Pépinière académique de mathématiques

Année 2022-2023 **Stage « filé »**

Classe de terminale **Fiche numéro 1**

Parution lundi 17 octobre **Retour attendu pour le jeudi 17 novembre**

Exercice 1 – Suites numériques linéaires

Définitions suite arithmétique, suite géométrique

Raisonnement par récurrence

On s'intéresse aux suites (u_n) vérifiant la relation de récurrence notée (R) :

pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n$.

On admettra que pour tout couple de valeurs données à (u_0, u_1), il existe une unique suite (u_n) vérifiant la relation (R).

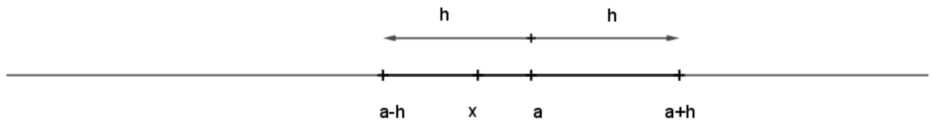
1. Montrer qu'à l'exception de la suite nulle (constante égale à 0), aucune suite arithmétique ne vérifie la relation de récurrence (R).
2. On cherche s'il existe des suites géométriques de terme général $u_n = q^n$ (où q est un réel non nul) vérifiant la relation (R).
   a) Montrer qu'une suite de terme général $u_n = q^n$vérifie la relation (R) si et seulement si q est une solution dans **R** de l'équation $x^2 - 2x - 1 = 0$.
   b) En déduire qu'il existe deux suites de terme général $u_n = q^n$ vérifiant la relation (R). On notera q_1 et q_2 les raisons de ces suites.
3. Soit a et b des nombres réels quelconques. Montrer que la suite de terme général $w_n = a{q_1}^n + b{q_2}^n$ vérifie la relation (R).
4. Soit x_0 et x_1 des nombres réels donnés. Montrer qu'il existe une unique suite (w_n) que l'on déterminera, de terme général $w_n = a{q_1}^n + b{q_2}^n$, telle que $w_0 = x_0$ et $w_1 = x_1$.
5. Montrer que pour tout entier naturel *n*, $\left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^n$ est un entier naturel.

Définitions :

- on dit qu'une suite (u_n) converge vers un nombre réel a lorsque tout intervalle ouvert contenant a contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
- un intervalle I est dit ouvert centré en a lorsqu'il existe un réel h strictement positif tel que $I =]a-h, a+h[$.

Propriété : soit a un réel et h un réel strictement positif, $x \in]a-h, a+h[$ équivaut à $|a-x| < h$.

Définition : soit a et x deux nombres réels et soit h un réel strictement positif. On dit que a est une valeur approchée de x à la précision h (ou « à h près ») lorsque $a - h < x < a + h$.



On obtient un encadrement de x de longueur $2h$.

Cela signifie que la distance entre les réels a et x est inférieure ou égale à h, c'est-à-dire $|a - x| < h$.

Comme $|a - x| = |x - a|$, cela signifie aussi que x est une valeur approchée de a à h près.

Dans les études de suites convergentes, terme général et limite sont valeurs approchées l'un de l'autre et il est important de connaitre la précision de ces approximations.

Exercice 2 – Limites de suites et valeurs approchées

Soit la suite de terme général $u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n^2} \quad (n \in \boldsymbol{N}^*)$

1. Démontrer que la suite(u_n) converge vers 1.
2. Est-il vrai que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 21, le nombre 1 est une valeur approchée de u_n à 0,05 près ?
3. Soit r un nombre réel strictement positif donné. Déterminer un entier naturel n_0, dont on donnera une expression en fonction de r, tel que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0, 1 est une valeur approchée de u_n à r près ?

Exercice 3 – Suites adjacentes

Définition : deux suites (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes lorsque l'une est croissante, l'autre décroissante et $\lim_{n\to\infty}(u_n - v_n) = 0$.

Théorème : deux suites adjacentes convergent vers la même limite.

1. Démonstration : on considère deux suites adjacentes (u_n) et (v_n) telles que (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante.

a. Montrer que la suite $(v_n - u_n)$ est décroissante et en déduire que tous ses termes sont positifs.

b. En déduire que les deux suites (u_n) et (v_n) sont convergentes, qu'elles ont même limite l, et que pour tout entier n, $u_n \leq l \leq v_n$.

2. Application : on considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies sur **N*** par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} = \sum_{p=0}^{p=n} \frac{1}{p!} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}.$$

a. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

b. Soit e leur limite commune. Déterminer un encadrement de e d'amplitude 10^{-9}. En déduire une valeur approchée de e à 10^{-9} près.

c. Montrer que le nombre e est un irrationnel. (On pourra raisonner par l'absurde en supposant qu'il existe deux entiers $p \in$ **N** et $q \in$ **N*** tels que $e = \frac{p}{q}$ et partir de l'encadrement $u_q < e < v_q$).

Exercice 4 – Équations avec radicaux

Propriété : Soit a et b deux réels, $a = b$ si et seulement si $a^2 = b^2$ **et** a, b ont le même signe.

Cette propriété est essentielle pour résoudre des équations faisant intervenir des racines carrées.

Dans les équations suivantes, l'inconnue est un nombre réel désigné par *x*.

1. Résoudre l'équation $\sqrt{x+1} = x$.
2. Est-il vrai que pour tout nombre réel a, l'équation $\sqrt{x+1} = ax$ admet une unique solution ?
   (On pourra distinguer plusieurs cas, suivant le signe du nombre a et celui du nombre x).
3. Déterminer l'ensemble des nombres réels a pour lesquels l'équation $\sqrt{x+a} = x$ admet exactement deux solutions.

Exercice 5 – Sens de variation et comparaison de fonctions

Pour comparer deux expressions, on étudie souvent le signe de la différence. Si une factorisation semble impossible on peut se ramener à étudier le sens de variation d'une fonction pour en déduire son signe.

En spécialité terminale, on démontre que les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur **R** et que pour tout réel x, $\sin'(x) = \cos(x)$ et $\cos'(x) = -\sin(x)$.

1. Montrer que pour tout réel positif ou nul x, on a $\sin(x) \leq x$.

On pourra étudier sur $[0; +\infty[$ les variations de la fonction f définie par $f(x) = x - \sin(x)$.

2. Démontrer de même successivement que pour tout réel positif ou nul x, on a :

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \qquad x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \qquad \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

3. En déduire un encadrement de $\sin(x)$ et de $\cos(x)$.

Ces inégalités se généralisent et on peut démontrer que les fonctions cosinus et sinus peuvent être approchées au voisinage de toute valeur, en particulier 0, par des fonctions polynômes. On parle de *développement limité*.

Exercice 6 – Fonction exponentielle

On sait que la fonction exponentielle est définie et dérivable sur **R** et telle que :
1) pour tous réels x et y, $\exp(x+y)=\exp(x)\times\exp(y)$
2) $\exp(1)=\mathrm{e}$ et $\exp(0)=1$.
Théorème : Si f une fonction définie sur **R** et telle que :
$f(1)=\mathrm{e}$ et pour tous réels x et y, $f(x+y)=f(x)\times f(y)$, alors f est la fonction exponentielle.

Soit f une fonction définie et dérivable sur **R** et telle que
$f(1)=e$ et f vérifie l'équation fonctionnelle de Cauchy : pour tous réels x et y, $f(x+y)=f(x)\times f(y)$.
Démonstration 1 :
a. Déterminer les valeurs possibles pour $f(0)$. Montrer que $f(0)\neq 0$
b. Si y est fixé, on note g la fonction définie sur **R** par $g: x\mapsto f(x+y)$. Exprimer de deux manières différentes $g'(x)$.
En déduire que la fonction f vérifie une équation du type $f'=af$.
c. Conclure.
Démonstration 2 (si on connait la fonction ln) :
a. Montrer que pour tout réel x, $f(x)=\left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$. En déduire le signe de la fonction f.
b. Montrer que s'il existe un réel a tel que $f(a)=0$ alors f est la fonction nulle.
c. On suppose maintenant que pour tout réel x, $f(x)\neq 0$ et on pose, pour tout réel x, $g(x)=\ln(f(x))$.
Montrer que g vérifie l'équation fonctionnelle de Cauchy.
On admet que si une fonction définie et continues sur **R** vérifie l'équation fonctionnelle de Cauchy alors cette fonction est linéaire.
d. Conclure.

Exercice 7 – Sommes de carrés

Théorème :
pour tout entier naturel non nul n, $1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

1. Démontrer ce résultat par récurrence.
2. Déterminer, pour tout entier n, les sommes :
$S_n=2^2+4^2+6^2+\cdots+(2n-2)^2+(2n)^2$, somme des carrés des n premiers entiers pairs ;
$S'_n=1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-3)^2+(2n-1)^2$, somme des carrés des n premiers entiers impairs.