ACADÉMIE DE VERSAILLES
Liberté Égalité Fraternité

Pépinière académique de mathématiques

Année 2021-2022 — **Stage « filé »**

Classe terminale — **Fiche numéro 1**

Parution lundi 18 octobre — **Retour attendu pour le vendredi 12 novembre**

Exercice 1 Suites adjacentes

Définition : deux suites (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes lorsque l'une est croissante, l'autre décroissante et $\lim_{n\to\infty}(u_n - v_n) = 0$.

Théorème : deux suites adjacentes convergent vers la même limite.

1. Démonstration : on considère deux suites adjacentes (u_n) et (v_n) telles que (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante.

a. Montrer que la suite $(v_n - u_n)$ est décroissante et en déduire que tous ses termes sont positifs.

b. En déduire que les deux suites (u_n) et (v_n) sont convergentes, qu'elles ont même limite l, et que pour tout entier n, $u_n \le l \le v_n$.

2. Application : on considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies sur **N*** par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} = \sum_{p=0}^{p=n} \frac{1}{p!} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}.$$

a. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

b. Soit e leur limite commune. Déterminer un encadrement de e d'amplitude 10^{-9}.

c. Montrer que le nombre e est un irrationnel. (On pourra raisonner par l'absurde en supposant qu'il existe deux entiers $p \in \mathbf{N}$ et $q \in \mathbf{N}^*$ tels que $e = \frac{p}{q}$ et partir de l'encadrement $u_q < e < v_q$).

1. On considère deux suites (u_n) et (v_n) telles que (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante.

a. Pour tout entier n, on a donc $u_n \le u_{n+1}$ soit $-u_{n+1} \ge -u_n$ et $v_{n+1} \ge v_n$ d'où en ajoutant membre à membre les inégalités, $v_{n+1} - u_{n+1} \ge v_n - u_n$, ce qui signifie que la suite $(v_n - u_n)$ est décroissante.

Comme de plus $(v_n - u_n)$ converge vers 0, cette suite est à termes positifs.

b. On a alors pour tout entier n, $u_0 \le u_n \le v_n \le v_0$.

La suite (u_n) est donc croissante et majorée par v_0 et la suite (v_n) est décroissante minorée par u_0.

Elles convergent donc toutes les deux.

Si on appelle l et l' leurs limites respectives, alors $l' - l = \lim_{n\to\infty} (v_n - u_n) = 0$ d'où $l = l'$.

De plus, comme (u_n) est croissante et de limite l, $u_n \le l$ et, de façon analogue, $v_n \ge l$.

2. ***a.*** On va déjà démontrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante. Pour tout entier n,

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!}$, nombre positif. Donc (u_n)est croissante.

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - u_n - \frac{1}{n \times n!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n \times n!}$$

Soit $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n(n+1)(n+1)!}(n(n+1) + n - (n+1)(n+1)) = \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!}$, nombre négatif. Donc (v_n) est décroissante.

De plus, $0 < v_n - u_n \le \frac{1}{n}$ donc $\lim_{n\to\infty} (v_n - u_n) = 0$.

On peut donc affirmer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

b. Comme e est la limite communes suites adjacentes, pour tout entier n, $u_n \le e \le v_n$ et, pour avoir un encadrement de e d'amplitude 10^{-9}, il suffit d'avoir $\frac{1}{n \times n!} \le 10^{-9}$, ce qui est vérifié pour $n = 13$.

Une programmation permet d'obtenir $2,718281828 < e < 2,718281829$.

En python :

```
from math import factorial

# initialisations
u = 2
v = 3
n = 1
```

```
# calculs des termes successifs
while v - u > 10**(-9) :
    n = n + 1
    u = u + 1/factorial(n)
    v = u + 1/(n*factorial(n))

# affichage des termes de rang n de la suite u et de la suite v tels que v_n – u_n <10^-9
print((u, v, n))
```

c. Si le nombre e est rationnel alors il existe deux entiers $p \in \mathbf{N}$ et $q \in \mathbf{N^*}$ tels que $e = \frac{p}{q}$. Comme pour tout entier q, $u_q < e < v_q$ soit $u_q < e < u_q + \frac{1}{q \times q!}$
D'où $q \times q! \times u_q < q \times q! \times e < q \times q! \times u_q + 1$. Ceci est impossible car l'entier $q \times q! \times e$ ne peut être compris strictement entre les deux entiers consécutifs $q \times q! \times u_q$ et $q \times q! \times u_q + 1$.

Exercice 2 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème : soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a, b]$ et telle que $f(a)$ et $f(b)$ sont non nuls et de signes contraires alors il existe un réel c tel que $f(c) = 0$.

L'objectif de l'exercice est de démontrer ce théorème.
On considère une fonction f définie et continue sur un intervalle $[a, b]$ et telle que $f(a)$ et $f(b)$ sont non nuls et de signes contraires et on construit les suites (u_n) et (v_n) telles que :
$u_0 = a$, $v_0 = b$ et, pour tout entier n,
si $f\left(\frac{u_n+v_n}{2}\right) \times f(a) \geq 0$ alors $u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$ et $v_{n+1} = v_n$
si $f\left(\frac{u_n+v_n}{2}\right) \times f(a) < 0$ alors $u_{n+1} = u_n$ et $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$.
Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et que leur limite commune c vérifie $f(c) = 0$.

On va démontrer que :
1. La suite $(v_n - u_n)$ converge vers 0.
2. La suite (u_n) est croissante ;
3. La suite (v_n) est décroissante ;
1. Etudions déjà la suite $(v_n - u_n)$.
$v_0 - u_0 = b - a$ qui est un nombre positif.
De plus, pour tout entier n, $v_{n+1} - u_{n+1}$ vaut soit $v_n - \frac{u_n+v_n}{2}$ soit $\frac{u_n+v_n}{2} - u_n$.
Dans les deux cas, $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{v_n-u_n}{2}$. La suite $(v_n - u_n)$ est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
On en déduit qu'elle converge vers 0. De plus comme son premier terme est positif, tous ses termes sont positifs.
2. Pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n$ vaut soit $\frac{u_n+v_n}{2} - u_n = \frac{v_n-u_n}{2}$ soit 0. Dans les deux cas, $u_{n+1} - u_n \geq 0$.
La suite (u_n) est donc croissante.
3. Pour tout entier n, $v_{n+1} - v_n$ vaut soit 0 soit $\frac{u_n+v_n}{2} - v_n = -\frac{v_n-u_n}{2}$.
Dans les deux cas, $v_{n+1} - v_n \leq 0$.
La suite (v_n) est donc décroissante.
Les suites (u_n) et (v_n) sont bien adjacentes.
Elles convergent donc toutes les deux et ont même limite c.

Montrons par récurrence que pour tout entier n, $f(u_n) \times f(a) \geq 0$ et $f(v_n) \times f(a) \leq 0$.
Pour $n = 0$, $f(u_0) \times f(a) = f(a) \times f(a)$ qui est positif et $f(v_0) \times f(a) = f(b) \times f(a)$ qui est négatif.
Si pour un certain entier n, $f(u_n) \times f(a) \geq 0$ et $f(v_n) \times f(a) \leq 0$
Alors :
si $f\left(\frac{u_n+v_n}{2}\right) \times f(a) \geq 0$ alors $u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$ et $v_{n+1} = v_n$ donc $f(u_{n+1}) \times f(a) \geq 0$ et, comme $f(v_n) \times f(a) \leq 0$ alors $f(v_{n+1}) \times f(a) \leq 0$.

si $f\left(\frac{u_n+v_n}{2}\right)\times f(a)<0$ alors $u_{n+1}=u_n$ et $v_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}$ donc , comme $f(u_n)\times f(a)\geq 0$, alors $f(u_{n+1})\times f(a)\geq 0$ et $f(v_{n+1})\times f(a)\leq 0$.
Dans les deux cas, $f(u_{n+1})\times f(a)\geq 0$ et $f(v_{n+1})\times f(a)\leq 0$ donc les inégalités sont vérifiées au rang $n+1$.
On peut en conclure que pour tout entier n, $f(u_n)\times f(a)\geq 0$ et $f(v_n)\times f(a)\leq 0$.
Comme la fonction f est continue sur $[a,b]$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(u_n)=f(c)=\lim\limits_{n\to\infty} f(v_n)$ d'où $f(c)\geq 0$ et $f(c)\leq 0$
Soit $f(c)=0$.

Exercice 3 Sommes de carrés

Théorème :

pour tout entier naturel non nul n, $1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

1. Démontrer ce résultat par récurrence.
2. Déterminer, pour tout entier n, les sommes :
$S_n=2^2+4^2+6^2+\cdots+(2n-2)^2+(2n)^2$, somme des n premiers entiers pairs ;
$S'_n=1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-3)^2+(2n-1)^2$, somme des n premiers entiers impairs.

1. Pour $n=1$, le terme de gauche dans l'égalité vaut 1 et celui de droite vaut $\frac{1}{6}\times 1\times 2\times 3=1$ donc l'égalité est bien vérifiée.
Si pour un entier $n\geq 1$, on a $1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, alors

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+(n+1)^2$$
$$=\frac{n+1}{6}\big(n(2n+1)+6(n+1)\big)=\frac{n+1}{6}(2n^2+7n+6)=\frac{n+1}{6}(n+2)(2n+3)$$

On a donc bien $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2+(n+1)^2=\frac{1}{6}(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)$
Ce qui signifie que l'égalité est encore vraie au rang $n+1$.
Remarque : on peut obtenir la dernière égalité de deux façons, soit en cherchant les racines du polynôme $2n^2+7n+6$ pour le factoriser soit en partant de l'égalité qu'on cherche à obtenir puisque si $A=B$ et $C=B$ alors $A=C$.
Conclusion : pour tout entier $n\geq 1$, $1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

2. Il s'agit, dans un premier temps, de se ramener à la somme vue dans la question 1. en remarquant que pour tout entier k, $(2k)^2=4\times k^2$ et donc que $S_n=4(1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2+n^2)$
Soit $\boldsymbol{S_n}=4\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=\boldsymbol{\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)}$.

On remarque ensuite qu'en additionnant S_n et $S_n{}'$ on obtient une somme du type de la question 1. Plus précisément :
$S'_n=1^2+2^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2-(2^2+4^2+6^2+\cdots+(2n-2)^2)$
Soit $S'_n=1^2+2^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2-S_{n-1}$
Soit $S'_n=\frac{1}{6}(2n-1)(2n-1+1)(2(2n-1)+1)-\frac{2}{3}(n-1)n(2(n-1)+1)$
Soit $\boldsymbol{S'_n}=\frac{n}{3}((2n-1)(4n-1)-2(n-1)(2n-1))=\boldsymbol{\frac{n}{3}(2n-1)(2n+1)}$

Exercice 4 Équations fonctionnelles
Équation fonctionnelle de Cauchy
On veut montrer que toutes les fonctions f définies et continues sur **R** telle que pour tous réels x et y, $f(x+y)=f(x)+f(y)$ sont linéaires.
a. Soit f une telle fonction, montrer que $f(0)=0$ et que pour tout entier naturel non nul n,
$f(nx)=nf(x)$. (1)
b. Montrer que cette égalité est aussi vraie pour tout entier n négatif.
c. En remarquant que si p et q sont deux entiers tels que $q\neq 0$, $q\times\frac{p}{q}=p$, en déduire que l'égalité (1) est vérifiée pour tout réel x et tout rationnel r. En déduire qu'il existe un réel k tel que pour tout rationnel r, $f(r)=kr$.

d. On admet que tout nombre réel x peut être obtenu comme limite d'une suite (r_n) de nombres rationnels. En déduire que, pour tout réel x, $f(x) = kx$.
e. Conclure

a. Si on prend $x = y = 0$, on obtient $f(0) = 2f(0)$ dont la seule solution est $f(0) = 0$.
Pour $n = 1$, l'égalité (1) est vérifiée.
Si cette égalité est vérifiée pour un entier n, alors pour tout réel x,
$f\big((n+1)x\big) = f(nx + x) = f(nx) + f(x) = nf(x) + f(x) = (n+1)f(x)$ et l'égalité (1) est vérifiée au rang $n+1$.
Conclusion : pour tout réel x et pour tout entier naturel non nul n, $f(nx) = nf(x)$.
b. Si n est un entier négatif alors $-n > 0$ et pour tout réel x,
$0 = f(0) = f(-nx + nx) = f(-nx) + f(nx)$. Or, comme $-n > 0$, $f(-nx) = -nf(x)$,
d'où $f(nx) = nf(x)$.
c. Pour tout rationnel r, il existe deux entiers p et q tels que $q \neq 0$ et $r = \frac{p}{q}$. D'après les questions ***a.*** et ***b.*** pour tout réel x, $f(px) = f\left(q \times \frac{p}{q}x\right) = qf\left(\frac{p}{q}x\right)$ d'où l'égalité (1) est bien vérifiée pour tout rationnel r et tout réel x. En particulier, pour $x = 1$, $f(r) = rf(1)$. Il suffit de poser $f(1) = k$.
d. Soit x un réel quelconque. Il existe une suite (r_n) de nombres rationnels telle que $x = \lim\limits_{n\to\infty} r_n$ alors, comme f est continue sur **R**, $f(x) = f\left(\lim\limits_{n\to\infty} r_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} f(r_n)$.
Soit $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} kr_n = k \lim\limits_{n\to\infty} r_n = kx$.
e. On en déduit que les solutions de l'équation fonctionnelle de Cauchy sont les fonctions linéaires.

Exercice 5 Fonction exponentielle
On sait que la fonction exponentielle est définie et dérivable sur **R** et telle que :
1) pour tous réels x et y, $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$
2) $\exp(1) = \mathrm{e}$ et $\exp(0) = 1$.
Théorème : Si f une fonction définie sur **R** et telle que :
$f(1) = \mathrm{e}$ et pour tous réels x et y, $f(x+y) = f(x) \times f(y)$, alors f est la fonction exponentielle.

Soit f une fonction définie et dérivable sur **R** et telle que
$f(1) = e$ et pour tous réels x et y, $f(x+y) = f(x) \times f(y)$.
Démonstration 1 :
a. Déterminer les valeurs possibles pour $f(0)$. Montrer que $f(0) \neq 0$
b. Si y est fixé, on note g la fonction définie sur **R** par $g: x \mapsto f(x+y)$. Exprimer de deux manières différentes $g'(x)$. En déduire que la fonction f vérifie une équation du type $f' = af$.
c. Conclure.
Démonstration 2 (si on connait la fonction ln) :
a. Montrer que pour tout réel x, $f(x) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$. En déduire le signe de la fonction f.
b. Montrer que s'il existe un réel a tel que $f(a) = 0$ alors f est la fonction nulle.
c. On suppose maintenant que pour tout réel x, $f(x) \neq 0$ et on pose, pour tout réel x, $g(x) = \ln(f(x))$.
Montrer que g vérifie l'équation fonctionnelle de Cauchy.
d. Conclure.

Démonstration 1 :
a. Si $x = y = 0$, alors $f(0) = (f(0))^2$ soit $f(0)\big(1 - f(0)\big) = 0$ soit $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.
On remarque que si $f(0) = 0$, alors pour tout réel x, $f(x) = f(0 + x) = 0 \times f(x) = 0$, ce qui est contredit par l'égalité $f(1) = e$.
b. Si y est fixé, la dérivée de la fonction $x \mapsto x + y$ est la fonction $x \mapsto 1$ donc $g'(x) = f'(x+y)$.
Comme on a aussi $g(x) = f(x)f(y)$ alors $g'(x) = f(y)f'(x)$ puisque $f(y)$ est une constante.
En particulier, si $x = 0$, $f'(y) = f(y)f'(0)$ et ceci pour tout réel y. Il suffit alors de poser $f'(0) = a$.
c. La fonction f vérifie l'équation fonctionnelle $f' = af$ et $f(0) = 1$.
On en déduit que pour tout réel x, $f(x) = e^{ax}$. Comme de plus, $f(1) = e$, $e^a = e$ soit $a = 1$ et la fonction exponentielle est bien l'unique solution du problème.

Démonstration 2 :

a. Pour tout réel x, $f(x)=f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=\left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$. On en déduit que la fonction est positive ou nulle.
b. S'il existe un réel a tel que $f(a)=0$ alors pour tout réel x, $f(x)=f(x-a+a)=f(x-a)f(a)=0$ et la fonction f est la fonction nulle, ce qui est contredit par $f(1)=e$.
c. Comme la fonction f ne s'annule pas (d'après le b.) et comme elle est positive ou nulle (d'après le a .), la fonction g est bien définie sur **R** et pour tous réels x et y,
$g(x+y)=\ln(f(x+y))=\ln(f(x)f(y))=\ln(f(x))+\ln(f(y))=g(x)+g(y)$.
d. Les fonctions vérifiant l'équation fonctionnelle de Cauchy sont les fonctions linéaires donc il existe un réel k tel que pour tout réel x, $\ln(f(x))=g(x)=kx$ soit $f(x)=e^{kx}$.
Comme de plus $f(1)=e$, on a $k=1$ et la fonction exponentielle est bien l'unique solution du problème.

Exercice 6 Sens de variation et comparaison de fonctions

Pour comparer deux expressions, on étudie souvent le signe de la différence. Si une factorisation semble impossible on peut se ramener à étudier le sens de variation d'une fonction pour en déduire son signe.
En spécialité terminale, on démontre que les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur **R** et que pour tout réel x, $\sin'(x)=\cos(x)$ et $\cos'(x)=-\sin(x)$.

1. Montrer que pour tout réel positif ou nul x, on a $\sin(x)\leq x$.
On pourra étudier sur $[0;+\infty[$ les variations de la fonction f définie par $f(x)=x-\sin(x)$.
2. Démontrer de même successivement que pour tout réel positif ou nul x, on a :
$1-\frac{x^2}{2}\leq\cos(x)$ $\qquad$ $x-\frac{x^3}{6}\leq\sin(x)$ $\qquad$ $\cos(x)\leq 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$.
3. En déduire un encadrement de $\sin(x)$ et de $\cos(x)$.

1. Soit la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=x-\sin(x)$. Par somme, f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et pour tout réel positif ou nul x, on a $f'(x)=1-\cos(x)$ et $f'(x)\geq 0$ donc f est croissante sur $[0;+\infty[$.
Comme $f(0)=0$, on en déduit que pour tout réel positif ou nul x, $f(x)\geq 0$ soit $\sin(x)\leq x$.
Attention : il ne faut pas confondre fonction croissante et fonction positive mais l'un permet parfois de déduire l'autre.
2. On considère de même les fonctions g, h et k définies sur $[0;+\infty[$ par :
$g(x)=\cos(x)-1+\frac{x^2}{2}$ $\qquad$ $h(x)=\sin(x)-x+\frac{x^3}{6}$ $\qquad$ et $\qquad$ $k(x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\cos(x)$.
Les trois fonctions sont dérivables sur $[0;+\infty[$ et :

- pour tout réel positif ou nul x, $g'(x)=-\sin(x)+x=f(x)$ donc $g'(x)\geq 0$ donc g est croissante sur $[0;+\infty[$.
  Or $g(0)=0$ donc pour tout réel positif ou nul x, $g(x)\geq 0$ soit $1-\frac{x^2}{2}\leq\cos(x)$.
- pour tout réel positif ou nul x, $h'(x)=\cos(x)-1+\frac{x^2}{2}=g(x)$ donc $h'(x)\geq 0$ donc h est croissante sur $[0;+\infty[$.
  Or $h(0)=0$ donc pour tout réel positif ou nul x, $h(x)\geq 0$ soit $x-\frac{x^3}{6}\leq\sin(x)$.
- pour tout réel positif ou nul x, $k'(x)=-x+\frac{x^3}{6}-\sin(x)=h(x)$ donc $k'(x)\geq 0$ donc k est croissante sur $[0;+\infty[$.
  Or $k(0)=0$ donc pour tout réel positif ou nul x, $k(x)\geq 0$ soit $\cos(x)\leq 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$.

3. Des inégalités obtenues dans la question 2 ., on tire les encadrements, pour tout réel positif ou nul x :
$x-\frac{x^3}{6}\leq\sin(x)\leq x$ $\qquad$ et $\qquad$ $1-\frac{x^2}{2}\leq\cos(x)\leq 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$.

Ces inégalités se généralisent et on peut démontrer que les fonctions cosinus et sinus peuvent être approchées au voisinage de toute valeur, en particulier 0, par des fonctions polynômes. On parle de *développement limité*.

Exercice 7 Tangentes à une parabole

Les fonctions polynômes du second degré sont représentées par des paraboles. Ces courbes et leurs tangentes ont de nombreuses propriétés qui peuvent se démontrer en s'appuyant sur le fait qu'un point appartient à un ensemble si et seulement si ses coordonnées vérifient une équation de l'ensemble dans un repère.
Petit rappel : deux droites du plan sont perpendiculaires si le produit de leur coefficient directeur dans un repère orthonormal est égal à -1.

On considère la fonction f définie sur **R** par $f(x) = kx^2$ où k est un réel donné et un point A du plan de coordonnées (a, b) dans un repère orthonormal.

1. Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f dans un repère. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}_f$ à $\mathcal{C}_f$ en M_0.

2. Montrer que la droite $\mathcal{T}_f$ coupe l'axe des ordonnées en un point T qui est le symétrique par rapport à l'origine du projeté orthogonal N_0 de M_0 sur l'axe des ordonnées.

3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe au moins une tangente à $\mathcal{C}_f$ passant par le point A. Etudier plus précisément le nombre de tangentes à $\mathcal{C}_f$ passant par le point A.

4. Dans le cas, où il existe exactement deux tangentes à $\mathcal{C}_f$ passant par le point A, montrer que ces deux tangentes sont perpendiculaires si et seulement si $b = -\frac{1}{4k}$.

5. Toujours dans le cas où il existe exactement deux tangentes à $\mathcal{C}_f$ passant par le point A, montrer que si M_1 et M_2 sont les deux points de contact de ces tangentes avec la parabole et si I est le milieu de $[M_1M_2]$ alors la droite (AI) est parallèle à l'axe des ordonnées.

1. Une équation de la tangente $\mathcal{T}_f$ à $\mathcal{C}_f$ en M_0 s'écrit $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ soit, après simplification, $y = 2kx_0x - kx_0^2$.

2. Les coordonnées du point d'intersection T de cette tangente avec la courbe vérifient les deux équations de droite. Son abscisse est donc nulle et son ordonnée vaut $-kx_0^2$. Or le projeté orthogonal N_0 de M_0 sur l'axe des ordonnées a pour abscisse 0 et même ordonnée kx_0^2 que M_0. On vérifie aisément sur les coordonnées que l'origine O du repère est bien le milieu de $[TN_0]$.

De cette propriété Evangelista Toricelli (physicien et géomètre du 17e siècle) a tiré une méthode de construction de tangente à la parabole en M_0 : construire N_0 et T puis la droite (M_0T).

3. $A(a, b)$ appartient à $\mathcal{T}_f$ si et seulement si ses coordonnées vérifient une équation de $\mathcal{T}_f$ soit
$b = 2kx_0a - kx_0^2$, équation du second degré en x_0 qui s'écrit $kx_0^2 - 2kx_0a + b = 0$.
Le discriminant de cette équation est $\Delta = (-2ka)^2 - 4kb = 4k(ka^2 - b)$.
Il existe au moins une tangente à $\mathcal{C}_f$ passant par le point A si et seulement si $4k(ka^2 - b) \geq 0$

4. Si $ka^2 - b > 0$ les deux solutions de l'équations sont $x_1 = \frac{2ka - \sqrt{4k(ka^2-b)}}{2k}$ et $x_2 = \frac{2ka + \sqrt{4k(ka^2-b)}}{2k}$
et les coefficients directeurs des deux tangentes sont $m_1 = 2kx_1$ et $m_2 = 2kx_2$.
Leur produit est $p = \frac{4k^2}{4k^2}\left(4k^2a^2 - 4k(ka^2 - b)\right) = 4kb$. Les deux tangentes sont donc perpendiculaires si et seulement si $b = -\frac{1}{4k}$.

La droite d'équation $y = -\frac{1}{4k}$ est en fait la « directrice » de la parabole.

5. Dire que (AI) est parallèle à l'axe des ordonnées revient à dire que les points A et I ont même abscisse.
Or I a pour abscisse $\frac{x_1+x_2}{2}$. Comme x_1 et x_2 sont les solutions de l'équation $kx_0^2 - 2kx_0a + b = 0$, on sait que $x_1 + x_2 = -\frac{-2ka}{k} = 2a$ et $\frac{x_1+x_2}{2} = a$. Les points A et I ont donc bien même abscisse.