ACADÉMIE DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Pépinière académique de mathématiques

Année 2022-2023 — **Stage « filé »**

Classe de terminale — **Fiche numéro 1**

Parution mercredi 17 octobre — **Retour attendu pour le jeudi 17 novembre**

Exercice 1 – Suites numériques linéaires

Définitions suite arithmétique, suite géométrique

Raisonnement par récurrence

On s'intéresse aux suites (u_n) vérifiant la relation de récurrence notée (R) :

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n.$$

On admettra que pour tout couple de valeurs données à (u_0, u_1), il existe une unique suite (u_n) vérifiant la relation (R).

1. Montrer qu'à l'exception de la suite nulle (constante égale à 0), aucune suite arithmétique ne vérifie la relation de récurrence (R).
2. On cherche s'il existe des suites géométriques de terme général $u_n = q^n$ (où q est un réel non nul) vérifiant la relation (R).
   a) Montrer qu'une suite de terme général $u_n = q^n$vérifie la relation (R) si et seulement si q est une solution dans **R** de l'équation $x^2 - 2x - 1 = 0$.
   b) En déduire qu'il existe deux suites de terme général $u_n = q^n$ vérifiant la relation (R). On notera q_1 et q_2 les raisons de ces suites.
3. Soit a et b des nombres réels quelconques. Montrer que la suite de terme général $w_n = a{q_1}^n + b{q_2}^n$ vérifie la relation (R).
4. Soit x_0 et x_1 des nombres réels donnés. Montrer qu'il existe une unique suite (w_n) que l'on déterminera, de terme général $w_n = a{q_1}^n + b{q_2}^n$, telle que $w_0 = x_0$ et $w_1 = x_1$.
5. Montrer que pour tout entier naturel *n*, $\left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^n$ est un entier naturel.

1. Soit une suite arithmétique de terme général u_n, alors il existe deux réels a et b tels que, pour tout entier n, $u_n = an + b$.

La relation (R) se traduit par :

- $\forall n \in \boldsymbol{N}, a(n+2) + b = 2[a(n+1) + b] + an + b$, soit, en développant, $\forall n \in \boldsymbol{N}, 2an + 2b = 0$.

Pour $n = 0$, on obtient $b = 0$.

Puis pour $n = 1$, on obtient $a = 0$. Donc, dans ce cas, seule la suite nulle vérifie la relation (R).

2. a) La suite de terme général $u_n = q^n$vérifie la relation (R) si et seulement si $\forall n \in \boldsymbol{N}, q^{n+2} = 2q^{n+1} + q^n$ soit, en factorisant : $\forall n \in \boldsymbol{N}, q^n(q^2 - 2q - 1) = 0$ ce qui équivaut à $q^2 - 2q - 1 = 0$ puisque $q \neq 0$.

b) La résolution de l'équation donne deux solutions dans **R** : $q_1 = 1 + \sqrt{2}$ et $q_2 = 1 - \sqrt{2}$

3. Pour tout entier n,

$2w_{n+1} + w_n = 2(aq_1^{n+1} + bq_2^{n+1}) + (aq_1^n + bq_2^n) = aq_1^n(2q_1 + 1) + bq_2^n(2q_2 + 1)$

Comme q_1 et q_2 sont solutions de l'équation $x^2 - 2x - 1 = 0$, on en tire $2w_{n+1} + w_n = aq_1^n q_1^2 + bq_2^n q_2^2$

Soit $2w_{n+1} + w_n = aq_1^{n+2} + bq_2^{n+2} = w_{n+2}$

4. Les réels x_0 et x_1 étant donnés, on détermine s'il existe des réels a et b tels que :

$\begin{cases} a{q_1}^0 + b{q_2}^0 = x_0 \\ aq_1 + bq_2 = x_1 \end{cases}$ ce qui équivaut à $\begin{cases} a + b = x_0 \\ aq_1 + bq_2 = x_1 \end{cases}$ soit $\begin{cases} b = x_0 - a \\ aq_1 + (x_0 - a)q_2 = x_1 \end{cases}$ soit $\begin{cases} b = x_0 - a \\ a = \frac{x_1 - q_2 x_0}{q_1 - q_2} \end{cases}$ ce qui donne une unique solution (a, b).

5. La suite de terme général $u_n = \left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^n$ est la suite vérifiant la relation (R) telle que $u_0 = 2 = u_1$.

On va démontrer par récurrence que, pour tout entier n, u_n et u_{n+1} sont des entiers naturels.

On note P_n la proposition : « u_n et u_{n+1} sont des entiers naturels ».

- Pour $n = 0$, comme $u_0 = 2 = u_1$, la proposition P_0 est vraie
- Si, pour un entier n, la proposition P_n est vraie, c'est-à-dire u_n et u_{n+1} sont des entiers naturels, alors, comme $u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n$, par somme de deux entiers naturels, u_{n+2} est un entier naturel.
  Donc u_{n+1} et u_{n+2} sont des entiers naturels, c'est-à-dire P_{n+1} est encore vraie.

On en déduit que, pour tout entier naturel n, u_n et u_{n+1} sont des entiers naturels.

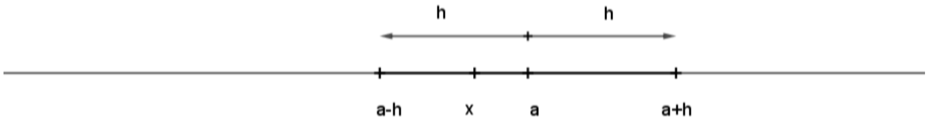
En particulier, pour tout entier naturel n, $(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n$ est un entier naturel.

Définitions :

- on dit qu'une suite (u_n) converge vers un nombre réel a lorsque tout intervalle ouvert contenant a contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
- un intervalle I est dit ouvert centré en a lorsqu'il existe un réel h strictement positif tel que $I =]a-h, a+h[$.

Propriété : soit a un réel et h un réel strictement positif, $x \in]a-h, a+h[$ équivaut à $|a-x| < h$.

Définition : soit a et x deux nombres réels et soit h un réel strictement positif. On dit que a est une valeur approchée de x à la précision h (ou « à h près ») lorsque $a-h < x < a+h$.



On obtient un encadrement de x de longueur $2h$.
Cela signifie que la distance entre les réels a et x est inférieure ou égale à h, c'est-à-dire $|a-x| < h$.
Comme $|a-x| = |x-a|$, cela signifie aussi que x est une valeur approchée de a à h près.

Dans les études de suites convergentes, terme général et limite sont valeurs approchées l'un de l'autre et il est important de connaitre la précision de ces approximations.

Exercice 2 – Limites de suites et valeurs approchées

Soit la suite de terme général $u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n^2} \quad (n \in \boldsymbol{N}^*)$

1. Démontrer que la suite (u_n) converge vers 1.
2. Est-il vrai que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 21, le nombre 1 est une valeur approchée de u_n à $0{,}05$ près ?
3. Soit r un nombre réel strictement positif donné. Déterminer un entier naturel n_0, dont on donnera une expression en fonction de r, tel que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0, 1 est une valeur approchée de u_n à r près ?

1. La suite de terme général $\frac{1}{n}$ converge vers 0.

Si n est un entier pair, $(-1)^n = 1$ et si n est un entier impair, $(-1)^n = -1$. Ceci permet d'écrire, pour tout entier naturel n, $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ et pour tout entier naturel n non nul, $-\frac{1}{n^2} \leq \frac{(-1)^n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$. La suite de terme général $\frac{(-1)^n}{n^2}$ est encadrée par des suites convergeant vers la même limite 0, donc $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = 0$.
Par le théorème sur la limite d'une somme de suites, on conclut que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$

2. 1 est une valeur approchée de u_n à 0,05 près signifie que $|u_n - 1| < 0{,}05$ soit $u_n \in]0{,}95; 1{,}05[$.
L'affichage d'une calculatrice donne 1,045351 pour u_{21}. $u_{21} \in]0{,}95; 1{,}05[$, mais ceci ne suffit pas pour conclure.

Soit n un entier naturel. Si $n \geq 21$, alors $0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{21}$ par décroissance de la fonction inverse sur l'intervalle]0 ; +∞[
Si $n \geq 21$, alors $-\frac{1}{21^2} \leq \frac{(-1)^n}{n^2} \leq \frac{1}{21^2}$ par décroissance de la fonction $f : x \to \frac{1}{x^2}$ sur l'intervalle]0 ; +∞[.
En additionnant terme à terme les inégalités, cela donne : $1 - \frac{1}{21^2} \leq 1 + \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n^2} \leq 1 + \frac{1}{21} + \frac{1}{21^2}$.
L'affichage d'une calculatrice donne 0,997732 pour $1 - \frac{1}{21^2}$ et 1,049887 pour $1 + \frac{1}{21} + \frac{1}{21^2}$.
Donc, pour tout entier naturel $n \geq 21$, $u_n \in]0{,}95; 1{,}05[$ et 1 est bien valeur approchée de u_n à $0{,}05$.

3. Pour tout entier naturel n, si $n \geq 1 > 0$ alors $n^2 \geq n > 0$ donc $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$.

Si n est pair, $u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$ et l'inégalité précédente suffit pour affirmer que $1 \leq u_n \leq 1 + \frac{2}{n}$.
Si n est impair, $u_n = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$ et l'inégalité précédente suffit encore pour affirmer que $1 \leq u_n \leq 1 + \frac{2}{n}$.
Dans tous les cas, si r est un réel strictement positif, alors pour que $u_n \in]1-r; 1+r[$, il suffit que $1 + \frac{2}{n} < 1 + r$;
or $1 + \frac{2}{n} < 1 + r \Leftrightarrow n > \frac{2}{r}$.
Tout entier n_0 vérifiant $n_0 > \frac{2}{r}$ répond à la question.
Pour exprimer n_0 en fonction de r, on peut utiliser la fonction « partie entière » notée E , $E(x)$ désignant le plus grand entier relatif inférieur ou égal au réel x.

Ainsi n_0 peut être défini par $n_0 = 1 + E\left(\frac{2}{r}\right)$.
Remarque : il existe une infinité d'autres formules permettant de définir un tel entier n_0.

Exercice 3 – Suites adjacentes

Définition : deux suites (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes lorsque l'une est croissante, l'autre décroissante et $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n - v_n) = 0$.

Théorème : deux suites adjacentes convergent vers la même limite.

1. Démonstration : on considère deux suites adjacentes (u_n) et (v_n) telles que (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante.

a. Montrer que la suite $(v_n - u_n)$ est décroissante et en déduire que tous ses termes sont positifs.

b. En déduire que les deux suites (u_n) et (v_n) sont convergentes, qu'elles ont même limite l, et que pour tout entier n, $u_n \leq l \leq v_n$.

2. Application : on considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies sur **N*** par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} = \sum_{p=0}^{p=n} \frac{1}{p!} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}.$$

a. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

b. Soit e leur limite commune. Déterminer un encadrement de e d'amplitude 10^{-9}. En déduire une valeur approchée de e à 10^{-9} près.

c. Montrer que le nombre e est un irrationnel. (On pourra raisonner par l'absurde en supposant qu'il existe deux entiers $p \in \mathbf{N}$ et $q \in \mathbf{N}^*$ tels que $e = \frac{p}{q}$ et partir de l'encadrement $u_q < e < v_q$).

1. On considère deux suites (u_n) et (v_n) telles que (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante.

a. Pour tout entier n, on a donc $u_n \leq u_{n+1}$ soit $-u_{n+1} \geq -u_n$ et $v_{n+1} \geq v_n$ d'où en ajoutant membre à membre les inégalités, $v_{n+1} - u_{n+1} \geq v_n - u_n$, ce qui signifie que la suite $(v_n - u_n)$ est décroissante.
Comme de plus $(v_n - u_n)$ converge vers 0, cette suite est à termes positifs.

b. On a alors pour tout entier n, $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$.
La suite (u_n) est donc croissante et majorée par v_0 et la suite (v_n) est décroissante minorée par u_0.
Elles convergent donc toutes les deux.
Si on appelle l et l' leurs limites respectives, alors $l' - l = \lim\limits_{n\to\infty}(v_n - u_n) = 0$ d'où $l = l'$.
De plus, comme (u_n) est croissante et de limite l, $u_n \leq l$ et, de façon analogue, $v_n \geq l$.

2. *a.* On va déjà démontrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante. Pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!}$, nombre positif. Donc (u_n)est croissante.

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - u_n - \frac{1}{n \times n!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n \times n!}$$

Soit $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n(n+1)(n+1)!}\left(n(n+1) + n - (n+1)(n+1)\right) = \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!}$, nombre négatif. Donc (v_n) est décroissante.
De plus, $0 < v_n - u_n \leq \frac{1}{n}$ donc $\lim\limits_{n\to\infty}(v_n - u_n) = 0$.
On peut donc affirmer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

b. Comme e est la limite communes suites adjacentes, pour tout entier n, $u_n \leq e \leq v_n$ et, pour avoir un encadrement de e d'amplitude 10^{-9}, il suffit d'avoir $\frac{1}{n \times n!} \leq 10^{-9}$, ce qui est vérifié pour $n = 13$.
La programmation ci-dessous en python :

```
from math import factorial

# initialisations
u = 2
v = 3
n = 1

# calculs des termes successifs
while v - u > 10**(-9) :
    n = n + 1
```

```
        u = u + 1/factorial(n)
        v = u + 1/(n*factorial(n))

    # affichage des termes de rang n de la suite u et de la suite v tels que v_n – u_n <10^-9
    print((u, v, n))
```

permet d'obtenir $2,718281828 < e < 2,718281829$. La longueur de l'encadrement est égale à 10^{-9}.
Tout nombre compris entre $2,718281828$ et $2,718281829$ est une valeur approchée de e à 10^{-9} puisque la distance entre ce nombre et le nombre e sera inférieur à la longueur de l'encadrement donc à 10^{-9}.
Remarque : il y a une infinité de valeurs approchées de e à 5×10^{-10}.

c. Si le nombre e est rationnel alors il existe deux entiers $p \in \mathbf{N}$ et $q \in \mathbf{N^*}$ tels que $e = \frac{p}{q}$. Comme pour tout entier q, $u_q < e < v_q$ soit $u_q < e < u_q + \frac{1}{q \times q!}$
D'où $q \times q! \times u_q < q \times q! \times e < q \times q! \times u_q + 1$. Ceci est impossible car l'entier $q \times q! \times e$ ne peut être compris strictement entre les deux entiers consécutifs $q \times q! \times u_q$ et $q \times q! \times u_q + 1$.

Exercice 4 – Équations avec radicaux

Propriété : Soit a et b deux réels, $a = b$ si et seulement si $a^2 = b^2$ **et** a, b ont le même signe.
Cette propriété est essentielle pour résoudre des équations faisant intervenir des racines carrées.

Dans les équations suivantes, l'inconnue est un nombre réel désigné par *x*.

1. Résoudre l'équation $\sqrt{x+1} = x$.
2. Est-il vrai que pour tout nombre réel a, l'équation $\sqrt{x+1} = ax$ admet une unique solution ? (On pourra distinguer plusieurs cas, suivant le signe du nombre a et celui du nombre x).
3. Déterminer l'ensemble des nombres réels a pour lesquels l'équation $\sqrt{x+a} = x$ admet exactement deux solutions.

1. Les termes ne sont définis que pour x appartenant à l'intervalle $[-1\,;+\infty[$.

Si $x \in [-1\,;0[$, alors $x < 0$ et $\sqrt{x+1} \geq 0$: pas de solution dans cet intervalle.
Si $x \in [0\,;+\infty[$, alors $\sqrt{x+1} = x \Leftrightarrow x+1 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$ (car $x > 0$ et $\sqrt{x+1} > 0$)
La résolution dans **R** de l'équation du second degré donne deux racines : $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
Seul x_1 appartient à l'intervalle $[0; +\infty[$ donc $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est l'unique solution de l'équation.

2. Les termes ne sont définis que pour x appartenant à l'intervalle $[-1\,;+\infty[$.

- Si $a = 0$, une seule solution : -1.
- Cas $a > 0$:
  - si $x \in [-1\,;0[$, alors $ax < 0$ alors que $\sqrt{x+1} \geq 0$. Il n'y a donc aucune solution dans l'intervalle $[-1\,;0[$.
  - Si $x \in [0; +\infty[$, alors $ax > 0$ donc $\sqrt{x+1} = ax \Leftrightarrow x+1 = (ax)^2 \Leftrightarrow a^2x^2 - x - 1 = 0$

La résolution dans **R** conduit à deux solutions : $x_1 = \frac{1+\sqrt{1+4a^2}}{2a^2}$; $x_1 = \frac{1-\sqrt{1+4a^2}}{2a^2}$. On vérifie que seul x_1 appartient à l'intervalle $[0; +\infty[$.

- Cas $a < 0$:
  - si $x \in]0\,;+\infty[$, alors $ax < 0$ alors que $\sqrt{x+1} \geq 0$. Il n'y a donc aucune solution dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$
  - si $x \in [-1\,;0]$, alors $ax > 0$ donc $\sqrt{x+1} = ax \Leftrightarrow x+1 = (ax)^2 \Leftrightarrow a^2x^2 - x - 1 = 0$

La résolution dans **R** conduit à deux solutions : $x_1 = \frac{1+\sqrt{1+4a^2}}{2a^2}$; $x_2 = \frac{1-\sqrt{1+4a^2}}{2a^2}$. On vérifie que seul x_2 appartient à l'intervalle $[-1\,;0]$.
L'affirmation est donc vraie : quel que soit le réel a, l'équation $\sqrt{x+1} = ax$ admet une unique solution.

3. Les termes ne sont définis que pour x appartenant à l'intervalle $[-a\,;+\infty[$.

- Si $a \leq 0$, $\forall x \in [-a\,;+\infty[$, $\sqrt{x+a} = x \Leftrightarrow x + a = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - a = 0$ (termes positifs car $-a \geq 0$)

La résolution dans **R** de l'équation $x^2 - x - a = 0$ donne deux solutions lorsque $a > -\frac{1}{4}$: $x_1 = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$ et $x_2 = \frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}$.
On doit maintenant examiner si x_1 et x_2 appartiennent à l'intervalle $[-a\,;+\infty[$

Puisque $x_2 < x_1$, il suffit d'étudier si $x_2 \geq -a$.

- $\forall a \in \left]-\frac{1}{4};0\right], \frac{1-\sqrt{1+4a}}{2} \geq -a \Leftrightarrow 1-\sqrt{1+4a} \geq -2a \Leftrightarrow 1+2a \geq \sqrt{1+4a}$ (termes positifs car $-a \geq 0$)
- $1+2a \geq \sqrt{1+4a} \Leftrightarrow (1+2a)^2 \geq 1+4a$ (termes positifs)

  Et $(1+2a)^2 \geq 1+4a \Leftrightarrow 1+4a+4a^2 \geq 1+4a \Leftrightarrow 4a^2 \geq 0$, ce qui est vrai.

Pour tout réel a appartenant à l'intervalle $\left]-\frac{1}{4};0\right]$, l'équation admet donc deux solutions.

- Si $a > 0$, alors :
  - $\forall x \in [-a\,;0[$, $x < 0$ alors que $\sqrt{x+a} \geq 0$: il n'y a donc pas de solution dans l'intervalle $[-a\,;0[$.
  - $\forall x \in [0\,;+\infty[, \sqrt{x+a} = x \Leftrightarrow x+a = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - a = 0$

    La résolution dans **R** de l'équation $x^2 - x - a = 0$ donne deux solutions : $x_1 = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$ et $x_2 = \frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}$; or $x_2 < 0$ donc l'équation n'admet pas deux solutions.

Conclusion : l'ensemble des réels a tels que l'équation $\sqrt{x+a} = x$ admette deux solutions est l'intervalle $\left]-\frac{1}{4};0\right]$.

Exercice 5 – Sens de variation et comparaison de fonctions

Pour comparer deux expressions, on étudie souvent le signe de la différence. Si une factorisation semble impossible on peut se ramener à étudier le sens de variation d'une fonction pour en déduire son signe.
En spécialité terminale, on démontre que les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur **R** et que pour tout réel x, $\sin'(x) = \cos(x)$ et $\cos'(x) = -\sin(x)$.

1. Montrer que pour tout réel positif ou nul x, on a $\sin(x) \leq x$.
On pourra étudier sur $[0;+\infty[$ les variations de la fonction f définie par $f(x) = x - \sin(x)$.
2. Démontrer de même successivement que pour tout réel positif ou nul x, on a :
$1-\frac{x^2}{2} \leq \cos(x)$ $\qquad x-\frac{x^3}{6} \leq \sin(x)$ $\qquad \cos(x) \leq 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$.
3. En déduire un encadrement de $\sin(x)$ et de $\cos(x)$.

1. Soit la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = x - \sin(x)$. Par somme, f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et pour tout réel positif ou nul x, on a $f'(x) = 1 - \cos(x)$ et $f'(x) \geq 0$ donc f est croissante sur $[0;+\infty[$.
Comme $f(0) = 0$, on en déduit que pour tout réel positif ou nul x, $f(x) \geq 0$ soit $\sin(x) \leq x$.
Attention : il ne faut pas confondre fonction croissante et fonction positive mais l'un permet parfois de déduire l'autre.
2. On considère de même les fonctions g, h et k définies sur $[0;+\infty[$ par :
$g(x) = \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}$ $\qquad h(x) = \sin(x) - x + \frac{x^3}{6}$ $\qquad$ et $\qquad k(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cos(x)$.
Les trois fonctions sont dérivables sur $[0;+\infty[$ et :

- pour tout réel positif ou nul x, $g'(x) = -\sin(x) + x = f(x)$ donc $g'(x) \geq 0$ donc g est croissante sur $[0;+\infty[$.
  Or $g(0) = 0$ donc pour tout réel positif ou nul x, $g(x) \geq 0$ soit $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x)$.
- pour tout réel positif ou nul x, $h'(x) = \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2} = g(x)$ donc $h'(x) \geq 0$ donc h est croissante sur $[0;+\infty[$.
  Or $h(0) = 0$ donc pour tout réel positif ou nul x, $h(x) \geq 0$ soit $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x)$.
- pour tout réel positif ou nul x, $k'(x) = -x + \frac{x^3}{6} - \sin(x) = h(x)$ donc $k'(x) \geq 0$ donc k est croissante sur $[0;+\infty[$.
  Or $k(0) = 0$ donc pour tout réel positif ou nul x, $k(x) \geq 0$ soit $\cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

3. Des inégalités obtenues dans la question 2 ., on tire les encadrements, pour tout réel positif ou nul x :
$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$ $\qquad$ et $\qquad 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

Ces inégalités se généralisent et on peut démontrer que les fonctions cosinus et sinus peuvent être approchées au voisinage de toute valeur, en particulier 0, par des fonctions polynômes. On parle de *développement limité*.

Exercice 6 – Fonction exponentielle

On sait que la fonction exponentielle est définie et dérivable sur **R** et telle que :
1) pour tous réels x et y, $\exp(x+y)=\exp(x)\times\exp(y)$
2) $\exp(1)=\mathrm{e}$ et $\exp(0)=1$.

<u>Théorème :</u> Si f une fonction définie et dérivable sur **R** et telle que :
$f(1)=\mathrm{e}$ et pour tous réels x et y, $f(x+y)=f(x)\times f(y)$, alors f est la fonction exponentielle.

Soit f une fonction définie et dérivable sur **R** et telle que
$f(1)=e$ et f vérifie l'équation fonctionnelle de Cauchy : pour tous réels x et y, $f(x+y)=f(x)\times f(y)$.

<u>Démonstration 1 :</u>

a. Déterminer les valeurs possibles pour $f(0)$. Montrer que $f(0)\neq 0$

b. Si y est fixé, on note g la fonction définie sur **R** par $g\colon x\mapsto f(x+y)$. Exprimer de deux manières différentes $g'(x)$.
En déduire que la fonction f vérifie une équation du type $f'=af$.

c. Conclure.

<u>Démonstration 2 (si on connait la fonction ln) :</u>

a. Montrer que pour tout réel x, $f(x)=\left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$. En déduire le signe de la fonction f.

b. Montrer que s'il existe un réel a tel que $f(a)=0$ alors f est la fonction nulle.

c. On suppose maintenant que pour tout réel x, $f(x)\neq 0$ et on pose, pour tout réel x, $g(x)=\ln\left(f(x)\right)$.
Montrer que g vérifie l'équation fonctionnelle de Cauchy.
On admet que si une fonction définie et continues sur **R** vérifie l'équation fonctionnelle de Cauchy alors cette fonction est linéaire.

d. Conclure.

<u>Démonstration 1 :</u>

a. Si $x=y=0$, alors $f(0)=(f(0))^2$ soit $f(0)\big(1-f(0)\big)=0$ soit $f(0)=0$ ou $f(0)=1$.
On remarque que si $f(0)=0$, alors pour tout réel x, $f(x)=f(0+x)=0\times f(x)=0$, ce qui est contredit par l'égalité $f(1)=e$.

b. Si y est fixé, la dérivée de la fonction $x\mapsto x+y$ est la fonction $x\mapsto 1$ donc $g'(x)=f'(x+y)$.
Comme on a aussi $g(x)=f(x)f(y)$ alors $g'(x)=f(y)f'(x)$ puisque $f(y)$ est une constante.
En particulier, si $x=0$, $f'(y)=f(y)f'(0)$ et ceci pour tout réel y. Il suffit alors de poser $f'(0)=a$.

c. La fonction f vérifie l'équation fonctionnelle $f'=af$ et $f(0)=1$.
On en déduit que pour tout réel x, $f(x)=e^{ax}$. Comme de plus, $f(1)=e$, $e^a=e$ soit $a=1$ et la fonction exponentielle est bien l'unique solution du problème.

<u>Démonstration 2 :</u>

a. Pour tout réel x, $f(x)=f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=\left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$. On en déduit que la fonction est positive ou nulle.

b. S'il existe un réel a tel que $f(a)=0$ alors pour tout réel x, $f(x)=f(x-a+a)=f(x-a)f(a)=0$
et la fonction f est la fonction nulle, ce qui est contredit par $f(1)=e$.

c. Comme la fonction f ne s'annule pas (d'après le b.) et comme elle est positive ou nulle (d'après le a .), la fonction g est bien définie sur **R** et pour tous réels x et y,
$g(x+y)=\ln(f(x+y))=\ln(f(x)f(y))=\ln(f(x))+\ln(f(y))=g(x)+g(y)$.

d. Les fonctions vérifiant l'équation fonctionnelle de Cauchy sont les fonctions linéaires donc il existe un réel k tel que pour tout réel x, $\ln(f(x))=g(x)=kx$ soit $f(x)=e^{kx}$.
Comme de plus $f(1)=e$, on a $k=1$ et la fonction exponentielle est bien l'unique solution du problème.

Exercice 7 – Sommes de carrés

<u>Théorème :</u>

pour tout entier naturel non nul n, $1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

1. Démontrer ce résultat par récurrence.

2. Déterminer, pour tout entier n, les sommes :
$S_n=2^2+4^2+6^2+\cdots+(2n-2)^2+(2n)^2$, somme des carrés des n premiers entiers pairs ;
$S'_n=1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-3)^2+(2n-1)^2$, somme des carrés des n premiers entiers impairs.

1. Pour $n=1$, le terme de gauche dans l'égalité vaut 1 et celui de droite vaut $\frac{1}{6}\times 1\times 2\times 3=1$ donc l'égalité est bien vérifiée.
Si pour un entier $n\geq 1$, on a $1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, alors

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+(n+1)^2=\frac{n+1}{6}\big(n(2n+1)+6(n+1)\big)$$
$$=\frac{n+1}{6}(2n^2+7n+6)=\frac{n+1}{6}(n+2)(2n+3)$$

On a donc bien $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2+(n+1)^2=\frac{1}{6}(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)$
Ce qui signifie que l'égalité est encore vraie au rang $n+1$.
Remarque : on peut obtenir la dernière égalité de deux façons, soit en cherchant les racines du polynôme $2n^2+7n+6$ pour le factoriser soit en partant de l'égalité qu'on cherche à obtenir puisque si $A=B$ et $C=B$ alors $A=C$.
Conclusion : pour tout entier $n\geq 1$, $1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

2. Il s'agit, dans un premier temps, de se ramener à la somme vue dans la question 1. en remarquant que pour tout entier k, $(2k)^2=4\times k^2$ et donc que $S_n=4(1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2+n^2)$
Soit $\boldsymbol{S_n}=4\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=\boldsymbol{\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)}$.

On remarque ensuite qu'en additionnant S_n et $S_n{}'$ on obtient une somme du type de la question 1. Plus précisément :
$S'_n=1^2+2^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2-(2^2+4^2+6^2+\cdots+(2n-2)^2)$
Soit $S'_n=1^2+2^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2-S_{n-1}$
Soit $S'_n=\frac{1}{6}(2n-1)(2n-1+1)(2(2n-1)+1)-\frac{2}{3}(n-1)n(2(n-1)+1)$
Soit $\boldsymbol{S'_n}=\frac{n}{3}((2n-1)(4n-1)-2(n-1)(2n-1))=\boldsymbol{\frac{n}{3}(2n-1)(2n+1)}$