Pépinière académique de mathématiques

Année 2024-2025 **Stage « filé »**

Classe terminale **Fiche numéro 3**

Parution lundi 3 mars **Retour attendu pour le lundi 24 mars**

Exercice 1 – Suite de fonctions

Connaissances requises : toutes les connaissances sur l'exponentielle et le logarithme (limites, dérivée, variations, propriétés algébriques)

Les questions faisant intervenir les suites nécessitent les connaissances sur les limites par comparaison ou par encadrement.

On pourra faire usage du théorème des valeurs intermédiaires et de ses corollaires relatifs aux fonctions strictement monotones.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on définit dans l'intervalle $]0, +\infty[$ la fonction $f_n : x \mapsto \frac{\ln(1+x^n)}{x}$.

Pour les questions 1 à 4, on fixe un entier n supérieur ou égal à 2.

1. On fixe un entier n supérieur ou égal à 2.
   a. Déterminer $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x^n)}{x^n}$. En déduire que la fonction f_n admet en 0 une limite que l'on précisera.
   b. Montrer que la fonction f_n admet en $+\infty$ une limite que l'on déterminera.
2. Calculer la dérivée de la fonction f_n sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et montrer que, pour tout réel $x > 0$, on peut écrire $f_n'(x) = \frac{g_n(x)}{x^2(1+x^n)}$
   où g_n désigne la fonction $x \mapsto nx^n - (1+x^n)\ln(1+x^n)$.
3. Etude du signe de la fonction g_n
   a. Calculer la fonction dérivée de g_n.
   b. Résoudre l'équation $g_n'(x) = 0$ et montrer qu'elle admet pour unique solution $a_n = e^{\frac{1}{n}ln(e^{n-1}-1)}$.
   c. Etudier le signe de g_n'.
   d. Montrer que $g_n(\mathrm{e}) < 0$ et déterminer $\lim_{x\to 0^+} g_n(x)$
   e. Etablir le tableau de variation de la fonction g_n sur $]0, +\infty[$ et montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une unique solution b_n, cette solution appartenant à l'intervalle $]a_n, \mathrm{e}[$.
4. Etablir le tableau de variation de la fonction f_n.
5. **a.** Montrer que la suite (b_n) converge vers un réel que l'on précisera.
   b. On désigne par M_n le maximum de la fonction f_n. Montrer que la suite (M_n) admet une limite que l'on déterminera.
6. Construire à l'aide d'un logiciel de géométrie la courbe C_n de la fonction f_n pour les valeurs de n allant de à 2 à 10.
   Montrer qu'il existe un point A dont on calculera les coordonnées appartenant à toutes les courbe C_n.

1. **a.** $\lim_{x\to 0} x^n = 0$ et $\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$ donc par composition $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x^n)}{x^n} = 1$
   $f_n(x) = \frac{\ln(1+x^n)}{x^n} \times x^{n-1}$; puisque $n \geq 2$, alors $n - 1 > 0$ donc $\lim_{x\to 0} x^{n-1} = 0$. D'après le théorème de limite d'un produit dans le cas de limites réelles, on en déduit $\lim_{x\to 0^+} f_n(x) = 1 \times 0 = 0$
   b. $f_n(x) = \frac{ln\left(x^n\left(1+\frac{1}{x^n}\right)\right)}{x} = \frac{ln(x^n)+ln\left(1+\frac{1}{x^n}\right)}{x} = \frac{nln(x)}{x} + \frac{ln\left(1+\frac{1}{x^n}\right)}{x}$ d'après les propriétés algébriques du logarithme.
   On connaît $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et par composition $\lim_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^n}\right) = 0$, puis par produit $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{x^n}\right) = 0$.
   On en déduit par somme $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$
2. On applique le théorème de dérivation du quotient de fonctions dérivables :

$u(x) = \ln(1+x^n)$; $u'(x) = \frac{nx^{n-1}}{1+x^n}$

$v(x) = x$; $v'(x) = 1$

$\forall x \in \,]0, +\infty[, f_n'(x) = \frac{x \times \frac{nx^{n-1}}{1+x^n} - 1 \times \ln(1+x^n)}{x^2} = \frac{nx^n - (1+x^n)\ln(1+x^n)}{x^2(1+x^n)}$

3. a. $\forall x \in \,]0\,;+\infty[, g'_n(x) = n^2x^{n-1} - \left[nx^{n-1}ln(1+x^n) + (1+x^n) \times \frac{nx^{n-1}}{1+x^n}\right]$

soit $g'_n(x) = n^2x^{n-1} - nx^{n-1}ln(1+x^n) - nx^{n-1}$ c'est-à-dire $g'_n(x) = nx^{n-1}(n-1-ln(1+x^n))$.

b. $\forall x \in \,]0, +\infty[, g'_n(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(1+x^n) = n-1 \Leftrightarrow 1+x^n = e^{n-1} \Leftrightarrow x^n = e^{n-1} - 1 \Leftrightarrow e^{nln(x)} = e^{n-1} - 1$

$\forall x \in \,]0\,;+\infty[, g'_n(x) = 0 \Leftrightarrow nln(x) = ln(e^{n-1} - 1) \Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{n}ln(e^{n-1}-1)}$

L'équation admet bien pour unique solution : $a_n = e^{\frac{1}{n}ln(e^{n-1}-1)}$

c. Sur l'intervalle $]0, +\infty[$, $g_n'(x)$ a le même signe que $n - 1 - ln(1+x^n)$.

On utilise la stricte croissance de la fonction $x \mapsto x^n$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$: Si $x > a_n$, alors $x^n > {a_n}^n$ d'où $1 + x^n > 1 + {a_n}^n$.

Par stricte croissance du logarithme sur l'intervalle $]0, +\infty[$, $\ln(1+x^n) > \ln(1+{a_n}^n)$

Donc $n - 1 - \ln(1+x^n) < n - 1 - \ln(1+{a_n}^n)$ soit $n - 1 - \ln(1+x^n) < 0$ (car, par définition de a_n, $\ln(1+{a_n}^n) = n - 1$).

De même si $x < a_n$, alors $n - 1 - \ln(1+x^n) > 0$

d. $g_n(\mathrm{e}) = n\mathrm{e}^n - (1+\mathrm{e}^n)\ln(1+\mathrm{e}^n)$

$1 + \mathrm{e}^n > \mathrm{e}^n$ donc $\ln(1+\mathrm{e}^n) > \ln(\mathrm{e}^n)$, c'est-à-dire $\ln(1+\mathrm{e}^n) > n$

Donc par produit d'inégalités à termes positifs $(1+\mathrm{e}^n)\ln(1+\mathrm{e}^n) > n\mathrm{e}^n$

On en déduit $n\mathrm{e}^n - (1+\mathrm{e}^n)\ln(1+\mathrm{e}^n) < 0$ c'est-à-dire $g_n(\mathrm{e}) < 0$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} x^n = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} nx^n = 0$; $\lim\limits_{x \to 0^+}(1+x^n) = 1$ et par continuité du logarithme $\lim\limits_{x \to 0^+} ln(1+x^n) = 0$.

Enfin par produit $\lim\limits_{x \to 0^+}(1+x^n)\ln(1+x^n) = 0$. D'où $\lim\limits_{x \to 0^+} g_n(x) = 0$.

e. Les questions **3. b. c. d.** permettent d'obtenir le tableau de variation de la fonction g_n.

x	0		a_n		$+\infty$
$g_n'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
g_n	‖ 0	↗		↘	

D'après le tableau de variation, par stricte croissance de la fonction g_n sur $]0, a_n]$, $\forall x \in \,]0, a_n], g_n(x) > 0$.
Or, $g_n(\mathrm{e}) < 0$ donc $a_n < \mathrm{e}$.
La fonction g_n étant strictement décroissante et continue dans l'intervalle $[a_n, \mathrm{e}]$ avec $g_n(a_n) > 0$ et $g_n(\mathrm{e}) < 0$.
L'équation $g_n(x) = 0$ admet donc une unique solution b_n dans l'intervalle $[a_n, \mathrm{e}]$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires. De plus la fonction g_n étant strictement décroissante l'intervalle $[a_n, +\infty[$, b_n est l'unique solution de l'équation $g_n(x) = 0$ dans l'intervalle $[a_n, +\infty[$.

4. La question **3. e.** permet d'obtenir le signe de $g_n(x)$.
$\forall x \in \,]0; b_n], g_n(x) > 0$; $\forall x \in,]b_n; +\infty[, g_n(x) < 0$.
Le signe de $g_n(x)$ étant celui de $f_n'(x)$, on obtient le tableau de variation de f_n :

x	0		b_n		$+\infty$
$f_n'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f_n	‖ 0	↗		↘	0

5. a. $a_n = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}ln(\mathrm{e}^{n-1}-1)} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}ln[\mathrm{e}^n(\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-n})]} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}ln(\mathrm{e}^n)+\frac{1}{n}ln(\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-n})} = \mathrm{e} \times \mathrm{e}^{\frac{1}{n}ln(\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-n})}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{-n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty}(\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-n}) = \mathrm{e}^{-1}$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} ln(\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-n}) = \ln(\mathrm{e}^{-1}) = -1$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} ln(e^{-1}-e^{-n}) = 0$ par produit et enfin par composition et continuité de l'exponentielle

$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln(e^{-1}-\mathrm{e}^{-n})} = 1$

Finalement $\lim_{n\to+\infty} a_n = \mathrm{e}$

$\forall n \in \mathbf{N}\backslash\{0;1\}, a_n \leq b_n \leq \mathrm{e}$ et $\lim_{n\to+\infty} a_n = \mathrm{e}$ donc par le théorème d'encadrement $\lim_{n\to+\infty} b_n = \mathrm{e}$.

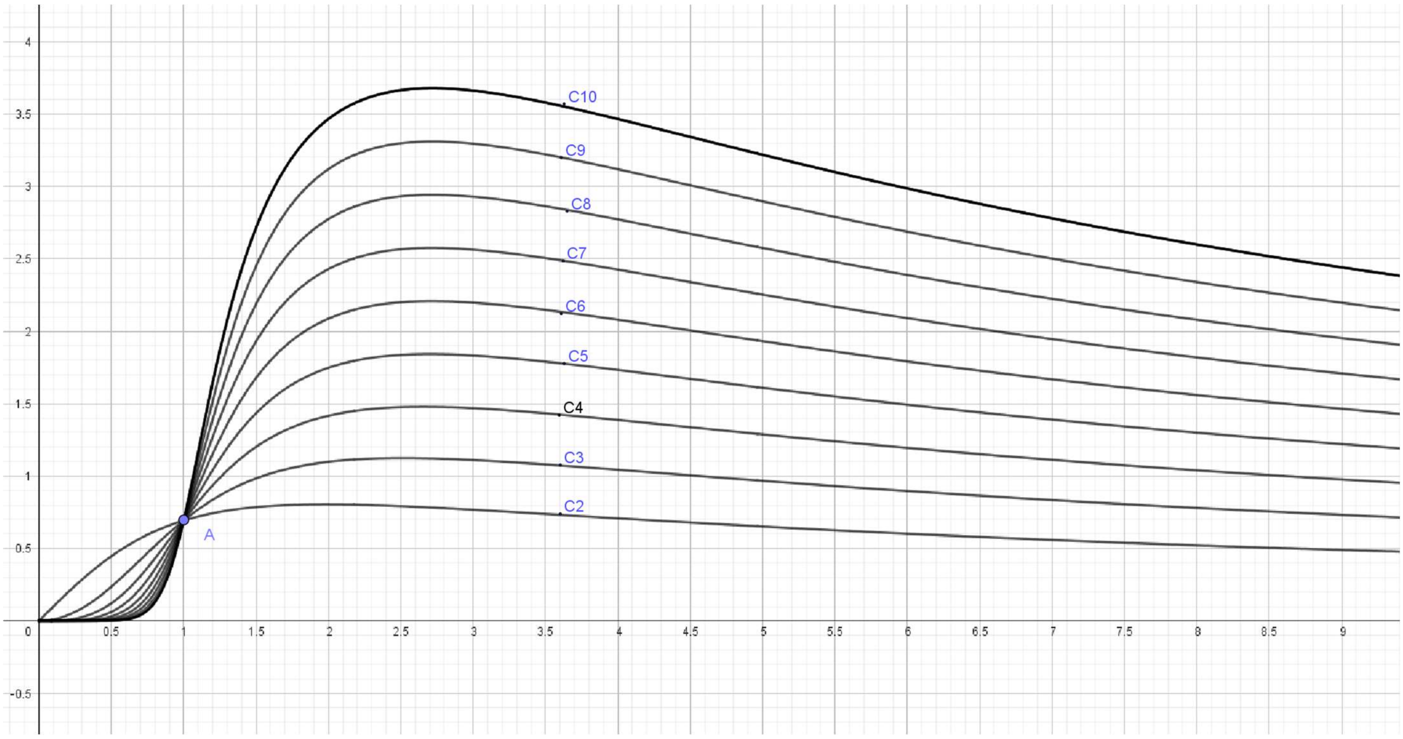
b. $M_n = f_n(b_n)$ est le maximum de la fonction f_n sur $]0\,;+\infty[$.

Or $\forall x \in]0;+\infty[, f_n(x) \geq \frac{ln(x^n)}{x}$ donc $f_n(x) \geq n\frac{ln(x)}{x}$; en particulier $M_n \geq n\frac{ln(x)}{x}$

Pour $x = e$, $M_n \geq \frac{n}{\mathrm{e}}$; $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\mathrm{e}} = +\infty$ donc par comparaison $\lim_{n\to+\infty} M_n = +\infty$.

6. Il semble qu'un point A d'abscisse 1 soit commun à toutes les courbes C_n. Vérifions-le :

$\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}, f_n(1) = \frac{\ln(1+1^n)}{1} = \ln(2)$; le point $\mathrm{A}(1, \ln 2)$ appartient à toutes les courbes C_n.



Exercice 2 – Comparaison de moyennes

On montre que pour tout entier n tel que $n \geq 1$, la fonction f définie sur **R⁺** par $f(x) = x^n$ est dérivable (donc continue) sur **R⁺** et strictement croissante sur **R⁺**. Comme de plus $f(0) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, le cas particulier du théorème des valeurs intermédiaires permet de dire que f est une bijection de **R⁺** sur **R⁺** et admet donc une bijection réciproque g définie sur **R⁺**. On dit que g est la fonction racine $n^{\text{ième}}$ et on note pour tout x de l'intervalle **R⁺**, $g(x) = \sqrt[n]{x}$. On note aussi $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

La fonction racine $n^{\text{ième}}$ est strictement croissante et vérifie les propriétés suivantes :

Pour tous réels a et b positifs $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$, si de plus $b \neq 0$, $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

<u>Rappel :</u> pour tous réels strictement positifs a et b, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$ et pour tout entier $n \geq 1$, $\ln a^n = n \ln a$ et $\ln a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\ln a$.

Pour comparer des produits, il peut être utile de comparer les logarithmes népériens de ces produits et une somme de logarithmes népériens peut être transformée en le logarithme népérien d'un produit.

Soit n un entier tel que $n \geq 2$ et $a_1, a_2, \dots, a_n$, n réels strictement positifs on définit la moyenne arithmétique m, la moyenne géométrique g et la moyenne harmonique h de ces réels par :

$$m = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \qquad g = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \qquad \frac{1}{h} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right)$$

1. Montrer que pour tout réel $x > 0$, $\ln x \leq x - 1$.
2. Appliquer l'inégalité précédente successivement aux nombres $\frac{a_1}{m}, \frac{a_2}{m}, \dots, \frac{a_n}{m}$ pour comparer les nombres g et m.
3. Appliquer aux nombres $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}$ l'inégalité trouvée précédemment pour les nombres $a_1, a_2, \dots, a_n$ et en déduire une inégalité entre m et h.

1. On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x - 1 - \ln x$. Cette fonction est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$. Sur $]0, +\infty[$, $f'(x)$a le signe de $x - 1$. La fonction f est donc décroissante sur $]0,1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$. Son minimum est donc $f(1) = 0$. La fonction f est donc positive et **pour tout réel $x > 0$, $\ln x \leq x - 1$.**

2. Pour tout entier k compris entre 1 et n, $\frac{a_k}{m} > 0$, on peut donc écrire $\ln \frac{a_k}{m} \leq \frac{a_k}{m} - 1$. En additionnant membre à membre ces n inégalités, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{a_k}{m}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{m} - n$$

Or $m = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$, ce qui s'écrit aussi $n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{m}$. L'inégalité précédente s'écrit donc

$$\sum_{k=1}^{k=n} \ln \frac{a_k}{m} \leq 0.$$

D'autre part,

$$\sum_{k=1}^{k=n} \ln \frac{a_k}{m} = \ln \frac{a_1}{m} + \ln \frac{a_2}{m} + \dots + \ln \frac{a_n}{m} = \ln\left(\frac{a_1}{m} \times \frac{a_2}{m} \times \dots \times \frac{a_n}{m}\right).$$

Ce logarithme népérien est négatif ou nul si et seulement si $\frac{a_1}{m} \times \frac{a_2}{m} \times \dots \times \frac{a_n}{m} \leq 1$ soit $a_1 a_2 \dots a_n \leq m^n$

Soit $\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq m$. On a donc bien $\boldsymbol{g \leq m}$.

3. En appliquant l'inégalité précédente aux nombres $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}$,

on obtient $\sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \times \frac{1}{a_2} \times \dots \times \frac{1}{a_n}} \leq \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right)$ c'est-à-dire $\frac{1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}} \leq \frac{1}{h}$ soit $\frac{1}{g} \leq \frac{1}{h}$. Comme les nombres g et h sont strictement positifs, cela équivaut à $\boldsymbol{g \geq h}$.

Exercice 3 – Fonctions puissances

Dans le prolongement de la fonction racine $n^{\text{ième}}$, si α est un réel non nul, on définit sur $]0, +\infty[$ la fonction puissance notée f_α par $f_\alpha(x) = \mathrm{e}^{\alpha \ln x} = x^\alpha$.

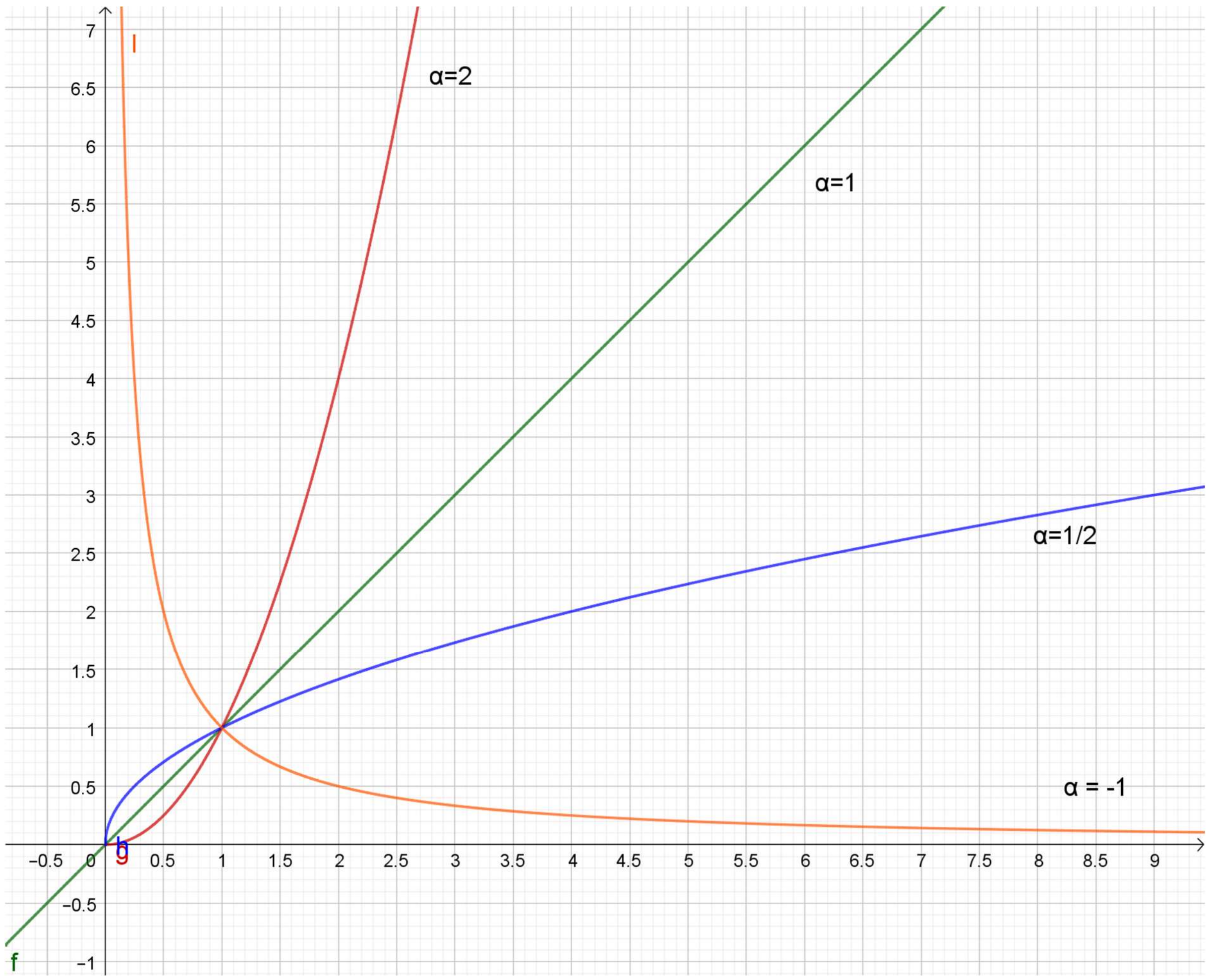
On rappelle que pour tout réel $x > 0$, $x = \mathrm{e}^{\ln}$.

1. Etudier, suivant les valeurs de α, les variations sur $]0, +\infty[$ de la fonction f_α.
2. Etudier, suivant les valeurs de α, les limites en 0 et en $+\infty$ de la fonction f_α.
3. Dans le cas où $\alpha > 0$, on prolonge la fonction f_α en 0 en posant $f_\alpha(0) = 0$. Montrer que la nouvelle fonction f_α est alors continue en 0 et étudier, suivant les valeurs de α, sa dérivabilité en 0.
4. Choisir plusieurs valeurs particulières de α représentatives des différents cas étudiés et tracer, sur un même graphique, les courbes représentatives des fonctions f_α correspondantes.

1. Par composition la fonction f_α est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$,
   $f'(x) = \frac{\alpha}{x}\mathrm{e}^{\alpha \ln x} = \alpha \frac{\mathrm{e}^{\alpha \ln x}}{\mathrm{e}^{\ln x}} = \alpha \mathrm{e}^{(\alpha - 1)\ln x}$. Comme la fonction exponentielle est strictement positive, on en déduit que le signe de $f'(x)$ est celui de α. On peut remarquer que $f'(x) = \alpha \mathrm{e}^{(\alpha-1)\ln x} = \alpha x^{\alpha - 1}$.

Donc si $\alpha < 0$ alors la fonction f_α est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$, si $\alpha = 0$ alors la fonction f est constante et si $\alpha > 0$ alors la fonction f_α est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

2. Si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x\to 0} \alpha \ln x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f_\alpha(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha \ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_\alpha(x) = 0$ et les axes du repère sont asymptotes à la courbe représentative de la fonction f_α.
   Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x\to 0} \alpha \ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f_\alpha(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha \ln x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_\alpha(x) = +\infty$.
3. On suppose dans cette question que $\alpha > 0$. Alors comme $\lim\limits_{x\to 0} f_\alpha(x) = 0$ et qu'on pose $f_\alpha(0) = 0$, la fonction prolongée est bien continue en 0.
   Pour étudier la dérivabilité en 0 de la fonction, on étudie le quotient $t(h) = \frac{f_\alpha(0+h)-f_\alpha(0)}{h} = \frac{e^{\alpha \ln h}}{h} = e^{(\alpha-1)\ln}$ d'après le calcul déjà fait à la question 1.
   Si $\alpha < 1$ alors $\lim\limits_{h\to 0} (\alpha - 1)\ln h = +\infty$ donc $\lim\limits_{h\to 0} t(h) = +\infty$
   Si $\alpha = 1$ alors $f_\alpha(x) = x$ et la fonction f_α est dérivable en 0 et $f_\alpha{}'(0) = 1$
   Si $\alpha > 1$ alors $\lim\limits_{h\to 0} (\alpha - 1)\ln h = -\infty$ donc $\lim\limits_{h\to 0} t(h) = 0$ donc la fonction f_α est dérivable en 0 et $f_\alpha{}'(0) = 0$.
4.



Exercice 4 – Point d'inflexion

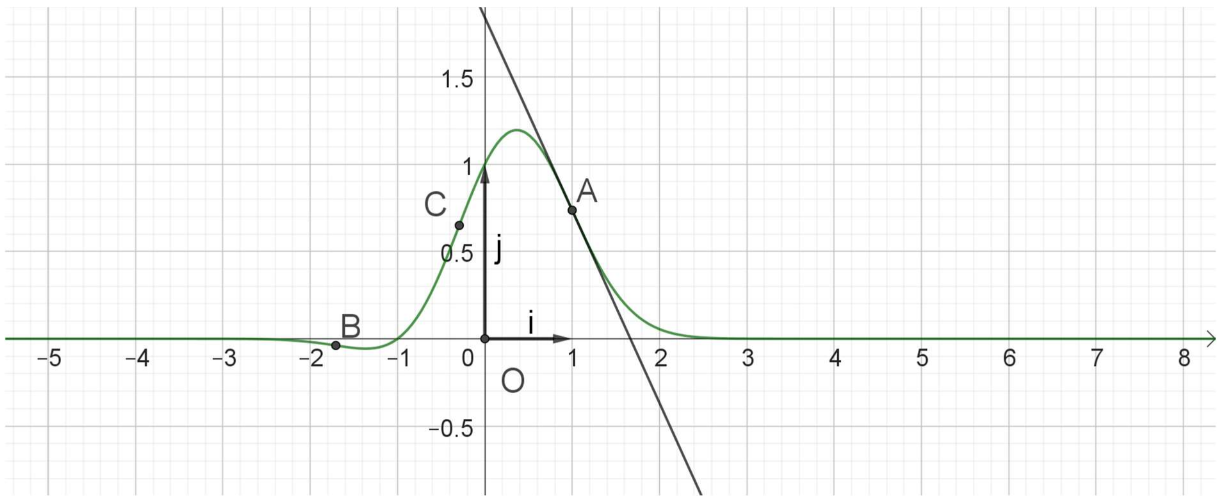
L'étude des variations d'une fonction dérivable s'appuie le plus souvent sur le signe de sa fonction dérivée, les valeurs où celle-ci s'annule ne suffisant pas pour déterminer ce signe.

<u>Propriété :</u> soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I et C sa courbe représentative. C admet un point d'inflexion en un point d'abscisse x_0 si et seulement si la dérivée seconde de f s'annule en changeant de signe en x_0.

Soit f la fonction définie sur **R** par $f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-x^2}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Etudier les variations de la fonction f.
2. Déterminer les points d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}$.
3. Déterminer une équation de la tangente au point d'abscisse 1 à la courbe $\mathcal{C}$.

1. Par produit et composition, la fonction f est dérivable sur **R** et pour tout réel x,
$f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{-x^2} + (1+x) \times (-2x)\mathrm{e}^{-x^2} = (-2x^2 - 2x + 1)\mathrm{e}^{-x^2}$.
Comme pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x^2} > 0$, $f'(x)$ a le signe de $-2x^2 - 2x + 1$.
Le discriminant de l'équation $-2x^2 - 2x + 1 = 0$ est $\Delta = 12$. Les solutions de l'équation sont donc :
$x_1 = \frac{2+2\sqrt{3}}{-4} = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ et $x_2 = \frac{2-2\sqrt{3}}{-4} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$. Comme le coefficient de x^2 est négatif, on en déduit que $f'(x)$est positif sur $[x_1, x_2]$ et $f'(x)$ est négatif sur $]-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty[$.
La fonction f est donc décroissante sur $]-\infty, x_1]$, croissante sur $[x_1, x_2]$ et décroissante sur $[x_2, +\infty[$.
2. Par produit et composition, la fonction f' est dérivable sur **R** et pour tout réel x,
$f''(x) = (-4x-2)\mathrm{e}^{-x^2} + (-2x^2-2x+1)(-2x)\mathrm{e}^{-x^2} = (4x^3 + 4x^2 - 6x - 2)\mathrm{e}^{-x^2}$
Soit $f''(x) = 2(2x^3 + 2x^2 - 3x - 1)\mathrm{e}^{-x^2}$ et $f''(x)$ a le signe de $2x^3 + 2x^2 - 3x - 1$.
Soit $P(x) = 2x^3 + 2x^2 - 3x - 1$. On constate que 1 est une solution de $P(x) = 0$. On cherche donc trois réels a, b, c tels que, pour tout réel x, $P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$
soit $P(x) = ax^3 + (-a+b)x^2 + (-b+c)x - c$.
L'égalité est vérifiée **pour tout réel x** si et seulement si $\begin{cases} a = 2 \\ -a+b = 2 \\ -b+c = -3 \\ -c = -1 \end{cases}$ soit $\begin{cases} a = 2 \\ b = 4. \\ c = 1 \end{cases}$
On étudie donc le signe de $P(x) = (x-1)(2x^2 + 4x + 1)$. Le discriminant de $2x^2 + 4x + 1 = 0$ est $\Delta = 8$ et ses solutions sont $x_3 = \frac{-4-2\sqrt{2}}{4} = -\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ et $x_4 = \frac{-4+2\sqrt{2}}{4} = -\frac{2-\sqrt{2}}{2}$
On en déduit que $f''(x)$ a le signe de $(x-1)(x-x_3)(x-x_4)$ et qu'elle s'annule en changeant de signe en trois points A, B, C de la courbe $\mathcal{C}$, points d'abscisses respectives 1, x_3, x_4.
3. La tangente en A à la courbe $\mathcal{C}$ a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1) = -3\mathrm{e}^{-1}(x-1) + 2\mathrm{e}^{-1}$
Soit $y = -3\mathrm{e}^{-1}x + 5\mathrm{e}^{-1}$.



Exercice 5 – Fonction convexe et intégrale

Définition : Le plan étant muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et soit f une fonction définie sur l'intervalle I. Si On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la fonction f est dite

convexe sur I si et seulement si pour tous points A et B de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives des réels a et b de I tels que $a < b$, le segment $[AB]$ est situé au-dessus de la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[a, b]$.

Propriété : Le plan étant muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et soit f une fonction définie sur l'intervalle I. Si On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la fonction f est **convexe sur I** si et seulement si sa courbe représentative $\mathcal{C}$ est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.

L'objectif de l'exercice est de démontrer que si a et b sont deux réels tels que $a < b$ et si f est une fonction convexe et dérivable sur l'intervalle $[a, b]$ et dont la dérivée f' est continue sur $[a, b]$, alors :

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

1. Déterminer une équation de la droite passant par les points A et B de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives a et b. En déduire que, pour tout réel $x \in [a, b]$, $f(t) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$.
2. Démontrer que $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$ et en donner une interprétation géométrique dans le cas où f est une fonction positive sur $[a, b]$.
3. Démontrer que, pour tout réel $x \in [a, b]$, $f(x) \geq f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.
4. Conclure.

1. Un point $M(x, y)$ appartient à la droite (AB) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-a \\ y-f(a) \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} b-a \\ f(b)-f(a) \end{pmatrix}$ sont colinéaires c'est-à-dire $(x-a)\big(f(b)-f(a)\big) - \big(y-f(a)\big)(b-a) = 0$ soit $y - f(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

   Soit $y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$.

   Or la fonction f est convexe sur l'intervalle $[a, b]$ donc sa courbe $\mathcal{C}$ est située au-dessus du segment$[AB]$, ce qui s'écrit pour tout réel $x \in [a, b]$, $f(x) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$.
2. Les fonctions f et $x \mapsto \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$ sont continues sur l'intervalle $[a, b]$. On peut donc en déduire que : $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)\right)\mathrm{d}x$.

   Or $\int_a^b \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \times \frac{x^2}{2} - a\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x + f(a)x\right]_a^b$

   Soit $\int_a^b \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)\right)\mathrm{d}x = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \times \frac{b^2-a^2}{2} - a\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) + f(a)(b-a)$

   Soit $\int_a^b \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)\right)\mathrm{d}x = \frac{f(b)-f(a)}{2}(b+a) - a\big(f(b)-f(a)\big) + f(a)(b-a)$

   Soit $\int_a^b \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)\right)\mathrm{d}x = \frac{f(b)-f(a)}{2}(b+a-2a) + f(a)(b-a)$

   Soit $\int_a^b \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)\right)\mathrm{d}x = \frac{f(b)-f(a)}{2}(b-a) + f(a)(b-a)$

   Soit $\int_a^b \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)\right)\mathrm{d}x = \frac{f(b)-f(a)+2f(a)}{2}(b-a)$

   c'est-à-dire $\int_a^b \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)\right)\mathrm{d}x = \frac{f(b)+f(a)}{2}(b-a)$

   Et on a donc $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \frac{f(b)+f(a)}{2}(b-a)$

Cette inégalité signifie que si la fonction f est de plus positive sur $[a, b]$ alors si on considère les points $C(a, 0)$ et $D(b, 0)$, alors $\frac{f(b)+f(a)}{2}(b-a)$ est l'aire du trapèze $ACDB$. Comme f est convexe sur $[a, b]$ et donc sa courbe est située sous la droite (AB), l'aire de ce trapèze est supérieure ou égale à l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, aire qui vaut $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

3. D'après la propriété rappelée en début d'énoncé, la courbe $\mathcal{C}$ est située au-dessus de sa tangente au point d'abscisse $\frac{a+b}{2}$. Or une équation de cette tangente est :

$$y = f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

On peut donc affirmer que, pour tout réel $x \in [a, b]$, $f(x) \geq f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

4. La fonction f' étant continue sur $[a, b]$, on en déduit que $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq \int_a^b \left(f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)\mathrm{d}x$

Or $\int_a^b \left(f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)\mathrm{d}x = \left[f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \times \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a+b}{2}x\right) + f\left(\frac{a+b}{2}\right)x\right]_a^b$

Soit $\int_a^b \left(f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)\mathrm{d}x = f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \times \frac{b^2-a^2}{2} - f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \times \frac{a+b}{2}(b-a) + f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$

Soit $\int_a^b \left(f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)\mathrm{d}x = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$

Et on a donc $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$.

En regroupant les résultats des questions **2.** et **3.**, on a bien $f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \frac{f(b)+f(a)}{2}(b-a)$

Exercice 6 – Suites et probabilités

Propriété : si A et B sont deux événements incompatibles, alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.
Cette propriété s'étend à une union finie d'événements deux à deux incompatibles.
Propriété : Soient A et B des événements tels que $p(B) \neq 0$; alors $p(A \cap B) = p_B(A) \times p(B)$.
Cette propriété permet de calculer de nombreuses probabilités en s'appuyant sur un arbre de probabilités.

Une urne contient en proportion 70% de jetons verts, 10% de jetons bleus, 20% de jetons noirs.
On extrait au hasard un jeton de l'urne et l'on note sa couleur.
Un jeu consiste à extraire un jeton de l'urne :

- Si le jeton est bleu, le jeu s'arrête et l'on a gagné.
- Si le jeton est noir, le jeu s'arrête et l'on a perdu.
- Si le jeton est vert, on le replace dans l'urne et l'on recommence l'épreuve.

Soit n un entier naturel non nul. On fixe à n le nombre de fois où l'épreuve précédente est réalisée (épreuve qui peut s'interrompre avant le rang n si l'on a au préalable perdu ou gagné)

Pour tout entier $k \geq 1$ inférieur ou égal à n, on note :

- B_k l'événement « le jeton extrait après k itérations est bleu »
- N_k l'événement « le jeton extrait après k itérations est noir »
- V_k l'événement « le jeton extrait après k itérations est vert »
- G_n l'événement « on a gagné à un rang k inférieur ou égal à n »
- P_n l'événement « on a perdu à un rang k inférieur ou égal à n »

1. On se place dans cette question dans le cas où $n = 2$.
   a. Représenter l'expérience à l'aide d'un arbre de probabilité.
   b. Calculer la probabilité de chacun des événements V_2, G_2, P_2.

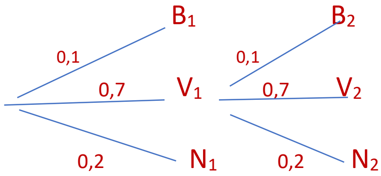
2. n désigne maintenant un entier naturel non nul quelconque. On note respectivement v_n, g_n, p_n la probabilité des événements V_n, G_n, P_n .
   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique ; établir l'expression du terme général en fonction de n.
   b. Soit un entier naturel k tel que $1 \leq k \leq n$. Justifier que $p(B_k) = 0{,}1 \times 0{,}7^{k-1}$ et $p(N_k) = 0{,}2 \times 0{,}7^{k-1}$
   c. Montrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$g_n = \sum_{k=1}^{n} 0{,}1 \times 0{,}7^{k-1} \text{ et } p_n = \sum_{k=1}^{n} 0{,}2 \times 0{,}7^{k-1} .$$

d. Exprimer g_n et p_n en fonction de l'entier n.
e. Etudier la convergence des suites (v_n), (g_n), (p_n).

3. Déterminer le plus petit entier naturel *n* pour lequel $g_n > 0{,}32$.

1. ***a.*** Le jeton est tiré au hasard, ce qui assure l'équiprobabilité, puis remis dans l'urne après chaque tirage. Les données du problème en pourcentages se traduisent donc par l'arbre de probabilité ci-dessous.



b. $p(V_2) = p(V_1 \cap V_2) = (p(V_1) \times p_{V_1}(V_2) = 0{,}7 \times 0{,}7 = 0{,}49$
$G_2 = B_1 \cup B_2$ et les événements B_1, B_2 sont incompatibles
donc $p(G_2) = p(B_1) + p(B_2) = p(B_1) + p(V_1) \times p_{V_1}(B_2) = 0{,}1 + 0{,}7 \times 0{,}1 = 0{,}17$.
$P_2 = N_1 \cup N_2$ et les événements N_1, N_2 sont incompatibles
donc $p(N_2) = p(N_1) + p(V_1) \times p_{V_1}(N_2) = 0{,}2 + 0{,}7 \times 0{,}2 = 0{,}34$.

2. ***a.*** Pour tout entier naturel n non nul, $v_n = p(V_n) = p(V_{n-1}) \times p_{V_{n-1}}(V_n) = 0{,}7 v_{n-1}$, ce qui prouve que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,7. Donc $v_n = v_1 \times 0{,}7^{n-1} = 0{,}7^n$.
b. Pour que l'événement B_k soit réalisé, il faut et il suffit que les événements $V_1, V_2, \dots, V_{k-1}, B_k$ soient réalisés dans cet ordre. Ainsi $B_k = V_{k-1} \cap B_k$ donc $p(B_k) = p_{V_{k-1}}(B_k) \times p(V_{k-1}) = 0{,}1 \times 0{,}7^{k-1}$.
De même $p(N_k) = p_{V_{k-1}}(N_k) \times p(V_{k-1}) = 0{,}2 \times 0{,}7^{k-1}$.
c. $G_n = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n$, les événements étant deux à deux incompatibles.
Donc $g_n = p(B_1) + p(B_2) + \cdots + p(B_n) = 0{,}1 + 0{,}1 \times v_1 + \cdots + 0{,}1 \times v_{n-1} = 0{,}1 \sum_{k=1}^{n} 0{,}7^{k-1}$
$P_n = N_1 \cup N_2 \cup \dots \cup N_n$, les événements étant deux à deux incompatibles.
Donc $p_n = p(N_1) + p(N_2) + \cdots + p(N_n) = 0{,}2 + 0{,}2 \times v_1 + \cdots + 0{,}2 \times v_{n-1} = 0{,}2 \sum_{k=1}^{n} 0{,}7^{k-1}$
d. $g_n = 0{,}1 \sum_{k=1}^{n} 0{,}7^{k-1} = 0{,}1 \times \frac{1-0{,}7^n}{1-0{,}7} = \frac{1}{3}(1 - 0{,}7^n)$ et $p_n = 0{,}2 \sum_{k=1}^{n} 0{,}7^{k-1} = 0{,}2 \times \frac{1-0{,}7^n}{1-0{,}7} = \frac{2}{3}(1 - 0{,}7^n)$
e. Puisque $0 < 0{,}7 < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}7^n = 0$. On en déduit $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$; $\lim\limits_{n \to +\infty} g_n = \frac{1}{3}$; $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \frac{2}{3}$.

3. Pour tout entier naturel n non nul,
$g_n > 0{,}32 \Leftrightarrow \frac{1}{3}(1 - 0{,}7^n) > 0{,}32 \Leftrightarrow 1 - 0{,}7^n > 0{,}96 \Leftrightarrow 0{,}04 > 0{,}7^n$
Par stricte croissance de la fonction logarithme sur $]0 ; +\infty[$ et par les propriétés du logarithme, on obtient
$0{,}04 > 0{,}7^n \Leftrightarrow \ln(0{,}04) > \ln(0{,}7^n) \Leftrightarrow \ln(0{,}04) > n \ln(0{,}7) \Leftrightarrow \frac{\ln(0{,}04)}{\ln(0{,}7)} < n$ car $\ln(0{,}7) < 0$
Une calculatrice donne pour valeur approchée : $\frac{\ln(0{,}04)}{\ln(0{,}7)} \approx 9{,}024$; donc à partir du rang $n = 10$, on aura $g_n > 0{,}32$.

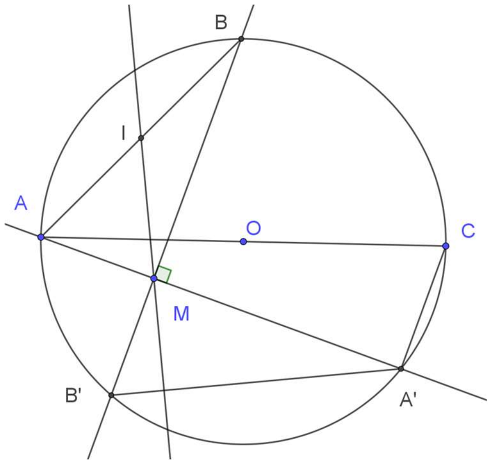
N.B. Après avoir montré que la suite (g_n) est croissante (puisque $0 < 0{,}7 < 1$), on peut aussi programmer les termes de la suite (g_n) sur calculatrice ou écrire un algorithme avec une boucle « while » qui s'arrête dès que g_n dépasse 0,32.

Exercice 7 – Orthogonalité dans un cercle

On peut démontrer une orthogonalité en prouvant qu'un produit scalaire est nul.
Les propriétés opératoires du produit scalaire alliées à la relation de Chasles sont souvent utiles pour calculer des produits scalaires.

On considère un cercle C de centre O et de rayon R et un point M intérieur au cercle. Par le point M, on mène deux droites perpendiculaires qui coupent le cercle en A et A' pour une droite, en B et B' pour l'autre droite. On note I le milieu de [AB].

1. Montrer que $\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MA'}} = \mathrm{MO}^2 - R^2$.
   (On pourra introduire le point C diamétralement opposé à A sur le cercle C).
2. Montrer que la droite (IM) est la hauteur issue de M dans le triangle MA'B'.



1. Soit C le point diamétralement opposé à A sur le cercle C.

$\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MA'}} = \overrightarrow{\mathrm{MA}}.\left(\overrightarrow{\mathrm{MC}} + \overrightarrow{\mathrm{CA'}}\right) = \overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MC}} + \overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{CA'}}$

Or le triangle AA'C a son côté [AC] diamètre du cercle C. Il est donc rectangle en A' et $\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MA'}} = \overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MC}}$

Soit $\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MA'}} = \left(\overrightarrow{\mathrm{MO}} + \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right).\left(\overrightarrow{\mathrm{MO}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$

Soit $\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MA'}} = \overrightarrow{\mathrm{MO}}^2 + \overrightarrow{\mathrm{MO}}.\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}\right) + \overrightarrow{\mathrm{OA}}.\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

Or O étant le centre du cercle donc le milieu de [AC], $\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{0}$

Et $\overrightarrow{\mathrm{OA}}.\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}.\left(-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) = -R^2$

On a donc bien $\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MA'}} = \mathrm{MO}^2 - R^2$.

On a de même $\overrightarrow{\mathrm{MB}}.\overrightarrow{\mathrm{MB'}} = \mathrm{MO}^2 - R^2 = \overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MA'}}$.

2. On va montrer que le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{MI}}.\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}$ est nul.

I est le milieu de [AB] donc $\overrightarrow{\mathrm{MI}} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}}\right)$ et $\overrightarrow{\mathrm{MI}}.\overrightarrow{\mathrm{A'B'}} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}}\right).\left(\overrightarrow{\mathrm{A'M}} + \overrightarrow{\mathrm{MB'}}\right)$

Soit $\overrightarrow{\mathrm{MI}}.\overrightarrow{\mathrm{A'B'}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{A'M}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MB'}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{MB}}.\overrightarrow{\mathrm{A'M}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{MB}}.\overrightarrow{\mathrm{MB'}}$.

Comme les droites (AA') et (BB') sont perpendiculaires en M, $\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MB'}} = \overrightarrow{\mathrm{MB}}.\overrightarrow{\mathrm{A'M}} = 0$

D'autre part, $\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{A'M}} = -\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MA'}} = -\overrightarrow{\mathrm{MB}}.\overrightarrow{\mathrm{MB'}} = R^2 - \mathrm{MO}^2$

Au final $\overrightarrow{\mathrm{MI}}.\overrightarrow{\mathrm{A'B'}} = 0$ et la médiane issue de M dans le triangle MAB est bien la hauteur issue de M dans le triangle $MA'B'$.

Exercice 8 – Histoires de tétraèdre

Propriété : soit A, B, C, D quatre points de l'espace tels que $A \neq \mathrm{B}$ et $\mathrm{C} \neq \mathrm{D}$. Alors les droites (AB) et (CD) sont orthogonales si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{CD}} = 0$.

Définition : on dit qu'une droite de l'espace est perpendiculaire à un plan lorsqu'elle est orthogonale à toute droite de ce plan.

Propriété : si une droite de l'espace est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan alors elle est perpendiculaire à ce plan.

Méthode : pour montrer que deux droites sont orthogonales, on peut :
- montrer que le produit scalaire de vecteurs directeurs de ces droites est nul ;
- montrer qu'une des droites est perpendiculaire à un plan contenant l'autre droite (en montrant qu'elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan)..

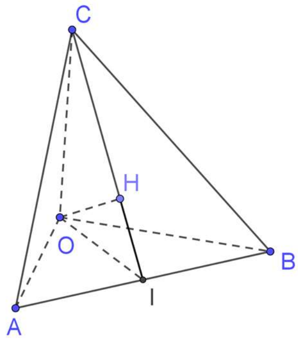
Soit OABC un tétraèdre tel que les triangles OAB, OAC et OBC sont isocèles rectangles en O. Soit I milieu de [AB], H le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OIC.

1. ***a.*** Démontrer que les droites (OH) et (AB) sont orthogonales.
   b. Que représente le point H pour le tétraèdre OABC ?
   c. Montrer que le point H est l'orthocentre du triangle ABC.

2. On pose $\mathrm{OA} = a$.
   a. Calculer le volume du tétraèdre OABC.
   b. En déduire que $\mathrm{OH} = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

3. Soit D le symétrique du point H par rapport à O.
   a. Démontrer que $\left(\mathrm{O}, \frac{1}{a}\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \frac{1}{a}\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \frac{1}{a}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$ est un repère orthonormal de l'espace.

b. Déterminer les coordonnées des points $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}$ et montrer que ABCD est un tétraèdre régulier (toutes ses arêtes ont la même longueur).



1. ***a.*** Les triangles OAB, OBC et OCA sont isocèles en O donc OA = OB = OC. De plus, ils sont rectangles en O, donc, en appliquant le théorème de Pythagore, on obtient

$\mathrm{AB} = \mathrm{BC} = \mathrm{CA} = \mathrm{OA}\sqrt{2}$. En particulier le triangle ABC est équilatéral. Le milieu I de [AB] est donc aussi le pied de la hauteur issue de C dans le triangle ABC. Or, par définition H appartient à (CI) donc $\overrightarrow{\mathrm{CH}}.\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$.

D'autre part, (OC) est orthogonale à (OA) et (OB) sécantes en O donc (OC) est orthogonale au plan (OAB) et donc en particulier à (AB). On a donc

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}.\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \left(\overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{CH}}\right).\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}.\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{CH}}.\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0.$

On en déduit que la droite (OH) est orthogonale à la droite (AB).

b. Par définition de H, (OH) est perpendiculaire à (CI). Donc (OH) est orthogonale aux droites (AB) et (CI) sécantes en I. La droite (OH) est donc orthogonale au plan (ABC) et le point H est le pied de la hauteur issue de O dans le tétraèdre OABC.

c. La droite (OH) est orthogonale au plan (ABC) donc à la droite (BC). D'autre part (OA) étant orthogonale à (OB) et (OC), elle est orthogonale au plan (OBC) donc à (BC). Or (OA) et (OH) sont deux droites sécantes du plan (AOH) donc (BC) est orthogonale à (AOH) et donc à la droite (AH) incluse dans ce plan. C'est donc la hauteur issue de A dans le triangle ABC. Or ce triangle étant équilatéral, la médiane (CI) qui passe par le point H est aussi hauteur. On en déduit que le point H est orthocentre de ABC et donc aussi son centre de gravité.

2. ***a.*** Comme (OC) est orthogonale à (OA) et (OB), O est le pied de la hauteur issue de C dans le tétraèdre OABC. De plus le triangle OAB est rectangle en O. Le volume de ce tétraèdre est donc

$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathrm{OC} \times \mathcal{A}_{\mathrm{OAB}} = \frac{1}{3}a \times \frac{\mathrm{OA}\times\mathrm{OB}}{2} = \frac{a^3}{6}.$

b. D'autre part, H est le pied de la hauteur issue de O dans le tétraèdre OABC donc $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathrm{OH} \times \mathcal{A}_{\mathrm{ABC}}$.

Or $\mathcal{A}_{\mathrm{ABC}} = \frac{1}{2}\mathrm{AB} \times \mathrm{CI}$ puisque I est le pied de la hauteur issue de C dans ABC.

On a vu que $\mathrm{AB} = a\sqrt{2}$. CI est la hauteur dans un triangle équilatéral de côté a$\sqrt{2}$ donc $\mathrm{CI} = a\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

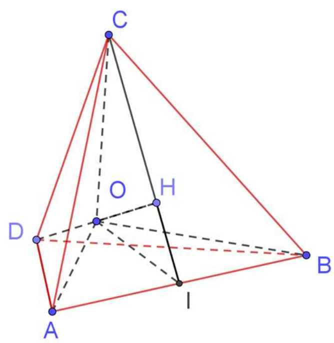
Soit $\mathrm{CI} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. On en déduit $\mathcal{A}_{\mathrm{ABC}} = \frac{1}{2}\, a\sqrt{2} \times \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a^2}{4} \times 2\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$

Au final, $OH = \frac{3\,\mathcal{V}}{\mathcal{A}_{\mathrm{ABC}}} = \frac{\frac{a^3}{2}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{2}} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$

3. ***a.*** Les droites (OA), (OB) et (OC) sont deux à deux perpendiculaires et OA = OB = OC $= a$. Donc les vecteurs $\frac{1}{a}\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \frac{1}{a}\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \frac{1}{a}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ sont deux à deux orthogonaux et unitaires.

$\left(\mathrm{O}, \frac{1}{a}\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \frac{1}{a}\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \frac{1}{a}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$ est donc bien un repère orthonormal de l'espace.

b. Dans ce repère, on a $\mathrm{A}(a,0,0)$, $\mathrm{B}(0,a,0)$ et $\mathrm{C}(0,0,\ a)$. Déterminons les coordonnées du point D.



Par définition de D,

$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = -\overrightarrow{\mathrm{OH}} = -\overrightarrow{\mathrm{OI}} - \overrightarrow{\mathrm{IH}} = -\overrightarrow{\mathrm{OI}} - \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{IC}}$.

(car H est aussi le centre de gravité du triangle ABC)

Le point I étant le milieu de [AB], on a $\mathrm{I}\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0\right)$ et $\overrightarrow{\mathrm{IC}}\begin{pmatrix} -\frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} \\ a \end{pmatrix}$

Le point D et le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ ont donc pour coordonnées :

$x_{\mathrm{D}} = -\frac{a}{2} - \frac{1}{3} \times \left(-\frac{a}{2}\right) = -\frac{a}{3}$, $y_{\mathrm{D}} = -\frac{a}{2} - \frac{1}{3} \times \left(-\frac{a}{2}\right) = -\frac{a}{3}$ et $z_{\mathrm{D}} = -\frac{a}{3}$.

On en déduit :

$\mathrm{AD}^2 = \left(-\frac{a}{3} - a\right)^2 + \left(-\frac{a}{3}\right)^2 + \left(-\frac{a}{3}\right)^2 = \frac{18}{9}a^2 = 2a^2$ d'où $\mathrm{AD} = a\sqrt{2}$.
$\mathrm{BD}^2 = \left(-\frac{a}{3}\right)^2 + \left(-\frac{a}{3} - a\right)^2 + \left(-\frac{a}{3}\right)^2 = \frac{18}{9}a^2 = 2a^2$ d'où $\mathrm{BD} = a\sqrt{2}$.
$\mathrm{CD}^2 = \left(-\frac{a}{3}\right)^2 + \left(-\frac{a}{3}\right)^2 + \left(-\frac{a}{3} - a\right)^2 = \frac{18}{9}a^2 = 2a^2$ d'où $\mathrm{CD} = a\sqrt{2}$.
Et on avait vu que $\mathrm{AB} = \mathrm{BC} = \mathrm{CA} = a\sqrt{2}$.
Le tétraèdre ABCD est donc bien un tétraèdre régulier.