

Dans cette fiche, chaque énoncé d'exercice est précédé de quelques rappels constituant des outils pour traiter l'exercice.

Exercice 1 – Encore un peu de récurrence

Raisonnement par récurrence : utilisé pour démontrer qu'une proposition P_n , dépendant d'un entier $n \geq n_0$, où n_0 est un entier fixé, est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

- On vérifie que la proposition P_n est vraie pour $n = n_0$ (initialisation) ;
- On montre que si la proposition P_n est vraie pour un entier n , alors la proposition P_{n+1} est encore vraie (hérédité).

On peut alors en déduire que la proposition P_n est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Définition : On dit qu'une suite (u_n) est majorée si et seulement si il existe un nombre réel M tel que pour tout entier naturel n , $u_n \leq M$.

Théorème : Toute suite croissante et majorée est convergente.

Théorème : soit f une fonction continue sur un intervalle I et (u_n) une suite à valeurs dans I , définie par son premier terme u_0 et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Alors, si la suite (u_n) converge vers une limite l et la fonction f est continue en l , le nombre l est solution de l'équation $f(l) = l$.

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{2+u_n}$.

- Démontrer par récurrence que, pour tout entier n , $0 \leq u_n \leq 1$.
- Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n , $u_{n+1} - u_n$ a le même signe que $u_n - u_{n-1}$. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .
- Démontrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite l .

- Initialisation : $u_0 = 0$ donc $0 \leq u_0 \leq 1$.

Hérédité : Si, pour un entier n , $0 \leq u_n \leq 1$, alors montrons que $0 \leq u_{n+1} \leq 1$.

On peut déjà affirmer que u_{n+1} est bien défini car $1 + u_n \geq 1 > 0$.

La première inégalité est évidente car la somme et le quotient (s'il existe) de nombres positifs ou nuls est un nombre positif ou nul.

$$1 - u_{n+1} = 1 - \frac{1+u_n}{2+u_n} = \frac{2+u_n-(1+u_n)}{2+u_n} = \frac{1}{2+u_n} \text{ et comme } u_n \geq 0, 1 - u_{n+1} \geq 0. \text{ On a donc bien } 0 \leq u_{n+1} \leq 1.$$

On peut donc affirmer que, pour tout entier n , $0 \leq u_n \leq 1$.

- Pour tout entier $n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1+u_n}{2+u_n} - \frac{1+u_{n-1}}{2+u_{n-1}} = \frac{(1+u_n)(2+u_{n-1}) - (2+u_n)(1+u_{n-1})}{(2+u_n)(2+u_{n-1})}$

$$\text{soit } u_{n+1} - u_n = \frac{2+2u_n+u_{n-1}+u_n u_{n-1} - (2+u_n+2u_{n-1}+u_n u_{n-1})}{(2+u_n)(2+u_{n-1})} = \frac{u_n - u_{n-1}}{(2+u_n)(2+u_{n-1})}.$$

Comme $2 + u_n > 0$ et $2 + u_{n-1} > 0$, on en déduit que $u_{n+1} - u_n$ a le même signe que $u_n - u_{n-1}$.

Montrons par récurrence que, pour tout entier n , $u_n \leq u_{n+1}$.

Initialisation : $u_0 = 0$ et $u_1 = \frac{1}{2}$ donc $u_0 \leq u_1$.

Hérédité : Si, pour un entier n , $u_n \leq u_{n+1}$ alors, comme, pour tout entier $k \geq 1$, $u_{k+1} - u_k$ a le même signe que $u_k - u_{k-1}$, $u_{n+1} \leq u_{n+2}$.

Donc, pour tout entier n , $u_n \leq u_{n+1}$. On en déduit que la suite (u_n) est croissante.

- La suite (u_n) est croissante et majorée par 1. Elle est donc convergente. De plus la suite (u_n) est à valeurs dans $[0,1]$ et la fonction $f: x \mapsto \frac{1+x}{2+x}$ est continue sur $[0,1]$. Tous les termes de la suite sont dans $[0,1]$. La limite l de la suite (u_n) est donc solution de l'équation $f(x) = x$ soit $x^2 + x - 1 = 0$. Les solutions de cette équation sont $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. De ces deux nombres, seul le deuxième est compris entre 0 et 1.

Conclusion : la suite (u_n) converge vers $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 2 – Suites adjacentes

Quelques principes de base et points de vigilance dans le traitement d'inégalités :

- (1) Pour comparer deux nombres on peut étudier le signe de leur différence.
- (2) On ne change pas le sens d'une inégalité en ajoutant le même nombre aux deux membres de cette inégalité.
- (3) On change le sens d'une inégalité en multipliant les deux membres d'une inégalité par un même nombre négatif.
- (4) Pour comparer deux nombres positifs, on peut comparer leurs carrés.

Quelques énoncés mathématiques :

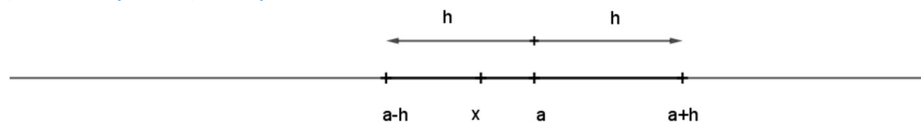
Définition : deux suites (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes lorsque l'une est croissante, l'autre décroissante et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0.$$

Propriété : deux suites adjacentes convergent vers la même limite.

Propriété (admise) : si la suite extraite des termes de rang pair et la suite extraite des termes de rang impair d'une suite (U_n) converge vers la même limite L , la suite (U_n) converge vers L .

Définition : Soit a et x deux nombres réels et soit h un réel strictement positif. On dit que a est une valeur approchée de x à la précision h (ou « à h près ») lorsque $a - h \leq x \leq a + h$.



Soit (a_n) une suite dont les termes sont positifs ou nuls, décroissante et convergeant vers 0.

Pour tout entier naturel n , on définit $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$.

On définit alors les deux suites (u_n) et (v_n) par, pour tout entier naturel n , $u_n = S_{2n}$ et $v_n = S_{2n+1}$

(les suites (u_n) et (v_n) sont appelées les suites extraites respectivement de rangs pairs et impairs de la suite (S_n))

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont des suites adjacentes.
2. En déduire la convergence de la suite (S_n) .
3. Soit $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$. Soit ε un réel strictement positif. Montrer que si $|S_n - S_{n+1}| \leq \varepsilon$, alors S_n et S_{n+1} sont des valeurs approchées de L à ε près.
4. a. Montrer que la suite $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1}$ est convergente. Soit $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.
b. Déterminer un entier n tel que S_n est une valeur approchée de L à 10^{-6} près.
c. Donner un encadrement de L d'amplitude inférieure ou égale à 0,01 par des nombres décimaux ayant trois chiffres après la virgule.

1. Pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k = (-1)^{2n+2} a_{2n+2} + (-1)^{2n+1} a_{2n+1} = a_{2n+2} - a_{2n+1}$$

La suite (a_n) est par hypothèse décroissante donc $a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0$

Pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n \leq 0$ donc la suite (u_n) est décroissante.

Pour tout entier naturel n ,

$$v_{n+1} - v_n = \sum_{k=0}^{2n+3} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a_k = (-1)^{2n+3} a_{2n+3} + (-1)^{2n+2} a_{2n+2} = -a_{2n+3} + a_{2n+2}$$

La suite (a_n) est par hypothèse décroissante donc $-a_{2n+3} + a_{2n+2} \geq 0$

Pour tout entier naturel n , $v_{n+1} - v_n \geq 0$ donc la suite (v_n) est croissante.

Pour tout entier naturel n ,

$$u_n - v_n = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a_k = -(-1)^{2n+1} a_{2n+1} = a_{2n+1}$$

Puisque la suite (a_n) converge vers 0, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{2n+1} = 0$; donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$

On a démontré que la suite (u_n) est décroissante, la suite (v_n) est croissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$ donc par définition, les suites (u_n) et (v_n) sont des suites adjacentes.

2. Les suites (u_n) (qui est en fait (S_{2n})) et (v_n) (qui est en fait (S_{2n+1})) sont les suites extraites de rangs pairs, respectivement impairs, de la suite (S_n) . Puisque (u_n) et (v_n) sont des suites adjacentes, elles convergent vers la même limite L . Par suite, la suite (S_n) converge vers cette limite L .

De plus, pour tous les entiers n et m , $v_n \leq L \leq u_m$. (*)

3. Si n est un entier pair, alors il existe un entier p tel que $n = 2p$ et $S_{n+1} = S_{2p+1} = v_p$, $S_n = S_{2p} = u_p$ donc, d'après (*), $S_{n+1} \leq L \leq S_n$.

Si n est un entier impair, alors il existe un entier p tel que $n = 2p + 1$ et $S_n = S_{2p+1} = v_p$, $S_{n+1} = S_{2p+2} = u_{p+1}$ donc, d'après (*), $S_n \leq L \leq S_{n+1}$.

Dans tous les cas $|S_n - L| \leq |S_n - S_{n+1}|$ et $|S_{n+1} - L| \leq |S_n - S_{n+1}|$ donc si $|S_n - S_{n+1}| \leq \varepsilon$, alors $|S_n - L| \leq \varepsilon$ et $|S_{n+1} - L| \leq \varepsilon$, ce qui signifie que S_n et S_{n+1} sont des valeurs approchées de L à ε près.

4. a. On définit la suite de terme général $a_n = \frac{1}{n+1}$; la suite (a_n) dont tous les termes sont positifs, est une suite décroissante qui converge vers 0. Donc la suite de terme général $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1}$ est une suite convergente d'après la propriété établie à la question 2.

b. Soit n un entier naturel. Pour que $|S_n - L| \leq 10^{-6}$, il suffit que $|S_n - S_{n+1}| \leq 10^{-6}$.

$$|S_n - S_{n+1}| = \left| \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k+1} \right| = \left| -\frac{(-1)^{n+1}}{n+2} \right| = \frac{1}{n+2} \text{ et } \frac{1}{n+2} \leq 10^{-6} \Leftrightarrow 10^6 \leq n+2 \Leftrightarrow 999\,998 \leq n$$

Pour tout entier naturel n tel que $n \geq 999\,998$, S_n est une valeur approchée de L à 10^{-6} près.

c. Pour obtenir un encadrement d'amplitude inférieure ou égale à 0,01, il suffit que $|S_n - S_{n+1}| \leq 0,01$ c'est-à-dire $\frac{1}{n+2} \leq 0,01$ soit $n \geq 98$.

On a en particulier $S_{99} \leq L \leq S_{98}$ avec $|S_{99} - S_{98}| = 0,01$

Un tableau de valeurs approchées de S_n à partir de $n = 98$ donne les valeurs suivantes :

n	$\frac{(-1)^n}{n+1}$	S_n	$ S_n - S_{n+1} $
98	0,01010101	0,69817218	0,01
99	-0,01	0,68817218	0,00990099
100	0,00990099	0,69807317	0,00980392
101	-0,00980392	0,68826925	0,00970874
102	0,00970874	0,69797799	0,00961538
103	-0,00961538	0,6883626	0,00952381
104	0,00952381	0,69788641	0,00943396

Avec $n = 98$, l'encadrement est $0,688 \leq L \leq 0,699$, en arrondissant u_{98} à 0,001 près par excès. L'amplitude de l'encadrement est alors 0,011. Il faut donc effectuer des essais en donnant à n des valeurs supérieures.

$n = 99$ donne : $0,688 \leq L \leq 0,699$

$n = 100$ donne : $0,688 \leq L \leq 0,699$

$n = 101$ donne : $0,688 \leq L \leq 0,698$ soit un encadrement d'amplitude 0,01

Remarque : Par d'autres méthodes, on peut prouver que la limite de la suite (S_n) est $\ln(2)$ dont une valeur décimale approchée à 10^{-8} près est 0,69314718

Exercice 3 – Recherche d'extremum et résolution d'une équation

Notions utiles :

- définition de la dérivabilité d'une fonction en un point ;
- théorème des valeurs intermédiaires. Cas des fonctions strictement monotones

Propriété : soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a, b]$ et $x_0 \in]a, b[$. La fonction f admet un extremum en x_0 si sa dérivée s'annule **en changeant de signe** en x_0 .

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $] -\infty, 1]$ par $f(x) = x\sqrt{1-x}$.

- Étudier la dérivabilité de la fonction f
 - sur l'intervalle $] -\infty, 1[$;
 - en 1.
- Préciser l'extremum de la fonction f sur l'intervalle $] -\infty, 1]$.
- Déterminer suivant les valeurs du nombre réel k , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$ sur l'intervalle $] -\infty, 1]$.

1. a. Par composition et produit et comme sur l'intervalle $]-\infty, 1[$, $1-x > 0$, la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-\infty, 1[$.

b. Pour tout nombre réel $h < 0$, $\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)\sqrt{-h}}{h} = -\frac{(1+h)\sqrt{-h}}{(\sqrt{-h})^2} = -\frac{(1+h)}{\sqrt{-h}}$.

$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} (1+h) = 1$ et $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \sqrt{-h} = 0$ avec $\sqrt{-h} > 0$ donc $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = -\infty$. On en déduit que la fonction f n'est pas dérivable en 1. En revanche, sa courbe représentative admet au point d'abscisse 1 une tangente verticale.

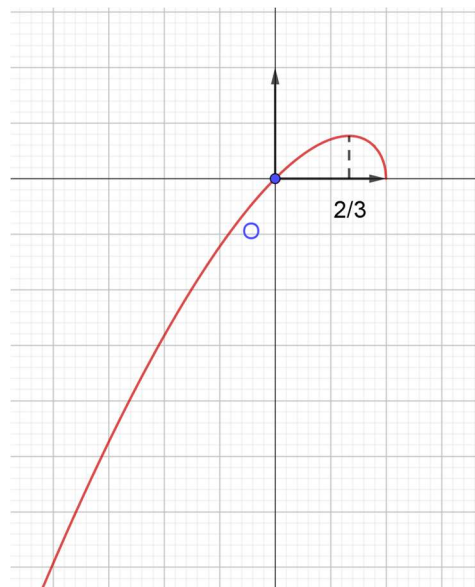
Remarque : puisqu'on se place à gauche de 1, il faut être vigilant dans les calculs sur le fait que $h < 0$ et qu'on ne peut donc qu'étudier la racine carrée de $-h$ (et non de h).

2. Pour tout nombre x de l'intervalle $]-\infty, 1[$.

$$f'(x) = 1\sqrt{1-x} + \frac{x \times (-1)}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2(1-x)-x}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}.$$

Donc $f'(x)$ a le signe de $2-3x$. On en déduit le tableau de variation

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	1
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$	0



On en déduit que la fonction f admet un maximum en $\frac{2}{3}$ et ce maximum

$$\text{vaut } f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}\sqrt{1-\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

3. Le nombre $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$ est le maximum de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty, 1[$. Donc si $k > \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$ alors l'équation $f(x) = k$ n'admet pas de solution sur $]-\infty, 1[$.

D'autre part, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1-x} = +\infty$ donc, par produit $\lim_{x \rightarrow -\infty} x\sqrt{1-x} = -\infty$.

Sur l'intervalle $]-\infty, \frac{2}{3}]$, la fonction f est continue (car dérivable) et strictement croissante. De plus

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$. On en déduit que si $k < \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$ alors l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans l'intervalle $]-\infty, \frac{2}{3}]$.

Sur l'intervalle $[\frac{2}{3}, 1]$, la fonction f est continue (car dérivable) et strictement décroissante. De plus $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$

et $f(1) = 0$. On en déduit que si $0 \leq k < \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$ alors l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans l'intervalle $[\frac{2}{3}, 1]$.

Et l'équation $f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$ admet une solution unique : $\frac{2}{3}$.

Au final :

- si $k < 0$ alors l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution, solution appartenant à $]-\infty, \frac{2}{3}]$;
- si $0 \leq k < \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$ alors l'équation $f(x) = k$ admet deux solutions, l'une dans $]-\infty, \frac{2}{3}]$, l'autre dans $[\frac{2}{3}, 1]$;
- si $k = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$ alors l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution, le nombre $\frac{2}{3}$;
- si $k > \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$ alors l'équation $f(x) = k$ n'admet pas de solution sur $]-\infty, 1[$.

Exercice 4 – Une équation fonctionnelle pour définir le logarithme népérien

La fonction logarithme népérien a été définie en classe comme fonction réciproque de la fonction exponentielle et elle a pour dérivée la fonction inverse.

On sait que pour tous nombres strictement positifs a et b , $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ et $\ln e = 1$.

On montre que ces deux propriétés caractérisent en fait la fonction logarithme népérien.

On admettra que si deux fonctions f et g ont la même fonction dérivée alors il existe un réel k tel que pour tout réel x , $f(x) = g(x) + k$.

On cherche toutes les fonctions f dérivables sur $]0, +\infty[$ et telles que pour tous nombres réels $a > 0$ et $b > 0$:

$$(1) \quad f(ab) = f(a) + f(b).$$

1. Calculer $f(1)$.
2. Pour tout nombre réel $a > 0$, on considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = f(ax) - f(x)$ où f est une fonction dérivable vérifiant (1). Que peut-on dire des variations de la fonction g ?
3. Montrer que g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et exprimer $g'(x)$.
4. Si on pose $f'(1) = k$, montrer que pour tout nombre réel $x > 0$, $f(x) = k \ln x$.
5. Conclure sur la caractérisation de la fonction logarithme népérien.

1. Si on écrit l'égalité (1) pour $a = b = 1$, on obtient $f(1) = 2f(1)$ d'où $f(1) = 0$.
2. D'après l'égalité (1), pour tout réel $x > 0$, $g(x) = f(a) + f(x) - f(x) = f(a)$ donc g est une fonction constante.
3. Comme somme et composition de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$, la fonction g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$, on a $g'(x) = af'(ax) - f'(x)$.
4. Comme g est une fonction constante, on en déduit que pour tout réel $x > 0$, $af'(ax) - f'(x) = 0$
En particulier, pour tout nombre réel $a > 0$, $af'(a) - f'(1) = 0$ soit, si on pose $f'(1) = k$, $f'(a) = \frac{k}{a}$.
La fonction f a donc même dérivée que la fonction $h: x \mapsto k \ln x$.
Or $f(1) = 0 = h(1)$, on en déduit que $f = h$.
5. Si on a de plus $f(e) = 1$ alors $k \ln e = 1$ soit $k = 1$ et f est la fonction logarithme népérien.

Dans tout exercice de géométrie, on commence par faire une figure.

Exercice 5 – Deux méthodes pour un même problème

Soit ABC un triangle et I, J, K les points tels que A est le milieu de [JC], B est le milieu de [AK] et C est le milieu de [IB]. On construit les points P, Q, R définis par $\overrightarrow{KP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{KJ}$, $\overrightarrow{IQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{JR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{JI}$.

On veut montrer que les points P, Q, R sont les points d'intersection respectivement de (BC) et (KI), (AC) et (KI), (AB) et (IJ).

Première méthode

1. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AJ}$, $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AQ}$, $\overrightarrow{AR}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. On se place dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Déterminer les coordonnées des points A, B, C, I, J, K, P, Q, R dans ce repère.
3. Conclure.

Deuxième méthode :

Barycentre de points pondérés

Définition : Soit n points du plan notés $A_1, A_2, \dots, A_n$ et n réels notés $a_1, a_2, \dots, a_n$. On appelle *fonction vectorielle de Leibniz* la fonction $\vec{f}$ qui à tout point M du plan associe le vecteur :

$$\vec{f}(M) = a_1 \overrightarrow{MA_1} + a_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + a_n \overrightarrow{MA_n} = \sum_{i=1}^n a_i \overrightarrow{MA_i}$$

1. a. On pose $m = \sum_{i=1}^n a_i$. Montrer que si O est un point fixé du plan alors, pour tout point M du plan, $\vec{f}(M) = \vec{f}(O) + m\overrightarrow{MO}$.
b. Démontrer que si $\sum_{i=1}^n a_i \neq 0$, alors il existe un unique point G du plan tel que $\vec{f}(G) = \vec{0}$.

Ce point G est alors appelé le barycentre des points pondérés $(A_1, a_1), (A_2, a_2), \dots, (A_n, a_n)$ et on appelle masse du système de ces n points pondérés la somme $m = \sum_{i=1}^n a_i$ de leurs coefficients.

2. a. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{A_1G}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{A_1A_i}$ pour $2 \leq i \leq n$.

- b. Dans le cas particulier où $n = 2$ et $a_1 = a_2 = 1$, que représente le point G pour les points A_1 et A_2 ?
- c. Dans le cas particulier où $n = 3$ et $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, que représente le point G pour les points A_1, A_2 et A_3 ?
- d. Construire le barycentre G de deux points pondérés $(A, 1), (B, 2)$.

On admet les propriétés (très utiles pour résoudre la question 3) :

Propriété 1 : Si G est le barycentre des points pondérés $(A_1, a_1), (A_2, a_2)$ alors le point G est aligné avec les points A_1 et A_2 .

Propriété 2 : Si λ est un réel non nul et si G est le barycentre des points pondérés $(A_1, a_1), (A_2, a_2), \dots, (A_n, a_n)$ alors G est aussi le barycentre des points pondérés $(A_1, \lambda a_1), (A_2, \lambda a_2), \dots, (A_n, \lambda a_n)$.

Propriété 3 : Associativité du barycentre : le barycentre de 4 points pondérés ne change pas lorsqu'on remplace 2 d'entre eux, dont la somme m' de leurs coefficients est non nulle, par leur barycentre D affecté du coefficient m' . Grâce à des regroupements judicieux de points pondérés, cette propriété permet de démontrer que des droites sont concourantes ou que des points sont alignés.

Retour à l'exercice

3. a. Montrer que le point I est le barycentre des points pondérés $(B, 1)$ et $(C, -2)$. Exprimer de même les points J et K comme barycentres.
- b. Montrer que le point P est le barycentre des points pondérés $(J, 1)$ et $(K, 2)$. Exprimer de même les points Q et R comme barycentres.
- c. En utilisant la propriété d'associativité, en déduire que le point P est le barycentre des points B et C affectés de coefficients à déterminer.
- d. En déduire que le point P est le point d'intersection des droites (BC) et (KI) et conclure.

Première méthode

1. $\vec{AI} = \vec{AB} + \vec{BI} = \vec{AB} + 2\vec{BC}$ car C est le milieu de [BI]

Donc $\vec{AI} = \vec{AB} + 2(\vec{BA} + \vec{AC}) = -\vec{AB} + 2\vec{AC}$.

$\vec{AJ} = -\vec{AC}$ car A est le milieu de [CJ] et $\vec{AK} = 2\vec{AB}$ car B est le milieu de [AK].

$$\vec{AP} = \vec{AK} + \vec{KP} = 2\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{KJ} = 2\vec{AB} + \frac{1}{3}(-\vec{AK} + \vec{AJ})$$

$$\text{Soit } \vec{AP} = 2\vec{AB} - \frac{1}{3} \times 2\vec{AB} - \frac{1}{3} \times \vec{AC} = \frac{4}{3}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AC}.$$

$$\vec{AQ} = \vec{AI} + \vec{IQ} = -\vec{AB} + 2\vec{AC} + \frac{1}{3}\vec{IK} = -\vec{AB} + 2\vec{AC} + \frac{1}{3}(-\vec{AI} + \vec{AK})$$

$$\text{Soit } \vec{AQ} = -\vec{AB} + 2\vec{AC} - \frac{1}{3}(-\vec{AB} + 2\vec{AC}) + \frac{1}{3}(2\vec{AB}) = \frac{4}{3}\vec{AC}$$

$$\vec{AR} = \vec{AJ} + \vec{JR} = -\vec{AC} + \frac{1}{3}\vec{JI} = -\vec{AC} + \frac{1}{3}(-\vec{AJ} + \vec{AI}) = -\vec{AC} + \frac{1}{3}\vec{AC} + \frac{1}{3}(-\vec{AB} + 2\vec{AC}) = -\frac{1}{3}\vec{AB}$$

2. Dans le repère $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$ on a déjà $A(0,0), B(1,0), C(0,1)$. D'autre part :

$$\vec{AI} = -\vec{AB} + 2\vec{AC}, \vec{AJ} = -\vec{AC} \text{ et } \vec{AK} = 2\vec{AB} \text{ d'où on déduit } I(-1,2), J(0,-1) \text{ et } K(2,0);$$

$$\vec{AP} = \frac{4}{3}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AC}, \vec{AQ} = \frac{4}{3}\vec{AC} \text{ et } \vec{AR} = -\frac{1}{3}\vec{AB} \text{ d'où on déduit } P\left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right), Q\left(0, \frac{4}{3}\right) \text{ et } R\left(-\frac{1}{3}, 0\right).$$

3. On a, d'une part, $\vec{BC} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{BP} \begin{pmatrix} \frac{4}{3} - 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ soit $\vec{BP} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et on constate que $\det(\vec{BC}, \vec{BP}) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$ et, d'autre

$$\text{part } \vec{KJ} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{KP} \begin{pmatrix} \frac{4}{3} - 2 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ soit } \vec{KP} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ et on constate que } \det(\vec{KJ}, \vec{KP}) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0. \text{ On en déduit que le}$$

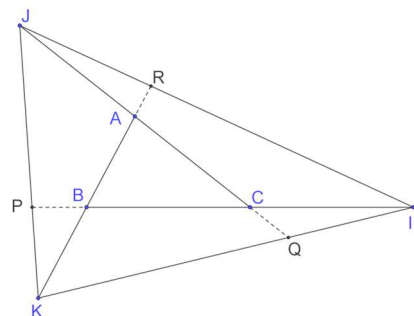
point P est bien le point d'intersection des droites (BC) et (KJ).

$$\text{De même, on a } \vec{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{AQ} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} \text{ et on constate que } \det(\vec{AC}, \vec{AQ}) = 0 \text{ et, d'autre part } \vec{KI} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{KQ} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} \text{ et}$$

on constate que $\det(\vec{KI}, \vec{KQ}) = -4 + 4 = 0$. On en déduit que le point Q est bien le point d'intersection des droites (AC) et (KI).

$$\text{De même, on a } \vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{AR} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et on constate que } \det(\vec{AB}, \vec{AR}) = 0 \text{ et, d'autre part } \vec{JI} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{JR} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et}$$

on constate que $\det(\vec{JI}, \vec{JR}) = -1 + 1 = 0$. On en déduit que le point R est bien le point d'intersection des droites (AB) et (JI).



Deuxième méthode

1. a. Soit O un point du plan. D'après la relation de Chasles,

$$\vec{f}(M) = \sum_{i=1}^{i=n} a_i \overrightarrow{MA_i} = \sum_{i=1}^{i=n} a_i \overrightarrow{MO} + \sum_{i=1}^{i=n} a_i \overrightarrow{OA_i} = (\sum_{i=1}^{i=n} a_i) \overrightarrow{MO} + \sum_{i=1}^{i=n} a_i \overrightarrow{OA_i} = m \overrightarrow{MO} + \vec{f}(O)$$

b. $\vec{f}(G) = \vec{0}$ équivaut, d'après la question précédente, à $m \overrightarrow{GO} + \vec{f}(O) = \vec{0}$ soit $m \overrightarrow{OG} = \vec{f}(O)$.

Comme $m \neq 0$, cela s'écrit $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m} \vec{f}(O)$. O et $\vec{f}(O)$ sont fixés donc il existe bien un unique point G du plan tel que $\vec{f}(G) = \vec{0}$.

2. a. $\vec{f}(G) = \vec{0}$ s'écrit $a_1 \overrightarrow{GA_1} + a_2 \overrightarrow{GA_2} + \dots + a_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$

$$\text{soit } a_1 \overrightarrow{GA_1} + a_2 (\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{A_1A_2}) + \dots + a_n (\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{A_1A_n}) = \vec{0}$$

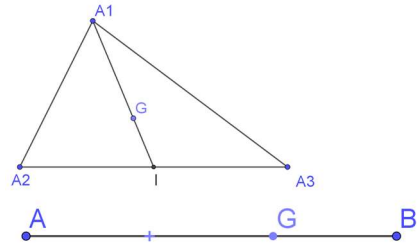
$$\text{soit } (\sum_{i=1}^{i=n} a_i) \overrightarrow{GA_1} + a_2 \overrightarrow{A_1A_2} + \dots + a_n \overrightarrow{A_1A_n} = \vec{0}$$

$$\text{soit, puisque } \sum_{i=1}^{i=n} a_i \neq 0, \overrightarrow{A_1G} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{i=n} a_i} (a_2 \overrightarrow{A_1A_2} + \dots + a_n \overrightarrow{A_1A_n}) = \frac{1}{m} (a_2 \overrightarrow{A_1A_2} + \dots + a_n \overrightarrow{A_1A_n}).$$

b. Si $n = 2$ et $a_1 = a_2 = 1$, alors $\overrightarrow{A_1G} = \frac{1}{2} \overrightarrow{A_1A_2}$ c'est-à-dire G est le milieu de $[A_1A_2]$.

c. Si $n = 3$ et $a_1 = a_2 = a_3 = 1$,

alors $\overrightarrow{A_1G} = \frac{1}{3} \overrightarrow{A_1A_2} + \frac{1}{3} \overrightarrow{A_1A_3} = \frac{2}{3} \overrightarrow{A_1I}$ si I désigne le milieu de $[A_2A_3]$ ce qui signifie que G est le centre de gravité du triangle $A_1A_2A_3$.



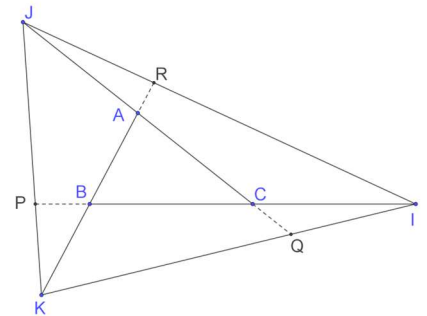
d. Si G est le barycentre de deux points pondérés (A, 1), (B, 2), alors $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}$.

3. a. Le point I est défini par C est le milieu de $[IB]$ ce qui s'écrit $\vec{BI} = 2\vec{BC}$

Soit $\vec{BI} = \frac{-2}{-2+1} \vec{BC}$. On en déduit que I est le barycentre des points pondérés (B, 1) et (C, -2).

De même J est le barycentre des points pondérés (C, 1) et (A, -2) et K est le barycentre des points pondérés (A, 1) et (B, -2).

b. Le point P est défini par $\overrightarrow{KP} = \frac{1}{3} \overrightarrow{KJ}$ soit $\overrightarrow{KP} = \frac{1}{2+1} \overrightarrow{KJ}$ ce qui signifie que P est le barycentre des points pondérés (K, 2) et (J, 1). De même Q est le barycentre des points pondérés (I, 2) et (K, 1) et R est le barycentre des



points pondérés (J, 2) et (I, 1).

c. On a vu que P est le barycentre des points pondérés (K, 2) et (J, 1), que J est le barycentre des points pondérés (C, 1) et (A, -2) et que K est le barycentre des points pondérés (A, 1) et (B, -2).

En utilisant la propriété 2, on peut donc aussi dire que J est le barycentre des points pondérés (C, -1) et (A, 2) et que K est le barycentre des points pondérés (A, -2) et (B, 4).

En utilisant l'associativité du barycentre, comme $2 - 1 = 1$ (coefficient de J) et $-2 + 4 = 2$ (coefficient de K) on en déduit que P est le barycentre des points A (affecté du coefficient $2 - 2 = 0$), B (affecté du coefficient 4) et C (affecté du coefficient -1) soit P est le barycentre des points pondérés (B, 4) et (C, -1).

d. Le point P est le barycentre des points pondérés (K, 2) et (J, 1) donc d'après la propriété 1, il appartient à la droite (KJ). Le point P est aussi le barycentre des points pondérés (B, 4) et (C, -1) donc, d'après la propriété 1, il appartient aussi à la droite (BC). Conclusion le point P est le point d'intersection des droites (BC) et (KJ).

On démontrerait de même que les points Q, R sont les points d'intersection respectivement de (AC) et (KI), (AB) et (IJ).

Exercice 6 – Orthogonalité dans l'espace

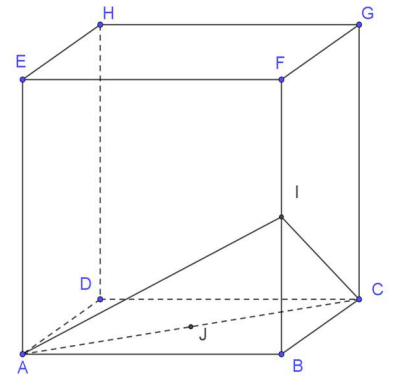
En géométrie vectorielle, on rappelle que :

- la colinéarité de deux vecteurs permet de démontrer un alignement de points ;
- la nullité d'un produit scalaire permet de démontrer une orthogonalité.

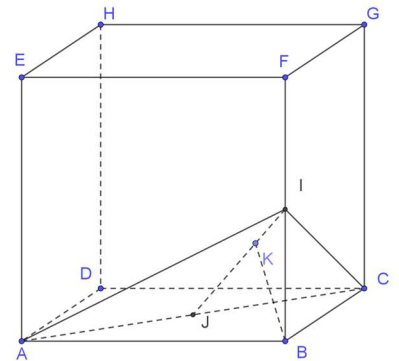
En géométrie affine, on rappelle que :

- si une droite de l'espace est orthogonale à un plan alors elle est orthogonale à toute droite de ce plan ;
- si une droite de l'espace est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan, alors elle est orthogonale à ce plan.

Soit ABCDEFG un cube d'arêtes de longueur 1 et soit I et J les milieux des segments [BF] et [AC]. On considère le point K défini par $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{6}\overrightarrow{CA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CI}$.



1. Montrer que $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IJ}$. Que peut-on en déduire pour les points I, J, K ?
2. a. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{CK} \cdot \overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{CK} \cdot \overrightarrow{BA}$. En déduire que $\overrightarrow{CK} \cdot \overrightarrow{IA} = 0$.
b. Déterminer la nature du triangle ACI.
c. En déduire que le point K est l'orthocentre du triangle ACI.
3. a. Montrer que $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{IC} = 0$ et que $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{IA} = 0$.
b. En déduire que le point K est le projeté orthogonal du point B sur le plan (IAC).



1. $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CK} = \overrightarrow{IC} + \frac{1}{6}\overrightarrow{CA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CJ}$ puisque J est le milieu de [AC].
Donc $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CJ}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{IJ}$.

On en déduit que les points I, J, K sont alignés.

2. a. $\overrightarrow{CK} \cdot \overrightarrow{BI} = \left(\frac{1}{6}\overrightarrow{CA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CI}\right) \cdot \overrightarrow{BI} = \frac{1}{6}\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BI} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{BI}$

Or la droite (BI) (arête du cube) est orthogonale au plan de la face ABCD donc à toute droite de ce plan d'où $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BI} = 0$.

D'autre part, B est le projeté orthogonal de C sur (BI) donc $\frac{2}{3}\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{BI} = \frac{2}{3}BI^2$ soit

$\frac{2}{3}\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{BI} = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{6}$ puisque les arêtes du cube ont pour longueur 1 et I est le milieu de [BF].

De même, $\overrightarrow{CK} \cdot \overrightarrow{BA} = \left(\frac{1}{6}\overrightarrow{CA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CI}\right) \cdot \overrightarrow{BA} = \frac{1}{6}\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{BA} = \frac{1}{6}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA} + \frac{2}{3} \times 0$ car B est le projeté orthogonal de C sur (BA) et la droite (AB) est orthogonale au plan de la face BCGF donc à la droite (CI) située dans ce plan.

Donc $\overrightarrow{CK} \cdot \overrightarrow{BA} = \frac{1}{6}$.

$\overrightarrow{CK} \cdot \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{CK} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{CK} \cdot \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{CK} \cdot \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CK} \cdot \overrightarrow{BA} = -\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 0$. On en déduit que la droite (CK) est orthogonale à la droite (IA).

b. En se plaçant dans les triangles ABI et CBI rectangles en I et en appliquant le théorème de Pythagore, on obtient $IA = IC = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ donc le triangle ACI est isocèle en I.

c. Le triangle ACI est isocèle en I et J est le milieu de sa base [AC]. De plus, la droite (CK) est orthogonale à la droite (IA) et le point K est sur la droite (IJ), les points C, K, I, A sont coplanaires. La droite (CK) est donc la hauteur issue de C dans le triangle ACI. Le point K, point d'intersection de deux hauteurs est donc l'orthocentre du triangle ACI.

3. a. $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{IC} = (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CK}) \cdot \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CK} \cdot \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} + \left(\frac{1}{6}\overrightarrow{CA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CI}\right) \cdot \overrightarrow{IC}$ car B est le projeté orthogonal de C sur (BI).

$$\text{donc } \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{IC} = BC^2 + \frac{1}{6}\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{IC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{IC} = 1 + \frac{1}{6}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}) \cdot \overrightarrow{IC} - \frac{2}{3}CI^2 = 1 + \frac{1}{6}\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{IC} + \frac{1}{6}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{IC} - \frac{2}{3} \times \frac{5}{4}$$

$$\text{soit } \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{IC} = 1 - \frac{1}{6}CB^2 + 0 - \frac{5}{6} \text{ car B est le projeté orthogonal de I sur (BC)}$$

$$\text{soit } \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{IC} = 1 - \frac{1}{6} - \frac{5}{6} = 0.$$

De même $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{IA} = (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CK}) \cdot \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{CK} \cdot \overrightarrow{IA} = 0 + \left(\frac{1}{6}\overrightarrow{CA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CI}\right) \cdot \overrightarrow{IA}$ car la droite (BC) est perpendiculaire au plan de la face ABFE donc à toute droite de ce plan.

$$\text{Donc } \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{IA} = \frac{1}{6}\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{IA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{IA} = \frac{1}{6}\overrightarrow{CA} \cdot (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BA}) + \frac{2}{3}\overrightarrow{CI} \cdot (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BA})$$

$$\text{soit } \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{IA} = \frac{1}{6}\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{IB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{IB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{BA} = 0 + \frac{1}{6}BA^2 - \frac{2}{3}BI^2 + \frac{2}{3} \times 0 = \frac{1}{6} - \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \times 0 = 0.$$

b. D'après la question précédente, la droite (BK) est orthogonale aux droites (IC) et (IA) qui sont sécantes donc elle est orthogonale au plan (AIC). Comme K est un point de ce plan, on en déduit que le point K est le projeté orthogonal du point B sur le plan (AIC).