Pépinière académique de mathématiques

Année 2023-2024 **Stage « filé »**

Classe de seconde **Fiche numéro 2**

Parution lundi 15 janvier **Retour attendu pour le jeudi 1er février**

Exercice 1 – Encadrements et valeurs approchées

Définition : on dit qu'un nombre a est inférieur ou égal à un nombre b lorsque $b - a \geq 0$.

Cette définition conduit à une **méthode pratique pour comparer deux nombres**.

Pour tout exercice portant sur des inégalités, on peut aussi s'appuyer sur les théorèmes ci-dessous.

Soit a, b, c et d des nombres réels

Théorème 1 : si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$ et si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a + c \leq b + d$.

(si $a \leq b$ alors $b - a \geq 0$ donc, comme $b - a = (b + c) - (a + c)$, $(b + c) - (a + c) \geq 0$

C'est-à-dire $(b + c) \geq (a + c)$)

Théorème 2 :

Si $a \leq b$ et $c \geq 0$ alors $ac \leq bc$

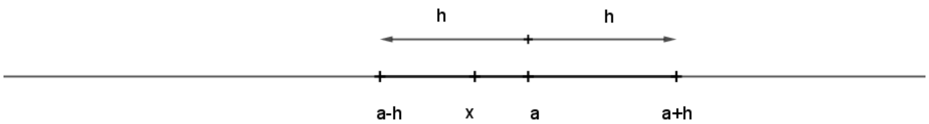
Si $a \leq b$ et $c \leq 0$ alors $ac \geq bc$

Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$ alors $ac \leq bd$.

Théorème 3 :

Si $0 < a \leq b$ alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} > 0$.

Définition : soit a et x deux nombres réels et soit h un réel strictement positif. On dit que a est une valeur approchée de x à la précision h (ou « à h près ») lorsque $a - h < x < a + h$.



On obtient un encadrement de x de longueur $2h$.

1. Montrer que pour tout réel $x \neq -1$, $\frac{1}{1+x} = 1 - x + \frac{x^2}{1+x}$.
2. On suppose que $x \in \left[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right]$. En déduire
   - ***a.*** Un encadrement de x^2.
   - ***b.*** Un encadrement de $1 + x$ puis de $\frac{1}{1+x}$.
   - ***c.*** Démontrer que $0 \leq \frac{x^2}{1+x} \leq \frac{10x^2}{9}$.
3. Montrer que $1 - x$ est une valeur approchée de $\frac{1}{1+x}$ et indiquer la précision de cette approximation.
4. Application : donner, sans utiliser une calculatrice, une valeur approchée de
   - ***a.*** $\frac{1}{1,00005}$ à 3×10^{-9} près
   - ***b.*** $\frac{1}{0,99995}$ à 3×10^{-9} près

Exercice 2 – Un peu de logique

Quelques rappels : soit A et B deux phrases

Si lorsque A est vérifiée alors B est automatiquement vérifiée, on dit que ***A* implique *B*** et on note $A \Longrightarrow B$.

La réciproque de cette implication est ***B* implique A** et on note $B \Longrightarrow A$.

Lorsque les deux implications sont vraies on dit que ***A* et *B* sont équivalentes** et on note $A \Longleftrightarrow B$.

Par exemple, soit A : « le nombre réel x est tel que $x = 1$ » et B : « le nombre réel x est tel que $x^2 = 1$ ».

On a bien $A \Longrightarrow B$ mais pas $B \Longrightarrow A$ car le carré de -1 vaut aussi 1.

En revanche soit A : « le nombre réel x appartient à $\{-1,1\}$ » et B : « le nombre réel x est tel que $x^2 = 1$ ».

On a à la fois $A \Longrightarrow B$ et $B \Longrightarrow A$ puisque les solutions de l'équation $x^2 = 1$ sont -1 et 1 donc $A \Longleftrightarrow B$.

Dans chacun des cas suivants, déterminer si A implique B, écrire la réciproque de cette implication et déterminer si cette réciproque est vraie.

1. A : « le quadrilatère MNPQ est un rectangle » et :
   - ***a.*** B_1 : « les diagonales du quadrilatère MNPQ se coupent en leur milieu »
   - ***b.*** B_2 : « les diagonales du quadrilatère MNPQ se coupent en leur milieu et ont même longueur ».
2. A : « le nombre réel x est tel que $x^2 \leq 4$ »

   a. B_1 : « le nombre réel x est tel que $x \in [0,2]$ »
   b. B_2 : « le nombre réel x est tel que $x \in [-2,2]$ ».
3. A : « l'entier naturel n est un multiple de 6 »
   a. B_1 : « l'entier naturel n est un multiple de 3 »
   b. B_2 : « la somme des chiffres de l'entier naturel n est un multiple de 3 »
   c. B_3 : « la somme des chiffres de l'entier naturel n est un multiple de 3 et l'entier n est pair ».

Exercice 3 – Extremum d'une fonction

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f admet sur I un maximum (respectivement un minimum) en x_0 lorsque pour tout réel x de I, $f(x) \leq f(x_0)$ (respectivement $f(x) \geq f(x_0)$).
Dans les deux cas, on dit que la fonction f admet sur I un extremum.

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x + \frac{4}{x}$.

1. Représenter la fonction f, à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel, et conjecturer un extremum de la fonction f sur $]0,+\infty[$.
2. Démontrer cette conjecture.

Exercice 4 – Arithmétique et nombres premiers

Définition : On dit qu'un nombre entier a est un *multiple* d'un nombre entier b s'il existe un nombre entier k tel que $a = kb$.
On dit alors que b est un *diviseur* de a ou que a est *divisible* par b.
Dans les exercices c'est à la définition en termes de « multiple de » à laquelle il vaut mieux se ramener pour éviter d'écrire des quotients.

Définition : un nombre entier naturel est dit premier lorsqu'il a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.
Définition : deux nombres entiers sont dits premiers entre eux lorsque leur seul diviseur commun positif est 1.
On admettra le théorème suivant :
Théorème : Si un nombre est multiple de nombres premiers entre eux alors il est multiple du produit de ces nombres.

Théorème (division euclidienne): soit a et b deux entiers naturels tels que b est non nul, alors il existe un unique couple (q,r) d'entiers naturels tels que $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$.

1. Soit a, b et c trois entiers naturels. Montrer que si c est un diviseur de a et de b, alors il divise $a + b$. La réciproque est elle-vraie ?
2. Soit p un nombre premier. On considère le produit $P = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \ldots \times p$ de tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à p.
   a. Montrer que $P + 2, P + 3, P + 4, \ldots, P + p$ ne sont pas des nombres premiers.
   b. En déduire un exemple de 20 nombres consécutifs non premiers.
3. Montrer que si p est un nombre premier tel que $p \geq 5$, alors $p^2 - 1$ est divisible par 24.
   (On pourra étudier les restes de la division euclidienne de p par 4 et par 6)

Exercice 5 – Triangle rectangle et cercle

Pour déterminer la nature d'un triangle ou d'un quadrilatère, on fait appel aux caractérisations d'un triangle particulier (isocèle, équilatéral, rectangle, isocèle rectangle) ou d'un quadrilatère particulier (parallélogramme, rectangle, losange, carré) en étant le plus précis possible.

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre I. On considère deux points A et B diamétralement opposés sur ce cercle et un point C, distinct de A et B, sur le cercle $\mathcal{C}$.

1. Soit D le point diamétralement opposé à C sur $\mathcal{C}$. Déterminer la nature du quadrilatère ADBC.
2. En déduire la nature du triangle ABC.

Exercice 6 – Hauteurs concourantes

Au collège, on démontre que les médiatrices des côtés d'un triangle sont concourantes.

Théorème (à démontrer dans la suite) : les trois hauteurs du triangle ABC sont concourantes.

Le point de concours des hauteurs d'un triangle est appelé orthocentre du triangle

Soit ABC un triangle. On note respectivement D, E et F les pieds des hauteurs issues de A, B et C dans le triangle ABC.

1. On considère les droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ parallèles respectivement à (BC), (CA) et (AB) et passant respectivement par A, B et C. Les droites $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ se coupent en A', les droites $\mathcal{D}_3$ et $\mathcal{D}_1$ se coupent en B' et les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ se coupent en C'. Déterminer la nature du quadrilatère ABCB'.
2. Montrer que la droite (AD) est la médiatrice du segment [B'C'].
3. En déduire que les hauteurs du triangle ABC sont concourantes.

Application

On reprend les notations précédentes dans un triangle ABC. On note H l'orthocentre du triangle.

4. En considérant plusieurs triangles semblables, montrer l'égalité $\mathrm{AD} \times \mathrm{DH} = \mathrm{BD} \times \mathrm{CD}$.
5. Démontrer que $\mathrm{AD} \times AH = \mathrm{AB} \times AF = \mathrm{AC} \times A\mathrm{E}$.