ACADÉMIE DE VERSAILLES
Liberté Égalité Fraternité

Pépinière académique de mathématiques

Année 2024-2025 **Stage « filé »**

Classe de terminale **Fiche numéro 1**

Parution lundi 4 novembre **Retour attendu pour le lundi 25 novembre**

Dans cette fiche, chaque énoncé d'exercice est précédé de quelques rappels constituant des outils pour traiter l'exercice.

Dans cette fiche, un raisonnement est régulièrement utilisé pour démontrer qu'une proposition P_n, dépendant d'un entier $n \geq n_0$, où n_0 est un entier fixé, est vraie pour tout entier $n \geq n_0$. Il s'agit du *raisonnement par récurrence* :

- On vérifie que la proposition P_n est vraie pour $n = n_0$ (initialisation) ;
- On montre que si la proposition P_n est vraie pour un entier n, alors la proposition P_{n+1} est encore vraie (hérédité).

On peut alors en déduire que la proposition P_n est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

On rappelle aussi les théorèmes suivants :

Théorème de la convergence monotone : toute suite croissante majorée est convergente.
toute suite décroissante minorée est convergente.

Théorème de comparaison des limites : soit (u_n) et (v_n) des suites convergeant respectivement vers les réels L et L'. Si pour tout entier naturel n, $u_n \leq v_n$, alors $L \leq L'$.

Exercice 1 : suites « télescopiques » et applications

1. Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, la propriété suivante :

Propriété : soit une suite (u_n) et soit la suite (v_n) de terme général $v_n = u_n - u_{n+1}$.
Soit n_0 un entier naturel et la suite (S_n) définie pour tout entier naturel n $(n \geq n_0)$ par $S_n = \sum_{k=n_0}^{k=n} v_k$.
Alors pour tout entier naturel n $(n \geq n_0)$, $S_n = u_{n_0} - u_{n+1}$.

Remarque : une fois démontrée, la propriété précédente permettra d'écrire :
$S_n = u_{n_0} - u_{n_0+1} + u_{n_0+1} - u_{n_0+2} + \quad \ldots \quad + u_{n-1} - u_n + u_n - u_{n+1} = u_{n_0} - u_{n+1}$
Le terme u_k de la suite « télescope », c'est-à-dire heurte symboliquement le terme $-u_k$ et leur somme donne 0.
D'où le nom de « suite télescopique » donné à toute suite construite sur le principe de la suite (v_n)..

2. a. Déterminer un couple (a, b) de nombres réels tel que pour tout entier naturel k non nul, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} - \frac{b}{k+1}$.

b. Pour tout entier naturel n non nul, exprimer $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+1)}$ en fonction de l'entier n.

c. Calculer, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $\sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k(k-1)}$.

3. a. Prouver que pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, $\frac{1}{k(k+1)} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$.

b. Pour tout entier naturel n non nul, on définit $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$. Montrer que $\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} \leq S_n \leq 2 - \frac{1}{n}$.

4. Etudier le sens de variation de la suite (S_n) et en déduire que la suite (S_n) converge vers un nombre réel L vérifiant $L \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$.

5. Application : soit b et c des nombres réels positifs ou nuls. On définit la suite de terme général $T_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2+bk+c}$.

a. Démontrer que la suite (T_n) est croissante.

b. En déduire que la suite (T_n) est convergente.

c. Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2. Démontrer que $\forall n \in \mathbf{N}^*, n^p \geq n^2$. En déduire que la suite de terme général $R_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^p}$ est convergente.

1. Pour tout entier naturel n tel que $n \geq n_0$, on considère la proposition P_n : « $S_n = u_{n_0} - u_{n+1}$ ».

Initialisation

Pour $n = n_0$, par définition, $S_{n_0} = \sum_{k=n_0}^{k=n_0} v_k = v_{n_0} = u_{n_0} - u_{n_0+1}$ ce qui est la proposition P_{n_0}.

Hérédité

Si, pour un entier naturel n tel que $n \geq n_0$, la proposition P_n est vérifiée alors :
par définition, $S_{n+1} = \sum_{k=n_0}^{k=n+1} v_k = \sum_{k=n_0}^{k=n} v_k + v_{n+1}$ donc, par application de l'hypothèse de récurrence

$S_{n+1} = u_{n_0} - u_{n+1} + v_{n+1}$
Donc $S_{n+1} = u_{n_0} - u_{n+1} + u_{n+1} - u_{n+2} = u_{n_0} - u_{n+2}$ ce qui prouve que la proposition P_{n+1} est vérifiée.
Conclusion : par le principe de récurrence, on a prouvé que

pour tout entier naturel n tel que $n \geq n_0$, $S_n = u_{n_0} - u_{n+1}$

2. a. Soient a et b des nombres réels.
$\forall k \in \mathbf{N}^*, \frac{a}{k} - \frac{b}{k+1} = \frac{a(k+1)-bk}{k(k+1)} = \frac{(a-b)k+a}{k(k+1)}$. On note qu'en choisissant $a = b = 1$, on obtient $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$.

b. Soit n un entier naturel non nul. $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$ est une suite télescopique où $n_0 = 1$ et $u_n = \frac{1}{n}$
.
Par application de la propriété établie à la question **1.**, $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

c. Soit k un entier naturel tel que $k \geq 2$, $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{k(k-1)}$.
En appliquant la propriété établie à la question **1.**, pour tout entier naturel n ($n \geq 2$),
$\sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{k=n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{1}{n}$.

3. a. Pour tout k un entier naturel tel que $k \geq 2$, $0 < k-1 \leq k \leq k+1$.
En multipliant chaque terme par k qui est positif, on obtient $0 < k(k-1) \leq k^2 \leq k(k+1)$.
Par application de la fonction inverse, strictement décroissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$, on obtient
$\frac{1}{k(k+1)} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$.

b. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Ecrivons les $n-1$ encadrements précédents :
pour $k = 2$, $\frac{1}{2(2+1)} \leq \frac{1}{2^2} \leq \frac{1}{2(2-1)}$
pour $k = 3$, $\frac{1}{3(3+1)} \leq \frac{1}{3^2} \leq \frac{1}{3(3-1)}$
……….
Pour $k = n$, $\frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$
Par addition terme à terme des encadrements, on obtient $\sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k(k+1)} \leq \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k(k-1)}$
En additionnant 1 à tous les termes $1 + \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k(k+1)} \leq 1 + \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k(k-1)}$
Soit $\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+1)} \leq \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k(k-1)}$ c'est-à-dire $\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{n+1} \leq S_n \leq 1 + 1 - \frac{1}{n}$.
Finalement, pour tout $n \geq 2$, $\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} \leq S_n \leq 2 - \frac{1}{n}$.
Notons de plus que, pour $n = 1$, l'inégalité devient $1 \leq S_1 \leq 1$ ce qui est vrai.

4. Pour tout entier naturel n non nul, $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2}$ est positif, donc la suite (S_n) est croissante.
Pour tout entier naturel n non nul, $S_n \leq 2 - \frac{1}{n} \leq 2$ car $\frac{1}{n} > 0$, donc la suite (S_n) est majorée par 2.
D'après le théorème de la convergence monotone, la suite (S_n) est convergente. Soit $L = \lim\limits_{n \to \infty} S_n$
De plus $\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} \leq S_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ et $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{3}{2}$ et $\lim\limits_{n \to \infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2$; par conservation de l'ordre par passage à la limite : $\frac{3}{2} \leq L \leq 2$

5. a. Pour tout entier naturel n non nul, $T_{n+1} - T_n = \frac{1}{n^2+bn+c}$ qui est un nombre stictement positif car $b \geq 0, c \geq 0$ et $n > 0$. La suite (T_n) est donc croissante.

b. $\forall k \in \mathbf{N}^*, k^2 + bk + c \geq k^2$ donc $\frac{1}{k^2+bk+c} \leq \frac{1}{k^2}$. Soit n un entier naturel non nul. En faisant varier k de 1 à n et en additionnant membre à membre les inégalités précédentes, on obtient $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2+bk+c} \leq \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$ c'est-à-dire $T_n \leq S_n$. La suite (S_n) étant majorée par 2, (T_n) est aussi majorée par 2. La suite (T_n) étant croissante et majorée, la suite (T_n) est convergente.

c. Soit p un entier naturel tel que $p \geq 2$. Alors $p - 2 \geq 0$.
Pour tout entier naturel k non nul, $k \geq 1 \Rightarrow k^{p-2} \geq 1$; d'où $k^p \geq k^2 > 0$ en multipliant les termes par k^2.
On en déduit $\frac{1}{k^p} \leq \frac{1}{k^2}$. Soit n un entier naturel non nul, par addition des n inégalités précédentes pour k allant de 1 à n, on obtient $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^p} \leq \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$ c'est-à-dire $R_n \leq S_n$. La suite (S_n) est majorée par 2 donc la suite (R_n) est aussi majorée par 2.
De plus, $\forall n \in \mathbf{N}^*, R_{n+1} - R_n = \frac{1}{(n+1)^p}$ est positif donc la suite (R_n) est croissante.
La suite (R_n) étant croissante et majorée, elle est convergente.

Exercice 2 – Sommes et limites

Rappels :

- Pour comparer deux expressions, on étudie souvent le signe de la différence.
- Si une factorisation semble impossible on peut se ramener à étudier le sens de variation d'une fonction pour en déduire son signe.

Soit les suites définies sur $\mathbf{N}^*$:

(u_n) de terme général $u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ et (v_n) de terme général. $v_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$.

1. **a.** Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

b. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$.

c. En déduire que la suite (u_n) converge et donner un majorant de sa limite.

2. **a.** Montrer que pour tout réel positif $u, \ln(1+u) \leq u$.

b. En déduire que pour tout entier naturel non nul k, $\ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$.

c. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $v_n \geq \ln(1+n)$ et en déduire le comportement à l'infini de la suite (v_n).

1. **a.** Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2}$ qui est un nombre positif. La suite (u_n) est donc croissante.

b. Soit la proposition P_n : « $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ ».

Initialisation : pour $n = 1$, $u_0 = 1$ et $2 - \frac{1}{n} = 2$ donc P_1 est vérifiée.

Hérédité : si, pour un entier naturel non nul n, P_n est vérifiée c'est-à- dire $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$,

alors montrons que $u_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$ c'est-à-dire $u_n + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$.

Comme $u_n + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$ on va comparer $2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$ et $2 - \frac{1}{n+1}$ en étudiant la différence

$\Delta = \left(2 - \frac{1}{n+1}\right) - \left(2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}\right)$

$$\Delta = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n(n+1)^2}(-n(n+1) + (n+1)^2 - n) = \frac{1}{n(n+1)^2}(-n^2 - n + n^2 + 2n + 1 - n)$$

Soit $\Delta = \frac{1}{n(n+1)^2}$. Comme $\Delta > 0$, on a bien $u_n + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$ soit P_{n+1} est vérifiée.

Donc, pour tout entier naturel non nul n, $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$.

c. Comme, pour un entier naturel non nul n, $2 - \frac{1}{n} \leq 2$, on en déduit que la suite est majorée par 2. Comme elle de plus croissante, la suite (u_n) est convergente.

Remarque : on peut démontrer que $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{\pi^2}{6}$.

2. **a.** Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(u) = \ln(1+u) - u$. f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour tout réel positif u, $f'(u) = \frac{1}{1+u} - 1 = \frac{1-1-u}{1+u} = -\frac{u}{1+u}$. On en déduit que pour tout réel positif u, $f'(u) \leq 0$ et donc que f est décroissante sur $[0, +\infty[$. Or $f(0) = \ln 2 - 1$ donc $f(0) < 0$.

Par conséquent, pour tout réel positif u, $f(u) \leq 0$ soit $\ln(1+u) \leq u$.

b. Pour tout entier non nul k, $\ln(k+1) - \ln k = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$. En appliquant le résultat du a. au nombre positif $\frac{1}{k}$, on obtient bien $\ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$.

c. En faisant varier k de 1 à n et en ajoutant membre à membre les inégalités obtenues, on obtient :

$$(\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + (\ln 4 - \ln 3) + \cdots + (\ln n - \ln(n-1)) + (\ln(n+1) - \ln n) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

(somme télescopique)

Soit, puisque $\ln 1 = 0$, $\ln(n+1) \leq v_n$.

Comme $\lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = +\infty$, on en déduit que la suite (v_n) diverge vers $+\infty$.

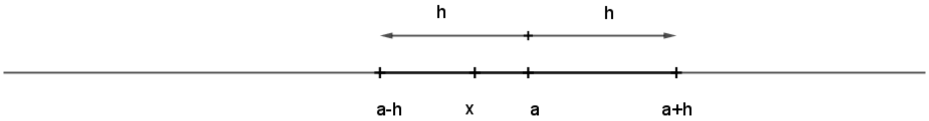
Exercice 3 – Limites de suites et valeurs approchées

Définitions :

- on dit qu'une suite (u_n) converge vers un nombre réel a lorsque tout intervalle ouvert contenant a contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
- un intervalle I est dit ouvert centré en a lorsqu'il existe un réel h strictement positif tel que $I =]a-h, a+h[$.

Propriété : soit a un réel et h un réel strictement positif, $x \in]a-h, a+h[$ équivaut à $|a - x| < h$.

Définition : soit a et x deux nombres réels et soit h un réel strictement positif. On dit que a est une valeur approchée de x à la précision h (ou « à h près ») lorsque $a-h<x<a+h$.



On obtient un encadrement de x de longueur $2h$.
Cela signifie que la distance entre les réels a et x est inférieure ou égale à h, c'est-à-dire $|a-x|<h$.
Comme $|a-x|=|x-a|$, cela signifie aussi que x est une valeur approchée de a à h près.

Dans les études de suites convergentes, terme général et limite sont valeurs approchées l'un de l'autre et il est important de connaitre la précision de ces approximations.

Soit la suite de terme général $u_n=1+\frac{1}{n}+\frac{(-1)^n}{n^2} \quad (n\in \boldsymbol{N}^*)$

1. Démontrer que la suite(u_n) converge vers 1.

2. Est-il vrai que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 21, le nombre 1 est une valeur approchée de u_n à 0,05 près ?

3. Soit r un nombre réel strictement positif donné. Déterminer un entier naturel n_0, dont on donnera une expression en fonction de r, tel que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0, 1 est une valeur approchée de u_n à r près ?

1. La suite de terme général $\frac{1}{n}$ converge vers 0.
Si n est un entier pair, $(-1)^n=1$ et si n est un entier impair, $(-1)^n=-1$. Ceci permet d'écrire, pour tout entier naturel n, $-1\leq(-1)^n\leq 1$ et pour tout entier naturel n non nul, $-\frac{1}{n^2}\leq\frac{(-1)^n}{n^2}\leq\frac{1}{n^2}$. La suite de terme général $\frac{(-1)^n}{n^2}$ est encadrée par des suites convergeant vers la même limite 0, donc $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=0$.
Par le théorème sur la limite d'une somme de suites, on conclut que $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=1$

2. 1 est une valeur approchée de u_n à 0,05 près signifie que $|u_n-1|<0{,}05$ soit $u_n\in]0{,}95;1{,}05[$.
L'affichage d'une calculatrice donne 1,045351 pour u_{21}. $u_{21}\in]0{,}95;1{,}05[$, mais ceci ne suffit pas pour conclure.
Soit n un entier naturel. Si $n\geq 21$, alors $0\leq\frac{1}{n}\leq\frac{1}{21}$ par décroissance de la fonction inverse sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$
Si $n\geq 21$, alors $-\frac{1}{21^2}\leq\frac{(-1)^n}{n^2}\leq\frac{1}{21^2}$ par décroissance de la fonction $f: x\to\frac{1}{x^2}$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
En additionnant terme à terme les encadrements, cela donne : $1-\frac{1}{21^2}\leq 1+\frac{1}{n}+\frac{(-1)^n}{n^2}\leq 1+\frac{1}{21}+\frac{1}{21^2}$.
L'affichage d'une calculatrice donne 0,997732 pour $1-\frac{1}{21^2}$ et 1,049887 pour $1+\frac{1}{21}+\frac{1}{21^2}$.
Donc, pour tout entier naturel $n\geq 21$, $u_n\in]0{,}95;1{,}05[$ et 1 est bien valeur approchée de u_n à 0,05.

3. Pour tout entier naturel n, si $n\geq 1>0$ alors $n^2\geq n>0$ donc $\frac{1}{n^2}\leq\frac{1}{n}$.
Si n est pair, $u_n=1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}$ et l'inégalité précédente suffit pour affirmer que $1\leq u_n\leq 1+\frac{2}{n}$.
Si n est impair, $u_n=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}$ et l'inégalité précédente suffit encore pour affirmer que $1\leq u_n\leq 1+\frac{2}{n}$.
Dans tous les cas, si r est un réel strictement positif, alors pour que $u_n\in]1-r;1+r[$, il suffit que $1+\frac{2}{n}<1+r$; or $1+\frac{2}{n}<1+r\Leftrightarrow n>\frac{2}{r}$.
Tout entier n_0 vérifiant $n_0>\frac{2}{r}$ répond à la question.
Pour exprimer n_0 en fonction de r, on peut utiliser la fonction « partie entière » notée E , $E(x)$ désignant le plus grand entier relatif inférieur ou égal au réel x.
Ainsi n_0 peut être défini par $n_0=1+E\left(\frac{2}{r}\right)$.
Remarque : il existe une infinité d'autres formules permettant de définir un tel entier n_0.

Exercice 4 – Suites adjacentes

Quelques principes de base et points de vigilance dans le traitement d'inégalités :
(1) Pour comparer deux nombres on peut étudier le signe de leur différence.
(2) On ne change pas le sens d'une inégalité en ajoutant le même nombre aux deux membres de cette inégalité.
(3) On change le sens d'une inégalité en multipliant les deux membres d'une inégalité par un même nombre négatif.
(4) Pour comparer deux nombres positifs, on peut comparer leurs carrés.

Définition : deux suites (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes lorsque l'une est croissante, l'autre décroissante et $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n - v_n) = 0$.

1. L'objectif de cette question est de **démontrer le théorème** suivant : « deux suites adjacentes convergent vers la même limite ».
   On considère pour cela deux suites adjacentes (u_n) et (v_n) telles que (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante.
   a. Montrer que la suite $(v_n - u_n)$ est décroissante et en déduire que tous ses termes sont positifs.
   b. En déduire que les deux suites (u_n) et (v_n) sont convergentes, qu'elles ont même limite l, et que pour tout entier n, $u_n \le l \le v_n$.

On peut donc maintenant énoncer et appliquer le théorème :
théorème : deux suites adjacentes convergent vers la même limite.

2. Soit les suites (u_n) et (v_n) définies par :
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \text{pour tout entier n,} \quad u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} v_0 = 4 \\ \text{pour tout entier n,} \quad v_{n+1} = \frac{u_{n+1}+v_n}{2}. \end{cases}$$
   a. Montrer que la suite de terme général $w_n = v_n - u_n$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.
   b. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
   c. Montrer que la suite de terme général $t_n = \frac{u_n+2v_n}{3}$ est constante. En déduire la limite commune aux suites (u_n) et (v_n).

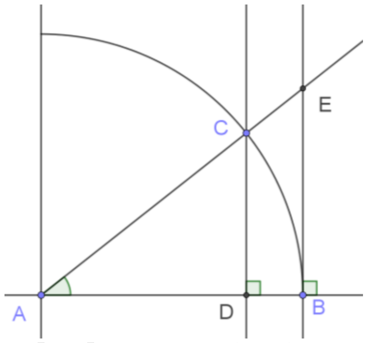
1. On considère deux suites (u_n) et (v_n) telles que (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante.
a. Pour tout entier naturel n, on a donc $u_n \le u_{n+1}$ soit $-u_{n+1} \le -u_n$ et $v_{n+1} \le v_n$ d'où en ajoutant membre à membre les inégalités, $v_{n+1} - u_{n+1} \le v_n - u_n$, ce qui signifie que la suite $(v_n - u_n)$ est décroissante.
Comme de plus $(v_n - u_n)$ converge vers 0, cette suite est à termes positifs.
b. On a alors pour tout entier naturel n, $u_0 \le u_n \le v_n \le v_0$.
La suite (u_n) est donc croissante et majorée par v_0 et la suite (v_n) est décroissante minorée par u_0.
Elles convergent donc toutes les deux.
Si on appelle l et l' leurs limites respectives, alors $l' - l = \lim\limits_{n\to\infty}(v_n - u_n) = 0$ d'où $l = l'$.
De plus, comme (u_n) est croissante et de limite l, $u_n \le l$ et, de façon analogue, $v_n \ge l$.

2. **a.** Pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_{n+1}+v_n}{2} - \frac{u_n+v_n}{2} = \frac{u_{n+1}-u_n}{2} = \frac{\frac{u_n+v_n}{2}-u_n}{2} = \frac{v_n-u_n}{4} = \frac{w_n}{4}$.
La suite (w_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{4}$.
b. Comme $\left|\frac{1}{4}\right| < 1$, la suite (w_n) converge vers 0.
D'autre part, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n+v_n}{2} - u_n = \frac{v_n-u_n}{2} = \frac{w_n}{2}$. Or (w_n) est géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $4 - 3 = 1$ donc à termes positifs. On en déduit que la suite (u_n) est croissante.
Et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = \frac{u_{n+1}+v_n}{2} - v_n = \frac{\frac{u_n+v_n}{2}+v_n}{2} - v_n = \frac{u_n+v_n+2v_n}{4} - v_n = \frac{u_n-v_n}{4} = -\frac{w_n}{4}$.
On en déduit que la suite (v_n) est décroissante.
Les suites (u_n) et (v_n) sont donc adjacentes. On en déduit qu'elles convergent vers la même limite l.
c. Pour tout entier naturel n, $t_{n+1} = \frac{u_{n+1}+2v_{n+1}}{3} = \frac{\frac{u_n+v_n}{2}+2\frac{u_{n+1}+v_n}{2}}{3} = \frac{\frac{u_n+v_n}{2}+u_{n+1}+v_n}{3} = \frac{2\frac{u_n+v_n}{2}+v_n}{3}$
Soit $t_{n+1} = \frac{u_n+v_n+v_n}{3} = \frac{u_n+2v_n}{3} = t_n$. La suite (t_n) est donc constante et, pour tout entier naturel n, $t_n = t_0 = \frac{11}{3}$.
Or, par somme et produit, $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \frac{l+2\times l}{3} = l$ donc $l = \frac{11}{3}$.

Exercice 5 – Inégalité de Huygens

Propriété : soit P et Q deux fonctions polynômes. P et Q sont égales (c'est-à-dire pour tout réel x, $P(x) = Q(x)$) si et seulement si P et Q ont même degré et les mêmes coefficients.

L'objectif de l'exercice est de **démontrer** l'inégalité de Huygens, propriété affirmant que pour tout réel x de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $x \leq \frac{2}{3}\sin x + \frac{1}{3}\tan x$.



Cela signifie que, dans la figure ci-contre, la longueur x de l'arc BC est inférieure ou égale à la moyenne pondérée de la longueur CD affectée du coefficient 2 et de la longueur BE affectée du coefficient 1.

1. Justifier l'interprétation géométrique de l'inégalité.
2. Soit f la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = 2\sin x + \tan x - 3x$.
   a. Déterminer la dérivée f' de la fonction f.
   b. Montrer qu'il existe un polynôme $P(X)$ de degré 3 tel que, pour tout réel x de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $f'(x) = \frac{P(\cos x)}{(\cos x)^2}$.
   c. Montrer que 1 est une racine de P et déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout réel X, $P(X) = (X-1)(aX^2 + bX + c)$.
   d. En déduire une factorisation $P(\cos x)$ et le signe de $f'(x)$ sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.
   e. Déterminer les variations puis le signe de la fonction f et conclure.

1. Pour tout $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, la longueur de l'arc BC est aussi la mesure (en radians) de l'angle $\widehat{BAC}$ donc $\mathrm{CD} = \sin x$. De plus, les triangles ABE et ADC sont tous les deux rectangles avec l'angle en A commun. Ils sont donc semblables d'où $\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AD}} = \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{AB}}$

   Soit $\tan x = \frac{\mathrm{BE}}{1}$ c'est-à-dire $\mathrm{BE} = \tan x$.

L'inégalité $x \leq \frac{2}{3}\sin x + \frac{1}{3}\tan x$ s'écrit donc $\mathrm{BC} \leq \frac{2\mathrm{CD}+\mathrm{BE}}{3}$ soit la longueur de l'arc BC est inférieure ou égale à la moyenne pondérée de la longueur CD affectée du coefficient 2 et de la longueur BE affectée du coefficient 1.

2. a. Par somme, la fonction f est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et, pour tout réel x de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,

$$f'(x) = 2\cos x + \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} - 3 = 2\cos x + \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} - 3 = 2\cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 3$$

   b. En réduisant au même dénominateur, $f'(x) = \frac{2\cos^3 x - 3\cos^2 x + 1}{\cos^2 x} = \frac{P(\cos x)}{\cos^2 x}$ où $P(X) = 2X^3 - 3X^2 + 1$.

   c. Pour tout réel X, $(X-1)(aX^2 + bX + c) = aX^3 + bX^2 + cX - aX^2 - bX - c$

soit $(X-1)(aX^2 + bX + c) = aX^3 + (b-a)X^2 + (c-b)X - c$

On aura donc, pour tout réel X, $P(X) = (X-1)(aX^2 + bX + c)$ si et seulement si :

$\begin{cases} a = 2 \\ b - a = -3 \\ c - b = 0 \\ -c = 1 \end{cases}$ soit $\begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{cases}$

On a donc $P(X) = (X-1)(2X^2 - X - 1)$.

   d. 1 est une racine évidente de $2X^2 - X - 1$. Puisque le produit des racines est $-\frac{1}{2}$ alors l'autre racine est $-\frac{1}{2}$.

On en déduit que $P(X) = (X-1)(X-1)(2X+1) = (X-1)^2(2X+1)$

et $P(\cos x) = (\cos x - 1)^2(2\cos x + 1)$

Pour tout réel x de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $(\cos x - 1)^2 \geq 0$ et $2\cos x + 1 \geq 0$ donc $f'(x) \geq 0$.

   e. Comme sa dérivée est positive ou nul sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, la fonction f est croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Or $f(0) = \frac{2-3+1}{1} = 0$

Donc f est positive ou nulle sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ soit, pour tout réel x de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $2\sin x + \tan x - 3x \geq 0$ soit $\frac{2}{3}\sin x + \frac{1}{3}\tan x - x \geq 0$

   C'est-à-dire $x \leq \frac{2}{3}\sin x + \frac{1}{3}\tan x$.

Exercice 6 – Fonctions convexes

Définition : on dit qu'une fonction f est convexe sur un intervalle I lorsque pour tous points A et B (d'abscisses respectives a et b appartenant à I) de la courbe représentative C_f de cette fonction dans un repère, le segment [AB] est situé au-dessus de C_f sur l'intervalle $[a, b]$.

Propriété : Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I. La fonction f est convexe sur I si et seulement si sa dérivée seconde f'' est positive sur I.

1. Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I. On suppose que f'' est positive sur I. Montrer que la courbe représentative de f sur I dans un repère est située au-dessus de toutes ses tangentes.
2. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
   a. Etudier la convexité de la fonction f définie sur $[-1, +\infty[$ par $f(x) = (1 + x)^n$.
   b. En déduire l'inégalité de Bernoulli :

   pour tout réel $x \in [-1, +\infty[$, pour tout entier $n \geq 2$, $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.
3. Inégalité arithmético-quadratrique. Montrer que pour tous réels a et b positifs, $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

(On pourra s'intéresser auparavant à la fonction carré).

1. Soit $x_0 \in I$, la tangente à C_f au point A d'abscisse x_0 a pour équation $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

La position relative de la courbe C_f et de sa tangente au point A est donnée par le signe de la fonction φ définie sur I par $\varphi(x) = f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))$.

f est deux fois dérivable sur I donc φ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$,

$\varphi'(x) = f'(x) - f'(x_0)$. Comme f'' est positive sur I, f' est croissante sur I . On en déduit, ci-contre le signe de φ' et le tableau de variation de φ.

x		x_0	
$\varphi'(x)$	$-$	0	$+$
$\varphi(x)$	↘	0	↗

De plus $\varphi(x_0) = f(x_0) - (f(x_0) + f'(x_0)(x_0 - x_0))$

Soit $\varphi(x_0) = 0$

On en déduit que pour tout $x \in I$, $\varphi(x) \geq 0$, ce qui signifie que la courbe représentative de f sur I dans un repère est située au-dessus de toutes ses tangentes.

2. a. La fonction f est deux fois dérivable sur $[-1, +\infty[$ et pour tout $x \in [-1, +\infty[$, $f'(x) = n(1 + x)^{n-1}$ et $f''(x) = n(n - 1)(1 + x)^{n-2}$. Sur $[-1, +\infty[$, f'' est positive donc la fonction f est convexe sur $[-1, +\infty[$.
   b. On applique le résultat du 1. On considère la tangente à la courbe représentant f au point d'abscisse 0. Cette tangente a pour équation $y = f(0) + f'(0)x$ soit $y = 1 + nx$.

On a donc bien pour tout réel $x \in [-1, +\infty[$, pour tout entier $n \geq 2$, $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

3. La fonction carré est une fonction convexe sur **R** car sa dérivée seconde (fonction constante égale à 2) est positive sur **R**. Sa courbe représentative C est donc située en-dessous de ses sécantes.

Soit A et B deux points C d'abscisses respectives a et b (deux réels positifs), le milieu M de [AB] est donc situé au-dessus du point de C de même abscisse que M, ce qui s'écrit : $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

Comme deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés on en déduit que $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.