Pépinière académique de mathématiques

Année 2024-2025 **Stage « filé »**

Classe terminale **Fiche numéro 2**

Parution lundi 16 décembre **Retour attendu pour le lundi 20 janvier**

Exercice 1 – Encore un peu de récurrence

Raisonnement par récurrence : utilisé pour démontrer qu'une proposition P_n, dépendant d'un entier $n \geq n_0$, où n_0 est un entier fixé, est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

- On vérifie que la proposition P_n est vraie pour $n = n_0$ (initialisation) ;
- On montre que si la proposition P_n est vraie pour un entier n, alors la proposition P_{n+1} est encore vraie (hérédité).

On peut alors en déduire que la proposition P_n est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Définition : On dit qu'une suite (u_n) est majorée si et seulement si il existe un nombre réel M tel que pour tout entier naturel n, $u_n \leq M$.

Théorème : Toute suite croissante et majorée est convergente.

1. **a**. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n strictement positif, $\sum_{i=1}^{i=n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

b. En déduire que toute somme $\sum_{i=m}^{i=n} i^3$de cubes d'entiers naturels non nuls consécutifs n'est pas un nombre premier.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{N}^*$ par $f(1) = 3$ et, pour tout entier n strictement positif, $f(2n) = (f(n))^2$ et $f(2n+1) = 3f(2n)$.

a. Calculer les premières valeurs de la suite de terme général $f(n)$.

b. Émettre une conjecture et la démontrer.

Exercice 2 – Recherche d'extremum

Propriété : soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a, b]$ et $x_0 \in]a, b[$. La fonction f admet un extremum en x_0 si sa dérivée s'annule **en changeant de signe** en x_0.

Soit$(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan. On définit la fonction f du plan dans l'ensemble des nombres réels, associant à tout point M de coordonnées $(x\,, y)$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, le nombre réel $f(M) = x^4 + y^4$.
Soit (C) le cercle de centre O et de rayon 1. On se propose de déterminer les valeurs extrémales de la fonction f sur le cercle (C) et dans le disque D délimité par (C) et contenant (C).

1. Montrer que pour tout point M de coordonnées $(x\,, y)$appartenant au cercle (C),$f(M) = 2x^4 - 2x^2 + 1$.

2. En déduire les valeurs extrémales de $f(M)$ sur le cercle (C) et les points en lesquels ces extremums sont atteints.

3. Déterminer les valeurs extrémales de f sur le disque D.

Exercice 3 – Ensemble de cercles tangents à deux cercles

Préambule :

On donne deux cercles C_1 et C_2 de centres respectifs O_1 et O_2, de rayons respectifs r_1 et r_2 tels que $r_1 \leq r_2$.

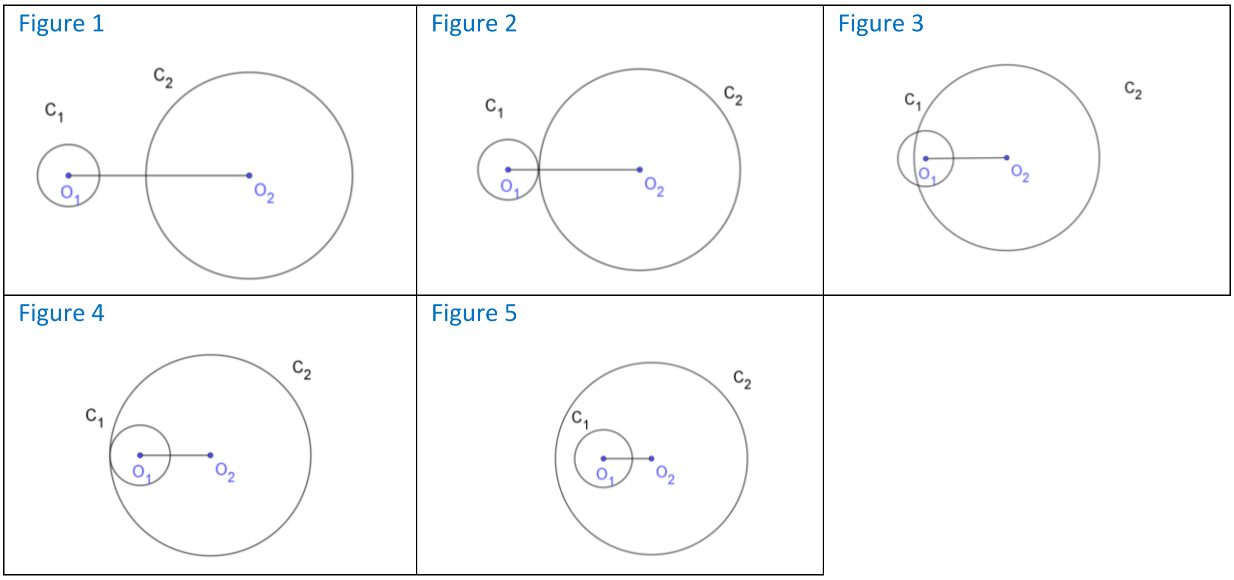
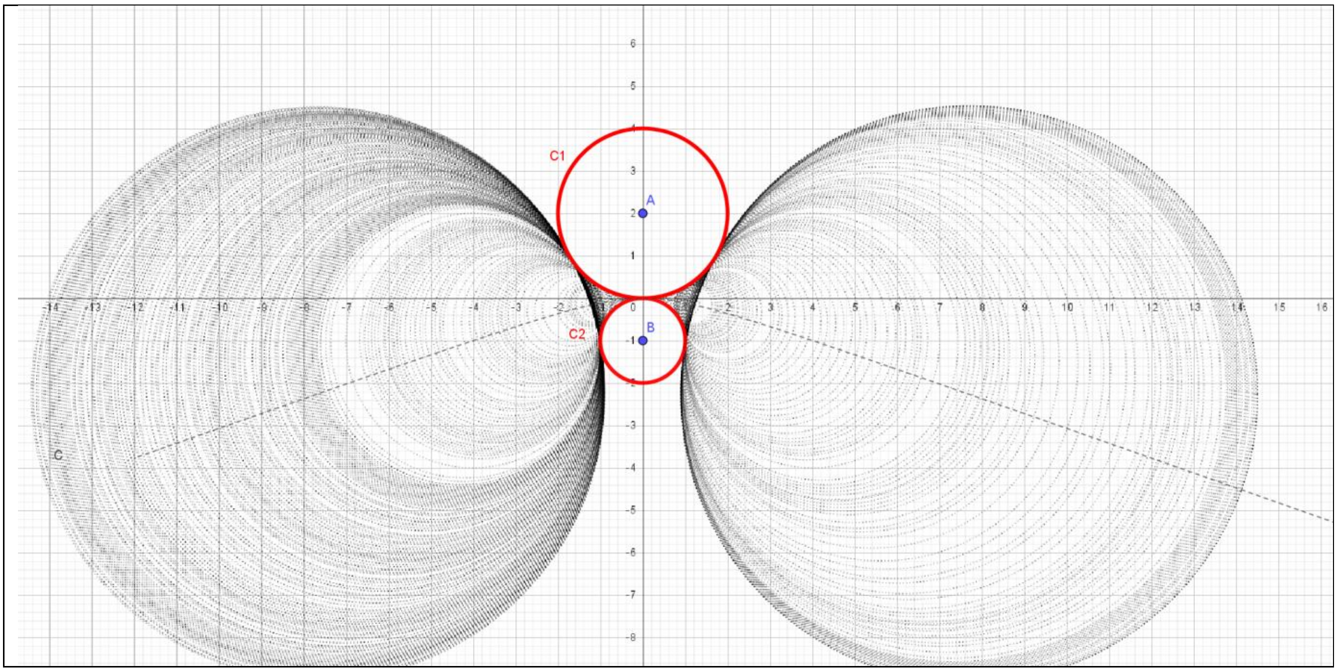


Figure 1 : $O_1O_2 > r_1 + r_2$ et les cercles n'ont pas de point commun.
Figure 2 : $O_1O_2 = r_1 + r_2$ et les cercles sont tangents extérieurement et n'ont qu'un point commun.
Figure 3 : $r_2 - r_1 < O_1O_2 < r_1 + r_2$ et les cercles sont sécants en deux points.
Figure 4 : $O_1O_2 = r_2 - r_1$ et les cercles sont tangents intérieurement et n'ont qu'un point commun.
Figure 5 : $O_1O_2 < r_2 - r_1$ et les cercles n'ont pas de point commun.

<u>Point méthode :</u>
Soit S un système d'équations, on obtient un système équivalent à S en :

- ajoutant à une des équations une combinaison linéaire d'une ou plusieurs autres équations ;
- en multipliant une équation par un nombre réel non nul ;
- remplaçant une inconnue par son expression en fonction des autres inconnues.

On se place dans un repère orthonormé du plan. Soit le cercle C_1 de centre le point $A(0,2)$ et de rayon 2 et le cercle C_2 de centre le point $B(0,-1)$ et de rayon 1.
On se propose de déterminer le lieu des centres des cercles qui sont à la fois tangents extérieurement au cercle C_1 et au cercle C_2.
La figure ci-dessous obtenue avec un logiciel de géométrie montre une partie de l'ensemble des cercles tangents extérieurement à C_1 et à C_2.



1. **a.** Soit D un point du plan, r un nombre réel positif et soit C le cercle de centre D et de rayon r.
Montrer que C est tangent extérieurement à C_1 et à C_2 si et seulement si $\mathrm{DA} = r + 2$ et $\mathrm{DB} = r + 1$.
   b. On nomme (x, y) les coordonnées du point D.
En déduire que le cercle C est tangent extérieurement à C_1 et à C_2 si et seulement si
$\begin{cases} x^2 + (y-2)^2 = (r+2)^2 \\ x^2 + (y+1)^2 = (r+1)^2 \end{cases}$.
2. Montrer les équivalences suivantes :

$$\begin{cases} x^2 + (y-2)^2 = (r+2)^2 \\ x^2 + (y+1)^2 = (r+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3y = r \\ x^2 = 8y^2 - 8y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3y = r \\ y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{2}} \end{cases}$$

3. Soit la fonction f définie dans $\mathbf{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{2}}$ et Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.
   a. Montrer que si D est un point de la courbe Γ, alors D est effectivement le centre d'un cercle tangent extérieurement à C_1 et à C_2. Donner alors la réponse à la question posée en tête de l'exercice.
   b. Etudier la parité de la fonction f.
   c. Etudier le sens de variation de la fonction f.
   d. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2\sqrt{2}} \right) \right) = 0$ (On dira que la droite d_1 d'équation : $y = \frac{1}{2} - \frac{x}{2\sqrt{2}}$ est une asymptote oblique à la courbe Γ en $+\infty$)
   e. Construire la courbe Γ, la droite d_1 et la droite d_2 d'équation $y = \frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{2}}$ (on pourrait démontrer de même que d_2 est une asymptote oblique à Γ en $-\infty$)

Exercice 4 – Une équation fonctionnelle pour définir le logarithme népérien

La fonction logarithme népérien a été définie en classe comme fonction réciproque de la fonction exponentielle et elle a pour dérivée la fonction inverse.
On sait que pour tous nombres strictement positifs a et b, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ et $\ln e = 1$.
On montre que ces deux propriétés caractérisent en fait la fonction logarithme népérien.
On admettra que si deux fonctions f et g, définies et dérivables sur un même intervalle I, ont la même fonction dérivée alors il existe un réel k tel que pour tout réel x de I, $f(x) = g(x) + k$.

On cherche toutes les fonctions f dérivables sur $]0, +\infty[$ et telles que pour tous nombres réels $a > 0$ et $b > 0$:

$$(1) \quad f(ab) = f(a) + f(b).$$

1. Calculer $f(1)$.
2. Pour tout nombre réel $a > 0$, on considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = f(ax) - f(x)$ où f est une fonction dérivable vérifiant (1). Que peut-on dire des variations de la fonction g ?
3. Montrer que g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et exprimer $g'(x)$.
4. Si on pose $f'(1) = k$, montrer que pour tout nombre réel $x > 0$, $f(x) = k \ln x$.
5. Conclure sur la caractérisation de la fonction logarithme népérien.

Exercice 5 – Propriétés des combinaisons

Propriétés :

(1) pour tous entiers k et n tels que $0 \leq k \leq n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$;

(2) pour tous entiers k et n tels que $0 < k \leq n-1$, $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$.

(3) pour tout entier n, pour tous réels a et b, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Il y a plusieurs façons de démontrer ces propriétés (raisonnement par récurrence, dénombrement dans des tirages de boules ou des chemins…). Ces méthodes peuvent être reprises pour démontrer d'autres propriétés des combinaisons.

On veut montrer que pour tout entier n,

(i) $\sum_{k=0}^{k=n}\binom{n}{k}=2^n$ (ii) $\sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k\binom{n}{k}=0$ (iii) $\sum_{k=0}^{k=n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$

a. Démontrer par récurrence la relation (i) en s'appuyant sur les propriétés (1) et (2).
b. Démontrer la relation (ii) en s'appuyant sur la propriété (3).
c. Démontrer la relation (iii) en dénombrant des tirages de boules.
d. En considérant la dérivée de la fonction $f : x \mapsto (1+x)^n$, démontrer que pour tout entier n, $\sum_{k=0}^{k=n} k\binom{n}{k}=n\,2^{n-1}$.

En géométrie vectorielle, on rappelle que :
- la colinéarité de deux vecteurs permet de démontrer un alignement de points ;
- la nullité d'un produit scalaire permet de démontrer une orthogonalité ;
- le centre de gravité d'un triangle ABC (point de concours des médianes) est le point G tel que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Exercice 6 – Le cercle des neuf points ou « cercle d'Euler »

Soit ABC un triangle. On appelle :
- A', B', C' les milieux respectifs des segments [BC], [CA] et [AB] ;
- D, E et F les pieds des hauteurs du triangle ABC issues respectivement de A, B et C ;
- G le centre de gravité du triangle ABC.

a. On note O le centre du cercle $\mathcal{C}_1$ circonscrit au triangle ABC et H le point défini par $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$. Montrer que H est l'orthocentre du triangle ABC et que $\overrightarrow{OH}=3\,\overrightarrow{OG}$. Qu'en déduit-on pour les points O, G et H ?
b. On note I, M, N et P les milieux respectifs des segments [OH], [HA], [HB] et [HC]. On appelle $\mathcal{C}_2$ le cercle de centre I de rayon la moitié du rayon du cercle $\mathcal{C}_1$.
Démontrer que $\overrightarrow{IM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{IA'}$. En déduire que le segment [MA'] est un diamètre du cercle $\mathcal{C}_2$.
c. Montrer que le point D appartient au cercle $\mathcal{C}_2$.
d. Donner neuf points situés sur le cercle $\mathcal{C}_2$ (il s'agit naturellement de nommer neuf points de la figure définis sans référence au cercle…)

Exercice 7 – Tétraèdre orthocentrique

Soit ABCD un tétraèdre.
a. Démontrer que les arêtes (AB) et (CD) sont orthogonales si et seulement si $\mathrm{AC}^2+\mathrm{BD}^2=\mathrm{AD}^2+\mathrm{BC}^2$.
b. Démontrer que si les arêtes (AB) et (CD) sont orthogonales ainsi que les arêtes (AC) et (BD) alors les arêtes (AD) et (BC) le sont aussi.
On dit alors que le tétraèdre ABCD est *orthocentrique*.
c. Démontrer que si ABCD est un tétraèdre orthocentrique et si A' est le projeté orthogonal de A sur le plan (BCD) alors A' est l'orthocentre du triangle BCD.