ACADÉMIE DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Pépinière académique de mathématiques

Année 2021-2022 **Stage « filé »**

Classe terminale **Fiche numéro 2**

Parution jeudi 2 décembre **Retour attendu pour le jeudi 16 décembre**

Exercice 1 Une équation fonctionnelle pour définir le logarithme népérien

La fonction logarithme népérien a été définie en classe comme fonction réciproque de la fonction exponentielle et elle a pour dérivée la fonction inverse.
On sait que pour tous nombres strictement positifs a et b, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ et $\ln e = 1$.
On montre que ces deux propriétés caractérisent en fait la fonction logarithme népérien.

On cherche toutes les fonctions f dérivables sur $]0, +\infty[$ et telles que pour tous nombres réels $a > 0$ et $b > 0$:

$$(1) \quad f(ab) = f(a) + f(b).$$

a. Calculer $f(1)$.
b. Pour tout nombre réel $a > 0$, on considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = f(ax) - f(x)$ où f est une fonction dérivable vérifiant (1). Que peut-on dire des variations de la fonction g ?
c. Montrer que g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et exprimer $g'(x)$.
d. Si on pose $f'(1) = k$, montrer que pour tout nombre réel $x > 0$, $f(x) = k \ln x$.
e. Conclure sur la caractérisation de la fonction logarithme népérien.

a. Si on écrit l'égalité (1) pour $a = b = 1$, on obtient $f(1) = 2f(1)$ d'où $f(1) = 0$.
b. D'après l'égalité (1), pour tout réel $x > 0$, $g(x) = f(a) + f(x) - f(x) = f(a)$ donc g est une fonction constante.
c. Comme somme et composition de fonctions, la fonction g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$, on a $g'(x) = af'(ax) - f'(x)$.
Comme g est une fonction constante, on en déduit que pour tout réel $x > 0$, $af'(ax) - f'(x) = 0$
d. En particulier, pour tout nombre réel $a > 0$, $af'(a) - f'(1) = 0$ soit, si on pose $f'(1) = k$, $f'(a) = \frac{k}{a}$.
La fonction f a donc même dérivée que la fonction $h: x \mapsto k \ln x$. Or $f(1) = 0 = h(1)$, on en déduit que $f = h$
e. Si on a de plus $f(e) = 1$ alors $k \ln e = 1$ soit $k = 1$ et f est la fonction logarithme népérien.

Exercice 2 Un peu plus loin sur la fonction tangente

Pour tout réel x tel que $\cos x \neq 0$, on pose $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.
On peut étudier cette fonction en s'appuyant sur les propriétés des fonctions cosinus et sinus :
- ces fonctions sont périodiques de période 2π ;
- la fonction sinus est impaire et la fonction cosinus est paire ;
- pour tout réel x, $\cos(x + \pi) = -\cos x$ et $\sin(x + \pi) = -\sin x$.

On rappelle que 360 degrés $= 2\pi$ radians.
On avait montré dans la fiche 1 que pour tout réel x positif ou nul, $\sin(x) \leq x$ et $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x)$.

1. ***Étude de la fonction tangente***

a. Montrer que la fonction tangente est périodique et qu'on peut faire l'étude sur l'intervalle $I = \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$ puis l'étendre à R.
b. Exprimer, pour tout $x \in \left]0, +\frac{\pi}{2}\right[$, $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ en fonction de $\tan x$.
c. Etudier les variations de la fonction tangente sur l'intervalle I. Dresser son tableau de variation et préciser les limites aux bornes de I.
d. Construire la courbe représentative de la fonction tangente sur l'intervalle I.

2. Fonction tangente et calculatrice au voisinage de $\frac{\pi}{2}$.

a. Montrer que pour tout réel x tel que $0 < x < 1$, $0 < \sin x < x$, $0 < 1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1$ et $\tan x > x > 0$.

(On a déjà démontré, dans la fiche 1, que pour tout réel positif ou nul x, on a $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x$ et $\sin(x) \leq x$)

b. En déduire que pour tout réel x tel que $0 < x < 1$, $\frac{1}{x} - \frac{x}{2} < \frac{1}{\tan x} < \frac{1}{x}$.

c. Pour tout entier naturel non nul n, on pose $x_n = \frac{\pi}{2} - 10^{-n}$. En déduire un encadrement de $\tan x_n$.

Comment cela se traduit-il sur la calculatrice ?

1. ***a.*** Pour tout réel x tel que $\cos x \neq 0$ c'est-à-dire que les réels x pour lesquels il existe un entier k tel que $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, sont exclus, on a $\cos(x+\pi) \neq 0$ et $\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x$.

La fonction tangente est donc périodique de période π. Il suffit donc bien de l'étudier sur l'intervalle I.

b. Pour tout $x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}$.

c. Comme quotient, la fonction tangente est dérivable sur I et pour tout réel x de I, on a :

$\tan'(x) = \frac{\cos x \times \cos x - \sin x \times (-\sin x)}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$, nombre toujours strictement positif. On en déduit que la fonction tangente est strictement croissante sur l'intervalle I.

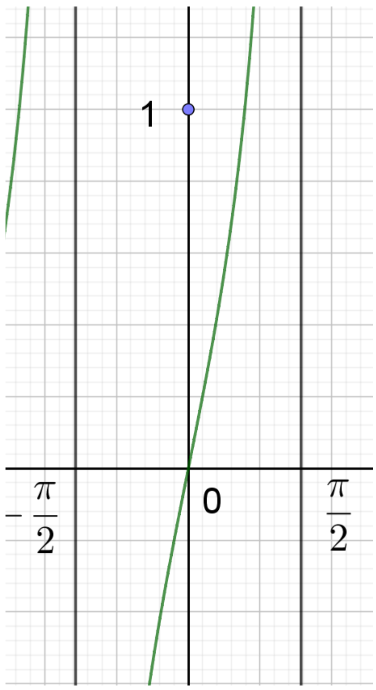
De plus pour tout réel $x \in \left[0, +\frac{\pi}{2}\right[$, $0 < \cos(x) < 1$ alors que $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos x = 0$ et $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$

donc $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty$. On démontre de même que $\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} \tan x = -\infty$.

Remarque : on peut aussi démontrer que la fonction tangente est impaire

On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$+\frac{\pi}{2}$
$\tan'(x)$		$+$	
$\tan x$	$-\infty$	0	$+\infty$



d.

2. ***a.*** Pour tout réel x tel que $0 < x < 1$, on a $0 < x < \frac{\pi}{2}$ donc $0 < \cos x < 1$ et $0 < \sin x < 1$.

On a de plus démontré dans la que pour tout réel x positif ou nul, $\sin(x) \leq x$ et $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x)$.

Pour tout réel x tel que $0 < x < 1$, $0 < 1 - \frac{x^2}{2}$.

On a donc bien pour tout réel x tel que $0 < x < 1$, $0 < \sin x < x$ et $0 < 1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1$.

Soit f la fonction définie sur $]0,1[$ par $f(x) = \tan x - x$. Par somme f est dérivable sur $]0,1[$ et, pour tout réel x de $]0,1[$, $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$ et, comme, $0 < \cos x < 1$, $f'(x) > 0$. Donc f est strictement croissante sur $]0,1[$.

Or $f(0) = 0$ donc $f > 0$ sur $]0,1[$ et on a bien pour tout réel x tel que $0 < x < 1$, $\tan x > x > 0$.

b. Pour tout réel x tel que $0 < x < 1$, comme $0 < \sin x < x$, en passant aux inverses, on a $0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}$ et comme $0 < 1 - \frac{x^2}{2} < \cos x$, on obtient en multipliant membre à membre les inégalités :
$0 < \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) < \frac{\cos x}{\sin x}$ soit $0 < \frac{1}{x} - \frac{x}{2} < \frac{1}{\tan x}$.
Comme pour tout réel x tel que $0 < x < 1$, on a $\tan x > x > 0$, en passant aux inverses, on obtient $\frac{1}{\tan x} < \frac{1}{x}$.

c. Si $x_n = \frac{\pi}{2} - 10^{-n}$, alors $\tan x_n = \tan\left(\frac{\pi}{2} - 10^{-n}\right) = \frac{1}{\tan 10^{-n}}$.
En appliquant le résultat de la question précédente, on en déduit que $10^n - \frac{10^{-n}}{2} < \tan x_n < 10^n$.
On peut retrouver ce résultat, en prenant une calculatrice en constatant qu'elle affiche
$9{,}966644$ pour $\tan\left(\frac{\pi}{2} - 10^{-1}\right)$, $99{,}99667$ pour $\tan\left(\frac{\pi}{2} - 10^{-2}\right)$, $999{,}9997$ pour $\tan\left(\frac{\pi}{2} - 10^{-3}\right)$ et $10\,000$ pour $\tan\left(\frac{\pi}{2} - 10^{-4}\right)$.
Observation : si on effectue les mêmes séquences à la calculatrice en mode degré, on peut avoir le sentiment d'un résultat différent. Prendre garde au fait qu'un dix-millième de radian cela fait 6 millièmes de degrés. En mode degré, pour $\tan 89{,}9999$ *la calculatrice affiche* $572\,957{,}7951$. *Elle affiche* $10\,000$ *à deux dixièmes près pour* $\tan 89{,}99\,42705$, *ce qui est conforme – évidemment – au calcul en radians (on devrait dire « avec les nombres réels » mais ce point reste obscur dans les études au lycée).*

Exercice 3 Propriétés des combinaisons

Propriétés :

(1) pour tous entiers k et n tels que $0 \leq k \leq n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$;

(2) pour tous entiers k et n tels que $0 < k \leq n-1$, $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$.

(3) pour tout entier n, pour tous réels a et b, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Il y a plusieurs façons de démontrer ces propriétés (raisonnement par récurrence, dénombrement dans des tirages de boules ou des chemins…). Ces méthodes peuvent être reprises pour démontrer d'autres propriétés des combinaisons.

On veut montrer que pour tout entier n,

(i) $\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} = 2^n$ (ii) $\sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ (iii) $\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

a. Démontrer par récurrence la relation (i) en s'appuyant sur les propriétés (1) et (2).
b. Démontrer la relation (ii) en s'appuyant sur la propriété (3).
c. Démontrer la relation (iii) en dénombrant des tirages de boules.
d. En considérant la dérivée de la fonction $f : x \mapsto (1+x)^n$, démontrer que pour tout entier n, $\sum_{k=0}^{k=n} k\binom{n}{k} = n\,2^{n-1}$.

a. Pour $n = 0$, l'égalité est vraie puisqu'elle s'écrit $1 = 1$.
Si l'égalité est vraie au rang $n-1$, alors $\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$
Soit, en s'appuyant sur la propriété (2) :

$$\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \left(\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1}\right) + \left(\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2}\right) + \cdots + \left(\binom{n-1}{n-2} + \binom{n-1}{n-1}\right) + \binom{n}{n}$$

Or $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n-1}{0}$ et $\binom{n}{n} = 1 = \binom{n-1}{n-1}$

D'où $\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} = 2\binom{n-1}{0} + 2\binom{n-1}{1} + 2\binom{n-1}{2} + \cdots + 2\binom{n-1}{n-2} + 2\binom{n-1}{n-1} = 2\sum_{k=0}^{k=n-1} \binom{n}{k}$

D'après l'hypothèse de récurrence, on a donc $\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$

Et l'égalité est encore vraie au rang n donc pour tout entier n.

b. En s'appuyant sur la propriété (3), $\sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{k=n}(-1)^k 1^{n-k}\binom{n}{k} = (-1+1)^n = 0$.
Remarque : cette méthode est aussi valable pour démontrer l'égalité (i).

c. $\binom{2n}{n}$ correspond au nombre de tirages de n boules dans une urne contenant n boules noires et n boules blanches.
Chacun de ces tirages peut être constitué de k boules noires et $n-k$ boules blanches, k variant de 0 à n.
Pour k fixé, il y a $\binom{n}{k}$ façons de tirer les k boules noires et $\binom{n}{n-k}$ façons de tirer les $n-k$ boules blanches donc il y a $\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$ tirages de ce type. D'après la propriété (1), ce nombre d'écrit aussi $\binom{n}{k}^2$.
D'où $\sum_{k=0}^{k=n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

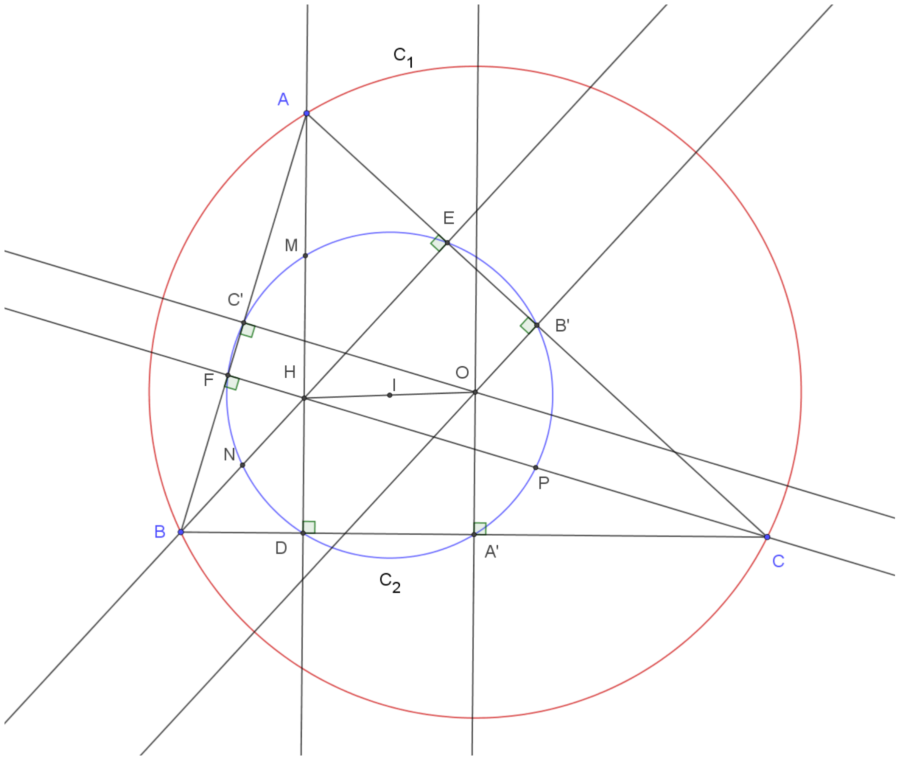
d. Soit f la fonction définie sur **R** par $f(x) = (1+x)^n$. Cette fonction est dérivable sur **R** et pour tout réel x, on a $f'(x) = n(1+x)^{n-1}$ et on a alors $f'(1) = n2^{n-1}$.
D'autre part, d'après la propriété (3), $f(x) = \sum_{k=0}^{k=n}\binom{n}{k}x^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{k=n}\binom{n}{k}x^k$
d'où $f'(x) = \sum_{k=0}^{k=n}k\binom{n}{k}x^{k-1}$ et, en particulier, $f'(1) = \sum_{k=0}^{k=n}k\binom{n}{k}1^{k-1} = \sum_{k=0}^{k=n}k\binom{n}{k}$.
On a donc bien $\sum_{k=0}^{k=n}k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

Quelques provisions pour la route, avant d'attaquer les exercices 4 et 5
En géométrie vectorielle, on rappelle que :
- la colinéarité de deux vecteurs permet de démontrer un alignement de points ;
- la nullité d'un produit scalaire permet de démontrer une orthogonalité ;
- le centre de gravité d'un triangle ABC (point de concours des médianes) est le point G tel que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Exercice 4 Le cercle des neuf points (ou « cercle d'Euler », mais Euler en a tant fait…)
Soit ABC un triangle. On appelle :
- A', B', C' les milieux respectifs des segments [BC], [CA] et [AB] ;
- D, E et F les pieds des hauteurs du triangle ABC issues respectivement de A, B et C ;
- G le centre de gravité du triangle ABC.

a. On note O le centre du cercle $\mathcal{C}_1$ circonscrit au triangle ABC et H le point défini par $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.
Montrer que H est l'orthocentre du triangle ABC et que $\overrightarrow{OH} = 3\,\overrightarrow{OG}$. Qu'en déduit-on pour les points O, G et H ?
b. On note I, M, N et P les milieux respectifs des segments [OH], [HA], [HB] et [HC]. On appelle $\mathcal{C}_2$ le cercle de centre I de rayon la moitié du rayon du cercle $\mathcal{C}_1$.
Démontrer que $\overrightarrow{IM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{IA'}$. En déduire que le segment [MA'] est un diamètre du cercle $\mathcal{C}_2$.
c. Montrer que le point D appartient au cercle $\mathcal{C}_2$.
d. Donner neuf points situés sur le cercle $\mathcal{C}_2$ (il s'agit naturellement de nommer neuf points de la figure définis sans référence au cercle…)

a. Montrons que H appartient à la hauteur issue de A en calculant $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}$.
$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$
donc $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}).(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}).(-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OC}^2-\overrightarrow{OB}^2 = \mathrm{OC}^2-\mathrm{OB}^2 = 0$.
On en déduit que les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires et que H appartient à la hauteur issue de A dans le triangle ABC. On démontrerait de même que H appartient aux deux autres hauteurs.
H est donc bien l'orthocentre du triangle ABC.
De plus G étant le centre de gravité du triangle ABC, $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} = \vec{0}$
soit $\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OC} = \vec{0}$ c'est-à-dire $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$. On en déduit que $\overrightarrow{OH} = 3\,\overrightarrow{OG}$.



b. I et M sont les milieux respectifs de [OH] et [HA] donc $\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IH} + \overrightarrow{HM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$
Comme A’ est le milieu de [BC], $\overrightarrow{IA'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2}(2\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.
Or I est le milieu de [OH] donc $2\overrightarrow{IO} = \overrightarrow{HO} = -(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$
et donc $\overrightarrow{IA'} = \frac{1}{2}(-\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$.
On en déduit que I est le milieu du segment [A’M].
De plus $\overrightarrow{IM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{IA'}$ donc $\mathrm{IM} = \mathrm{IA'} = \frac{1}{2}\mathrm{OA}$. Comme O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, OA en est le rayon et $\frac{1}{2}\mathrm{OA}$ est le rayon du cercle $\mathcal{C}_2$. Les points M et A’ sont donc des points de ce cercle et, comme I est le milieu du segment [A’M], le segment [A’M] est un diamètre du cercle $\mathcal{C}_2$.
c. [A’M] est un diamètre du cercle $\mathcal{C}_2$ et le triangle MDA’ est rectangle en D par définition de D donc le cercle $\mathcal{C}_2$ passe par le point D.
d. On démontrerait de même qu’au b. que les points N, P, B’ et C’sont des points du cercle $\mathcal{C}_2$ et on démontrerait comme au c. que les points E et F sont des points du cercle $\mathcal{C}_2$.
Sur le cercle $\mathcal{C}_2$, on a donc les neuf points D, E, F, M, N, P, A’, B’ et C’.

N.B. Michel Collet et Georges Griso, dans leur ouvrage consacré au cercle d’Euler, dénombrent jusqu’à 42 points liés à la figure et appartenant au cercle d’Euler. 42 définitions, 42 noms de points, mais combien de points ?

Exercice 5 Tétraèdre orthocentrique
Soit ABCD un tétraèdre.
a. Démontrer que les arêtes (AB) et (CD) sont orthogonales si et seulement si $\mathrm{AC}^2 + \mathrm{BD}^2 = \mathrm{AD}^2 + \mathrm{BC}^2$.
b. Démontrer que si les arêtes (AB) et (CD) sont orthogonales ainsi que les arêtes (AC) et (BD) alors les arêtes (AD) et (BC) le sont aussi.
On dit alors que le tétraèdre ABCD est *orthocentrique*.
c. Démontrer que si ABCD est un tétraèdre orthocentrique et si A’ est le projeté orthogonal de A sur le plan (BCD) alors A’ est l’orthocentre du triangle BCD.

a. Les droites (AB) et (CD) sont orthogonales si et seulement si $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$.
Or $\mathrm{AC}^2 + \mathrm{BD}^2 = \mathrm{AD}^2 + \mathrm{BC}^2$ équivaut successivement à $\mathrm{AC}^2 - \mathrm{AD}^2 = \mathrm{BC}^2 - \mathrm{BD}^2$ soit $\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AD}^2 = \overrightarrow{BC}^2 - \overrightarrow{BD}^2$ c’est-à-dire $(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}).(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD}).(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD})$ soit $\overrightarrow{DC}.(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{DC}.(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD})$

c'est-à-dire $\overrightarrow{DC}.\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BD}\right)=0$ ce qui s'écrit aussi $\overrightarrow{DC}.\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DB}\right)=0$ soit $\overrightarrow{DC}.2\overrightarrow{AB}=0$ c'est-à-dire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0$.

On en déduit que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales si et seulement si $AC^2+BD^2=AD^2+BC^2$.

b. Si les arêtes (AB) et (CD) sont orthogonales ainsi que les arêtes (AC) et (BD) alors $AC^2+BD^2=AD^2+BC^2$ et

$AB^2+DC^2=AD^2+CB^2$ d'où $AC^2+BD^2=AB^2+CD^2$ ce qui signifie que $AB^2+DC^2=AC^2+DB^2$ qui équivaut à l'orthogonalité des droites (AD) et (BC).

c. Si A' est le projeté orthogonal de A sur le plan (BCD) alors le vecteur $\overrightarrow{AA'}$ est orthogonal à tout vecteur de ce plan.

Pour montrer que A' est alors l'orthocentre du triangle BCD, il suffit de montrer que A' est sur deux des hauteurs de ce triangle et pour cela que $\overrightarrow{CA'}.\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA'}.\overrightarrow{CD}=0$.

Or $\overrightarrow{CA'}.\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AA'}\right).\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BD}$

Le premier produit scalaire est nul car le tétraèdre étant orthocentrique, les arêtes (AC) et (BD) sont orthogonales.

Le deuxième produit scalaire est nul car $\overrightarrow{AA'}$ est orthogonal à tout vecteur du plan (BCD).

Donc $\overrightarrow{CA'}.\overrightarrow{BD}=0$. On démontre de même que $\overrightarrow{BA'}.\overrightarrow{CD}=0$.

On en déduit que A' est bien l'orthocentre du triangle BCD.

Exercice 6 Suite de Fibonacci et « nombre d'or »

Dans l'étude des suites, on se ramène souvent à des suites connues comme les suites arithmétiques ou les suites géométriques. C'est le cas pour les suites vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2, c'est-à-dire une relation du type $u_{n+2}=au_n+bu_{n+1}$.

Partie A

On considère la suite (u_n) définie sur **N** par $u_0=u_1=1$ et, pour tout entier n, $u_{n+2}=u_n+u_{n+1}$ (1).
Cette suite est appelée suite de Fibonacci (mathématicien Léonard de Pise dit Fibonacci du 12e siècle).

a. Calculer les 10 premiers termes de la suite.

b. On cherche les suites géométriques vérifiant la relation (1). Si on note q la raison d'une telle suite, déterminer les valeurs possibles de q. On note q_1 et q_2 les deux valeurs possibles.

On admet que toute pour toute suite (u_n) vérifiant la relation (1), il existe deux réels a et b tels que pour tout entier n, $u_n=aq_1^n+bq_2^n$

c. Déterminer les réels a et b pour que la suite (u_n) soit la suite de Fibonacci. Donner l'expression de u_n en fonction de n.

Partie B

On considère la fuite (v_n) définie sur **N** par, pour tout entier n, $v_n=\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

a. Montrer que pour tout entier n, $v_n=\frac{-q_1^{n+2}+q_2^{n+2}}{-q_1^{n+1}+q_2^{n+1}}$ et en déduire que la suite (v_n) converge vers un nombre Φ qu'on déterminera.

Ce nombre Φ est appelé « nombre d'or »

b. Montrer que le nombre Φ vérifie les relations suivantes :

(i) $\Phi=1+\frac{1}{\Phi}$ (ii) pour tout entier n, $u_n=\frac{\Phi^{n+1}-(-1)^{n+1}\Phi^{-n-1}}{\sqrt{5}}$

c. Expliquer les relations :

$\Phi=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots}}}$ et $\Phi=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}$

Partie A

a. $u_0=u_1=1$, d'où on tire successivement en s'appuyant sur la relation de récurrence (1) :
$u_2=2, u_3=3, u_4=5, u_5=8, u_6=13, u_7=21, u_8=34, u_9=55$.

b. Soit (t_n) une suite géométrique de raison q. Il existe donc un réel a tel que pour tout entier n, $t_n=aq^n$.
La suite (t_n) vérifie la relation (1) si et seulement pour tout entier n, $aq^{n+2}=aq^{n+1}+aq^n$.

Si on exclut la suite nulle (qui ne peut être la suite de Fibonacci puisque $u_0 = u_1 = 1$), on se ramène à l'équation du second $q^2 - q - 1 = 0$ dont le discriminant est $\Delta = 1 + 4 = 5$ et les solutions sont $q_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $q_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Les suites géométriques vérifiant la relation (1) sont donc les suites $\left(\alpha\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$ et $\left(\beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$.
On admet donc que les suites vérifiant la relation (1) sont telles qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout entier n, $u_n = a\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + b\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

c. $u_0 = u_1 = 1$ se traduit par le système $\begin{cases} a + b = 1 \\ a\frac{1-\sqrt{5}}{2} + b\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 \end{cases}$ soit $\begin{cases} b = 1 - a \\ a\frac{1-\sqrt{5}}{2} + (1-a)\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 \end{cases}$

Soit $\begin{cases} b = 1 - a \\ a\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$ soit $\begin{cases} b = 1 - a \\ a(-\sqrt{5}) = 1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$ soit $\begin{cases} a = -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{5-\sqrt{5}}{10} \\ b = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{5+\sqrt{5}}{10} \end{cases}$.

La suite de Fibonacci est donc la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$.
On peut aussi écrire $u_n = -\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$.

Partie B

a. Pour tout entier n, $v_n = \frac{-\frac{1}{\sqrt{5}}q_1^{n+2} + \frac{1}{\sqrt{5}}q_2^{n+2}}{-\frac{1}{\sqrt{5}}q_1^{n+1} + \frac{1}{\sqrt{5}}q_2^{n+1}} = \frac{-q_1^{n+2} + q_2^{n+2}}{-q_1^{n+1} + q_2^{n+1}}$.
Or $|q_1| < 1$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} q_1^n = 0$ et $q_2 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} q_2^n = +\infty$.
On met donc q_2^{n+2} en facteur au numérateur et q_2^{n+1} en facteur au dénominateur. On obtient alors :
$v_n = \frac{q_2^{n+2}\left(-\frac{q_1^{n+2}}{q_2^{n+2}} + 1\right)}{q_2^{n+1}\left(-\frac{q_1^{n+1}}{q_2^{n+1}} + 1\right)} = q_2\frac{-\frac{q_1^{n+2}}{q_2^{n+2}} + 1}{-\frac{q_1^{n+1}}{q_2^{n+1}} + 1}$. Comme $\lim\limits_{n\to\infty} q_1^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} q_2^n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{q_1^n}{q_2^n} = 0$ et on en déduit que

$\lim\limits_{n\to\infty} v_n = q_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Le nombre d'or est donc $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
b. Φ est solution de l'équation $q^2 - q - 1 = 0$ donc $\Phi^2 = \Phi + 1$ soit $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$.
$\Phi = q_2$ et q_1 sont les solutions de l'équation $q^2 - q - 1 = 0$ donc leur produit vaut -1 soit $q_1 = -\Phi^{-1}$.
Or, pour tout entier n, on a $u_n = -\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-q_1^{n+1} + q_2^{n+1}\right)$
Soit a $u_n = -\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^{n+1} - (-\Phi^{-1})^{n+1}\right) = -\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^{n+1} - (-1)^{n+1}\Phi^{-n-1}\right)$.

c. $\Phi = 1 + \dfrac{1}{\Phi} = 1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{\Phi}} = 1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{\Phi}}} = 1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \cdots}}}$

Et $\Phi^2 = \Phi + 1$ avec $\Phi > 0$

donc $\Phi = \sqrt{1 + \Phi} = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \Phi}} = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \Phi}}} = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}}$.