ACADÉMIE DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Pépinière académique de mathématiques

Année 2022-2023 **Stage « filé »**

Classe de seconde **Fiche numéro 1**

Parution lundi 7 novembre **Retour attendu pour le lundi 28 novembre**

Exercice 1 – Calcul littéral

Propriété : pour tous réels a et b :
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ et $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
Cette propriété est très utile aussi bien pour factoriser que pour développer.
On peut notamment faire des « factorisations forcées » pour se ramener à l'une de ces égalités pour factoriser une expression.
Méthode : pour démontrer une égalité $A = B$, on peut, suivant les cas :

- montrer que $A - B = 0$
- montrer que $A = C$ et $B = C$
- transformer A pour arriver à B ou transformer B pour arriver à A.

1. Soit x et y deux réels quelconques, développer et réduire les expressions $(x+y)^3$ et $(x+y)^4$.
2. Soit x et y deux réels non nuls. On pose $a = x + \frac{1}{x}$, $b = y + \frac{1}{y}$ et $c = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$.
   a) Exprimer en fonction de a les nombres $x^2 + \frac{1}{x^2}$, $x^3 + \frac{1}{x^3}$ et $x^4 + \frac{1}{x^4}$.
   b) Démontrer que $a^2 + b^2 + c^2 = abc + 4$.
3. Soit n un entier naturel, on veut montrer que l'entier $N = 1 + n(n+1)(n+2)(n+3)$ est un carré parfait (le carré d'un entier).
   a) Montrer que $n(n+3) = (n+1)(n+2) - 2$.
   b) Conclure.

Exercice 2 – Inégalités et opérations

Définition : on dit qu'un nombre a est inférieur ou égal à un nombre b lorsque $b - a \geq 0$.
Cette définition conduit à une méthode pratique pour comparer deux nombres.
Soit a, b, c et d des nombres réels
Théorème 1 : si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$ et si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a + c \leq b + d$.
(si $a \leq b$ alors $b - a \geq 0$ donc, comme $b - a = (b+c) - (a+c)$, $(b+c) - (a+c) \geq 0$
soit $(b+c) \geq (a+c)$)
Théorème 2 :
Si $a \leq b$ et $c \geq 0$ alors $ac \leq bc$
Si $a \leq b$ et $c \leq 0$ alors $ac \geq bc$
Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$ alors $ac \leq bd$.
Théorème 3 :
Si $0 < a \leq b$ alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} > 0$.
Dans tout exercice portant sur des inégalités, on se ramène souvent à l'un au moins de ces théorèmes.

Démontrer la deuxième partie du théorème 1 ainsi que les théorèmes 2 et 3.

Exercice 3 – Encadrements

Soit x et y deux réels strictement positifs. On pose $a = x + \frac{1}{x}$, $b = y + \frac{1}{y}$ et $c = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$.

1. Montrer que a, b , c sont minorés par 2. Quelle minoration peut-on en déduire pour $a + b + c$? pour abc ?
2. On suppose que $0{,}1 \leq x \leq 0{,}2$ et $2 \leq y \leq 4$. En déduire un encadrement de a, de b, de c. Peut-on en affirmer que $b \leq a \leq c$?

(on précisera, à chaque étape du raisonnement, le théorème utilisé)

Exercice 4 – Multiples et diviseurs

Définition : On dit qu'un nombre entier a est un *multiple* d'un nombre entier b s'il existe un nombre entier k tel que $a = kb$.
On dit alors que b est un *diviseur* de a ou que a est *divisible* par b.
Dans les exercices mieux vaut se ramener à la définition en termes de « multiple de » pour éviter d'écrire des quotients.

Définition : un nombre entier naturel est dit premier lorsqu'il a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.
On admettra le théorème suivant
Théorème : Si un nombre est multiple de plusieurs nombres premiers distincts alors il est multiple du produit de ces nombres premiers.

Théorème (division euclidienne) : soit a et b deux entiers naturels tels que $b \neq 0$, alors il existe un unique couple (q, r) d'entiers naturels tels que $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$.

a. Montrer que la somme de deux nombres impairs consécutifs est un multiple de 4.
b. Montrer que si l'écriture décimale d'un nombre A est $\overline{xy}$ et celle d'un nombre B est $\overline{yx}$ alors le nombre $A + B$ est divisible par 11.
c. Montrer que si l'écriture décimale d'un nombre A est $\overline{cdu}$ et si $c + d + u = 9$ alors le nombre A est divisible par 9.
d. Montrer que pour tout entier n, le produit $n(n^4 - 1)$ est un multiple de 5.
(on pourra étudier les restes dans les divisions euclidiennes de n par 5).
e. Montrer que pour tout entier n, $n(n + 1)(2n + 1)$ est divisible par 2 et par 3.

Exercice 5 – Développement décimal d'un nombre rationnel

Propriété : : soit a et b deux entiers tels que $b \neq 0$. Le développement décimal du nombre rationnel $\frac{a}{b}$ est fini (nombre décimal) ou infini mais périodique à partir d'un certain rang.
Si le nombre rationnel est négatif, on se ramène au cas positif en prenant son opposé. On peut ensuite procéder par divisions euclidiennes successives dans l'ensemble des entiers naturels :
$a = b\boldsymbol{q_0} + r_0$ et $r_0 < b$, $10r_0 = b\boldsymbol{q_1} + r_1$ et $r_1 < b$, $10r_1 = b\boldsymbol{q_2} + r_2$ et $r_2 < b$, $10r_2 = b\boldsymbol{q_3} + r_3$ et $r_3 < b$, …
Alors $\frac{a}{b} = q_0, q_1q_2q_3$ ….

a. Expliquer pourquoi il suffit de connaitre le développement décimal de $\frac{31}{7}$ jusqu'à la 7e décimale pour connaitre entièrement ce développement décimal. Déterminer la période « à la main ».
b. Combien de décimales au maximum suffit-il de calculer pour connaitre le développement décimal de $\frac{49}{13}$?

Exercice 6 – Racines carrées

Propriétés : Pour tous nombres réels **positifs ou nuls** a et b :

- $\sqrt{a^2} = a$;
- $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$. En particulier $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$;
- $\sqrt{a + b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
- $a = b$ équivaut à $\sqrt{a} = \sqrt{b}$

Ces propriétés sont à la base de tous les calculs sur les racines carrées.

1. Montrer que pour tout réel x différent de 1, $\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} = \frac{2}{1-x}$.
2. Montrer que pour tous réels positifs ou nuls x, y, on a $x + y \geq 2\sqrt{xy}$.

En déduire que pour tous réels positifs ou nuls x, y, z, on a $(x + y)(y + z)(z + x) \geq 8xyz$.

3. **a.** Montrer que pour tout entier n, $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \sqrt{n + 1} - \sqrt{n}$.

   b. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, comparer $\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$ et $\frac{1}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}$.

   c. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $\sqrt{n + 1} - \sqrt{n} < \frac{1}{10}$.

   d. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \geq 100$.