprimer en fonction de a les nombres $x^2 + \frac{1}{x^2}$, $x^3 + \frac{1}{x^3}$ et $x^4 + \frac{1}{x^4}$.

b. Démontrer que $a^2 + b^2 + c^2 = abc + 4$.

2. Soit a, b et c trois réels

a. Développer les trois expressions $A = (a+b+c)(ab+bc+ca)$, $B = (a+b+c)^2$, $C = (a+b+c)^3$.

b. Démontrer que si $a+b+c = 0$, alors $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

1. a. On cherche à faire apparaitre les puissances de a :

$a^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2x \times \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$, ce qui s'écrit aussi $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = a^2 - 2$.

$a^3 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + 3x^2\frac{1}{x} + 3x\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^3$ d'après la question 1., soit $a^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3x + \frac{3}{x}$

Ceci s'écrit aussi $x^3 + \frac{1}{x^3} = a^3 - 3a$.

$a^4 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^4 = x^4 + 4x^3\frac{1}{x} + 6x^2\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 4x\left(\frac{1}{x}\right)^3 + \left(\frac{1}{x}\right)^4$, d'après la question 1.,

Soit $a^4 = x^4 + \frac{1}{x^4} + 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 6 = x^4 + \frac{1}{x^4} + 4(a^2 - 2) + 6$

soit $x^4 + \frac{1}{x^4} = a^4 - 4(a^2 - 2) - 6 = a^4 - 4a^2 + 2$.

b. On montrerait de même que $b^2 = y^2 + \frac{1}{y^2} + 2$ et $c^2 = \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 2$.

On en déduit : $a^2 + b^2 + c^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + y^2 + \frac{1}{y^2} + \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 6$.

D'autre part, $abc + 4 = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right)\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 4 = \left(xy + \frac{y}{x} + \frac{x}{y} + \frac{1}{xy}\right)\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 4$

Soit $abc + 4 = x^2 + 1 + \frac{x^2}{y^2} + \frac{1}{y^2} + y^2 + \frac{y^2}{x^2} + 1 + \frac{1}{x^2} + 4 = x^2 + \frac{1}{x^2} + y^2 + \frac{1}{y^2} + \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 6$.

On en déduit que : $a^2 + b^2 + c^2 = abc + 4$.

2. a. $A = (a+b+c)(ab+bc+ca) = a^2b + abc + aca + bab + b^2c + bca + cab + cbc + c^2a$

soit $A = a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 + 3abc$.

$B = (a+b+c)(a+b+c) = a^2 + ab + ac + ba + b^2 + bc + ca + cb + c^2$

soit $B = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$.

$C = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca)$

soit $C = a^3 + ab^2 + ac^2 + 2a^2b + 2abc + 2aca + ba^2 + b^3 + bc^2 + 2bab + 2b^2c + 2bca + ca^2 + cb^2 + c^3 + 2cab + 2cbc + 2c^2a$

soit $C = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2) + 6abc$
soit $C = a^3 + b^3 + c^3 + 3(A - 3abc) + 6abc = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b + c)(ab + bc + ca) - 3abc.$
On a donc :
$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b + c)(ab + bc + ca) - 3abc.$
On en déduit que si $a + b + c = 0$ alors $0 = a^3 + b^3 + c^3 + 0 - 3abc$ c'est-à-dire $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Exercice 2 – Un peu d'arithmétique

Définition : On dit qu'un nombre entier a est un *multiple* d'un nombre entier b s'il existe un nombre entier k tel que $a = kb$.
On dit alors que b est un *diviseur* de a ou que a est *divisible* par b.
Dans les exercices mieux vaut se ramener à la définition en termes de « multiple de » pour éviter d'écrire des quotients.

Définition : un nombre entier naturel est dit premier lorsqu'il a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Théorème (division euclidienne) : soit a et b deux entiers naturels tels que $b \neq 0$, alors il existe un unique couple (q, r) d'entiers naturels tels que $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$.

1. Montrer que le produit de trois entiers naturels consécutifs est un multiple de 3.
2. Déterminer trois entiers consécutifs dont la somme est égale à 2 025. Peut-on faire de même en remplaçant 2 025 par 2 026 ?
3. Déterminer quatre entiers impairs consécutifs dont la somme est égale à 2 024. Est-ce possible avec 2 025 ?

1. Dans la division euclidienne d'un entier naturel par 3, le reste vaut 0, 1 ou 2 (il est positif et strictement inférieur à 3). Soit n un entier naturel et r le reste dans la division euclidienne de n par 3 alors :
   - Si $r = 0$ alors il existe k tel que $n = 3k$ et alors $n(n + 1)(n + 2) = 3 \times k(n + 1)(n + 2)$ donc le produit n$(n + 1)(n + 2)$ est un multiple de 3.
   - Si $r = 1$ alors il existe k tel que n$= 3k + 1$ et alors $n + 2 = 3(k + 1)$ donc $n(n + 1)(n + 2) = 3 \times (k + 1)n(n + 1)$ donc le produit n$(n + 1)(n + 2)$ est un multiple de 3.
   - Si $r = 2$ alors il existe k tel que $n = 3k + 2$ et alors $x + 1 = 3(k + 1)$ donc $n(n + 1)(n + 2) = 3 \times (k + 1)n(n + 2)$ donc le produit n$(n + 1)(n + 2)$ est un multiple de 3.
2. Pour faciliter les calculs et parce que 3 est un nombre, impair, on note $n - 1, n, n + 1$ les trois entiers consécutifs. On cherche n tel que $(n - 1) + n + (n + 1) = 2\,025$ soit $3n = 2\,025$ soit $n = 675$. Les trois entiers cherchés sont donc 674, 675, 676.
   Il n'y a pas de solution si on remplace 2 025 par 2 026 car la somme doit être un multiple de 3 (on a trouvé $3n$) et 2 026 n'est pas un multiple de 3.
3. On note cette fois-ci notre quatre entiers consécutifs $2n - 3, 2n - 1, 2n + 1, 2n + 3$ et on cherche n tel que $(2n - 3) + (2n - 1) + (2n + 1) + (2n + 3) = 2\,024$ soit $8n = 2\,014$ soit $n = 243$.
   Il n'y a pas de solution si on remplace 2 024 par 2 025 car la somme doit être un multiple de 8 (on a trouvé $8n$) et 2 025 n'est pas un multiple de 8.

Inégalités et opérations

Définition : on dit qu'un nombre a est inférieur ou égal à un nombre b lorsque $b - a \geq 0$.

Pour comparer deux nombres, on peut étudier le signe de leur différence ou appliquer l'un des théorèmes suivants.

Soit a, b, c et d des nombres réels
Théorème 1 : si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$ et si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a + c \leq b + d$.
(si $a \leq b$ alors $b - a \geq 0$ donc, comme $b - a = (b + c) - (a + c)$, $(b + c) - (a + c) \geq 0$
soit $(b + c) \geq (a + c)$)
Théorème 2 :
Si $a \leq b$ et $c \geq 0$ alors $ac \leq bc$
Si $a \leq b$ et $c \leq 0$ alors $ac \geq bc$
Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$ alors $ac \leq bd$.
Théorème 3 :

Si $0 < a \leq b$ alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} > 0$.

Théorème 4 :

Si $0 \leq a \leq b$ alors $0 \leq \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

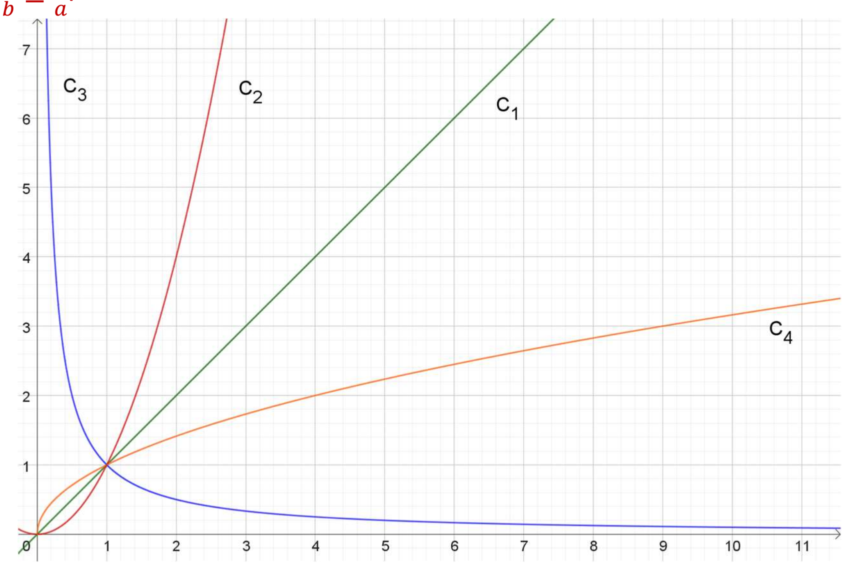
Dans tout exercice portant sur des inégalités, on se ramène souvent à l'un au moins de ces théorèmes.

Exercice 3 – Comparaisons de nombres

1. Démontrer le théorème 3.
2. Ranger dans l'ordre croissant les nombres $a, a^2, \frac{1}{a}$ et $\sqrt{a}$:
   a. Si $a > 1$ b. si $0 < a < 1$.
3. a. Soit n un entier naturel non nul et p un entier tel que $1 \leq p \leq n$. Comparer les nombres $\frac{1}{n+p}$ et $\frac{1}{2n}$.
   b. En déduire que $\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1} + \cdots + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{2}$.

1. On suppose que $0 < a \leq b$. Alors d'une part, des nombres non nuls ayant le même signe que leurs inverses, les nombres $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$ sont positifs. De plus, $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab}$. Comme $0 < a \leq b$, d'une part, $ab > 0$ et, d'autre part $a - b \leq 0$ donc $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \geq 0$ c'est-à-dire $\frac{1}{b} \geq \frac{1}{a}$.

2. Pour avoir une idée de l'ordre dans lequel on va ranger ces nombres, on peut commencer par représenter sur l'intervalle $]0, +\infty[$, les fonctions associées :
$f_1 : x \mapsto x$,
$f_2 : x \mapsto x^2$,
$f_3 : x \mapsto \frac{1}{x}$,
$f_4 : x \mapsto \sqrt{x}$



a. Si $a > 1$, montrons que $\frac{1}{a} < \sqrt{a} < a < a^2$.
$a^2 - a = a(a-1)$. Comme $a > 1 > 0$, on a bien $a < a^2$.
$a - \sqrt{a} = \sqrt{a}(\sqrt{a} - 1)$. Comme $a > 1 > 0$, $\sqrt{a} > 0$ et $\sqrt{a} > 1$ (théorème 4), on a bien $\sqrt{a} < a$.
Comme $a > 1 > 0$, $\sqrt{a} > 1$ et $\frac{1}{a} < 1$ (théorème 3), on a $\frac{1}{a} < 1 < \sqrt{a}$.

b. Si $0 < a < 1$, montrons que $a^2 < a < \sqrt{a} < \frac{1}{a}$.
Comme $0 < a < 1$, $0 < \sqrt{a} < 1$ (théorème 4) et $1 < \frac{1}{a}$ (théorème 3) donc $\sqrt{a} < \frac{1}{a}$.
$\sqrt{a} - a = \sqrt{a}(1 - \sqrt{a})$. Comme $0 < \sqrt{a} < 1$, on a bien $a < \sqrt{a}$.
$a - a^2 = a(1-a)$. Comme $0 < a < 1$, on a bien $a^2 < a$.

3. a. Si $1 \leq p \leq n$ alors $0 < n + p \leq 2n$ et, d'après le théorème 3, $\frac{1}{n+p} \geq \frac{1}{2n}$.
   b. On ajoute membre à membre les n inégalités en prenant successivement $p = 1, p = 2, \ldots, p = n$
   On obtient alors $\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1} + \cdots + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+1} \geq \underbrace{\frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ termes}}$ soit $\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1} + \cdots + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+1} \geq \frac{n}{2n}$
   c'est-à-dire $\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1} + \cdots + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{2}$.

Exercice 4 – Le nombre d'or

Théorème : Pour tous nombres réels **positifs ou nuls** a et b :

- $\sqrt{a^2} = a$;
- $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$. En particulier $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$;
- $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Ce théorème est à la base de nombreux calculs sur les racines carrées.

1. Montrer que pour tout nombre réel x positif, $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$.

2. On appelle nombre d'or le nombre Φ défini par $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

a. Démontrer que le nombre Φ vérifie les égalités suivantes :

(*) $\Phi^2 = \Phi + 1$ (**) $\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1$ (***) $\Phi^3 = 2\Phi + 1$.

On admet que Φ est l'unique solution positive de chacune de ces équations.

b. Soit ABCD un rectangle tel que $\mathrm{AB} > \mathrm{CD}$. On considère les points E et F situés respectivement sur $[\mathrm{AB}]$ et $[\mathrm{CD}]$ et tels que ADFE est un carré.

Montrer que si le rectangle ABCD est un agrandissement du rectangle BCFE alors $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AD}} = \Phi$.

(On commencera par faire une figure).

1. Pour tout nombre réel x positif, $\sqrt{1+x}$ et $1 + \frac{x}{2}$ sont des nombres positifs. Les comparer revient donc à comparer leurs carrés. On étudie donc le signe de la différence de ces carrés.

$\left(1+\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{1+x}\right)^2 = 1 + \frac{x^2}{4} + 2 \times \frac{x}{2} - 1 - x = \frac{x^2}{4}$. Comme un carré est toujours positifs ou nul, $\left(1+\frac{x}{2}\right)^2 \geq \left(\sqrt{1+x}\right)^2$ d'où on déduit que $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$.

2. a. $\Phi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1+5+2\sqrt{5}\right) = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = \Phi + 1$ d'où la relation (*).

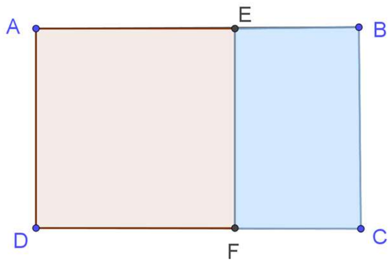
En divisant les deux membres de l'égalité (*) par Φ, qui est bien non nul, on aboutit à $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$ soit $\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1$ soit (**).

$\Phi^3 = \Phi^2 \times \Phi = (\Phi + 1)\Phi = \Phi^2 + \Phi = \Phi + 1 + \Phi = 2\Phi + 1$ soit (***).

Si le rectangle ABCD est un agrandissement du rectangle BCFE, alors leurs dimensions sont proportionnelles, c'est-à-dire $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CF}} = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AB-DF}} = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AB-AD}}$.

Ceci s'écrit aussi $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AD}} = \frac{1}{\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AD}}-1}$ soit $\left(\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AD}}\right)^2 - \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AD}} = 1$ soit $\left(\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AD}}\right)^2 = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AD}} + 1$.

Le nombre $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AD}}$ vérifie donc l'égalité (*) et est positif. Comme on a admis que Φ est l'unique solution positive de chacune des équations du **a.**, en particulier de (*), on a donc bien $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AD}} = \Phi$.



Exercice 5 – Encadrements et racines carrées

Définition : on appelle amplitude de l'encadrement $a \leq b \leq c$ le nombre $c - a$.

On cherche à obtenir, sans calculatrice, un encadrement de $\sqrt{17}$ d'amplitude inférieure à 10^{-2}.

On sait que $6 < \sqrt{37} < 7$.

1. Montrer que $\sqrt{37} = 6 + \frac{1}{\sqrt{37}+6}$.

2. Montrer que si a et b sont deux nombres supérieurs à 6 tels que $a < \sqrt{37} < b$ alors $6 + \frac{1}{b+6} < \sqrt{37} < 6 + \frac{1}{a+6}$ et que l'amplitude de cet encadrement est inférieure à $\frac{b-a}{144}$.

3. Expliquer comment procéder pour obtenir un encadrement de $\sqrt{37}$ d'amplitude inférieure à 10^{-2}.

1. $\sqrt{37} - 6 = \frac{(\sqrt{37}-6)(\sqrt{37}+6)}{\sqrt{37}+6} = \frac{\left(\sqrt{37}\right)^2-36}{\sqrt{37}+6} = \frac{37-3}{\sqrt{37}+6}$ soit $\sqrt{37} = \frac{1}{\sqrt{37}+6}$.

2. Si $a < \sqrt{37} < b$ alors $0 < a + 6 < \sqrt{37} + 6 < b + 6$ (théorème 1 sur les inégalités)

d'où $\frac{1}{b+6} < \frac{1}{\sqrt{37}+6} < \frac{1}{a+6}$ (théorème 3 sur les inégalités)
et donc $6 + \frac{1}{b+6} < 6 + \frac{1}{\sqrt{37}+6} < 6 + \frac{1}{a+6}$ soit, d'après le **1.**, $6 + \frac{1}{b+6} < \sqrt{37} < 6 + \frac{1}{a+6}$.
L'amplitude de cet encadrement est $\left(6 + \frac{1}{a+6}\right) - \left(6 + \frac{1}{b+6}\right) = \frac{1}{a+6} - \frac{1}{b+6} = \frac{b+6-a-6}{(a+6)(b+6)} = \frac{b-a}{(a+6)(b+6)}$.
Comme $a \geq 6$ et $b > a$, $a + 6 \geq 12 > 0$ et $b + 6 > 12 > 0$ d'où $(a+6)(b+6) > 144$ (Théorème 2 sur les inégalités).
On en déduit que l'encadrement une amplitude inférieure à $\frac{b-a}{144}$.

3. Il suffit de prendre $a = 6$ et $b = 7$ alors $\frac{b-a}{144} < 10^{-2}$ et un encadrement répondant à la question est $6 + \frac{1}{b+6} < \sqrt{37} < 6 + \frac{1}{a+6}$ soit $6 + \frac{1}{13} < \sqrt{37} < 6 + \frac{1}{12}$.