ACADÉMIE DE VERSAILLES
Liberté
Égalité
Fraternité

Pépinière académique de mathématiques

Année 2023-2024 — **Stage « filé »**

Classe de première — **Fiche numéro 2**

Parution lundi 27 novembre — **Retour attendu pour le jeudi 14 décembre**

Dans cette fiche, chaque énoncé d'exercice est précédé de quelques rappels constituant des outils pour traiter l'exercice.

Exercice 1 – Factorisation et nombres premiers

Définition : on dit qu'un nombre entier m est un multiple d'un entier p s'il existe un entier k tel que $m = kp$.

On peut dire aussi que l'entier p divise m, mais attention à ne pas écrire de *quotient*, car on sortirait de l'arithmétique.

Démontrer une implication $A \Longrightarrow B$ revient à montrer que non $B \Rightarrow$ non A.

1. Soit k un entier supérieur ou égal à 2 et x un nombre réel.
Développer et réduire le produit $(x^{k-1} + x^{k-2} + \cdots + x + 1)(x - 1)$.
2. En déduire que si d est un diviseur de n alors $x^n - 1$ est factorisable par $x^d - 1$.
3. Démontrer que si $2^n - 1$ est un nombre entier premier alors n est un nombre entier premier.

1. $(x^{k-1} + x^{k-2} + \cdots + x + 1)(x - 1) = x^k - x^{k-1} + x^{k-1} - x^{k-2} + \cdots + x^2 - x + x - 1 = x^k - 1$
2. d est un diviseur de n signifie qu'il existe un entier k tel que $n = kd$ et donc $x^n = \left(x^d\right)^k$. D'après la question précédente, on a donc $x^n - 1 = \left(x^d\right)^k - 1 = \left(x^d - 1\right)\left(\left(x^d\right)^{k-1} + \left(x^d\right)^{k-2} + \cdots + x^d + 1\right)$.
3. Si A désigne l'affirmation « $2^n - 1$ est un nombre entier premier » et B désigne l'affirmation « n est un nombre entier premier », comme démontrer $A \Longrightarrow B$ revient à montrer que non $B \Rightarrow$ non A, supposons que n n'est pas un nombre entier premier et montrons qu'alors $2^n - 1$ n'est pas un nombre entier premier.
n n'est pas un nombre entier premier. Il existe donc un diviseur d de n distinct de 1 et donc un entier k lui-même distinct de 1 tel que $n = dk$.
D'après la question 2, en posant $x = 2$, on peut écrire $2^n - 1 = \left(2^d - 1\right)\left(\left(2^d\right)^{k-1} + \left(2^d\right)^{k-2} + \cdots + 2^d + 1\right)$.
Comme $\left(2^d\right)^{k-1} + \left(2^d\right)^{k-2} + \cdots + 2^d + 1$ est un entier distinct de 1 et $2^d - 1$ est aussi un entier distinct de 1 (car $d \neq 1$), on en déduit que $2^d - 1$ est un diviseur distinct de 1 de $2^n - 1$ qui n'est donc pas un nombre entier premier.
Au final, on a bien si $2^n - 1$ est un nombre entier premier alors n est un nombre entier premier.

Exercice 2 – Différences finies et calculs de sommes

Définition : Soit n un entier naturel, on appelle fonction polynôme (ou polynôme) de degré n, une fonction P pour laquelle il existe des entiers $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ tels que $a_n \neq 0$ et pour tout réel x, $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.
Les réels $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ sont appelés les coefficients de P.
Propriété : soit P et Q deux fonctions polynômes. P et Q sont égales (c'est-à-dire pour tout réel x, $P(x) = Q(x)$) si et seulement si P et Q ont même degré et les mêmes coefficients.

1. a. Déterminer les polynômes P de degré 2 tel que, pour tout réel x, $P(x+1) - P(x) = x$.
b. En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. a. Déterminer les polynômes Q de degré 3 tel que, pour tout réel x, $Q(x+1) - Q(x) = x^2$.
b. En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

1. a. Comme P est un polynôme de degré 2, il existe trois réels a $(a \neq 0)$, b et c tels que, pour tout réel x, $P(x) = ax^2 + bx + c$.
Alors $P(x+1) = a(x+1)^2 + b(x+1) + c = a(x^2 + 2x + 1) + b(x+1) + c$
et $P(x+1) - P(x) = (a-a)x^2 + (2a + b - b)x + a + b + c - c = 2ax + (a+b)$
On a donc pour tout réel x, $P(x+1) - P(x) = x$ si et seulement si $2a = 1$ et $a + b = 0$ soit $a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}$.
Les polynômes qui conviennent sont donc définis par, pour tout réel x, $P(x) = \frac{1}{2}(x^2 - x) + c$, où c est un réel quelconque.
b. En s'appuyant sur la question précédente, on remarque que, pour tout entier naturel n,

$$1+2+3+\cdots+n=\big(P(2)-P(1)\big)+\big(P(3)-P(2)\big)+\cdots+\big(P(n)-P(n-1)\big)+\big(P(n+1)-P(n)\big)$$

Soit, en simplifiant deux à deux les termes sauf le premier et le dernier,

$$1+2+3+\cdots+n=-P(1)+P(n+1)=-c+\frac{1}{2}\big((n+1)^2-(n+1)\big)+c=\frac{1}{2}(n^2+n)=\frac{n(n+1)}{2}.$$

2. **a.** Il existe de même quatre réels a, b, c et d tels que, pour tout réel x, $Q(x)=ax^3+bx^2+cx+d$.

On a alors $Q(x+1)=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$

Soit $Q(x+1)=a(x^3+3x^2+3x+1)+b(x^2+2x+1)+c(x+1)+d$

Et $Q(x+1)-Q(x)=(a-a)x^3+(3a+b-b)x^2+(3a+2b+c-c)x+(a+b+c+d-d)$.

Soit $Q(x+1)-Q(x)=3ax^2+(3a+2b)x+a+b+c$.

On a donc pour tout réel x, $Q(x+1)-Q(x)=x^2$ si et seulement si $3a=1$, $3a+2b=0$ et $a+b+c=0$

C'est-à-dire $a=\frac{1}{3}$, $b=-\frac{3}{2}a=-\frac{1}{2}$ et $c=-a-b=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$.

Les polynômes qui conviennent sont donc définis par, pour tout réel x, $Q(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x+d$, où d est un réel quelconque.

b. Par le même raisonnement qu'à la question précédente, on en déduit que, pour tout entier naturel n,

$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=-Q(1)+Q(n+1)=\frac{1}{3}(n+1)^3-\frac{1}{2}(n+1)^2+\frac{1}{6}(n+1)$

Soit $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}(n+1)(2(n+1)^2-3(n+1)+1)=\frac{1}{6}(n+1)(2n^2+4n+2-3n-3+1)$

Soit $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}(n+1)(2n^2+n)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Remarque : en utilisant la même méthode que dans les questions précédentes, on peut montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Exercice 3 – Positions relatives de courbes

Méthode : pour étudier la position relative de deux courbes C_f et C_g sur un ensemble D, on compare les nombres $f(x)$ et $g(x)$ lorsque $x\in D$.

Définition : on dit qu'un nombre a est inférieur ou égal à un nombre b lorsque $b-a\geq 0$.

Cette définition conduit à une méthode pratique pour comparer deux nombres.

Propriété : Soit a et b deux réels positifs, $a\leq b$ si et seulement si $a^2\leq b^2$.

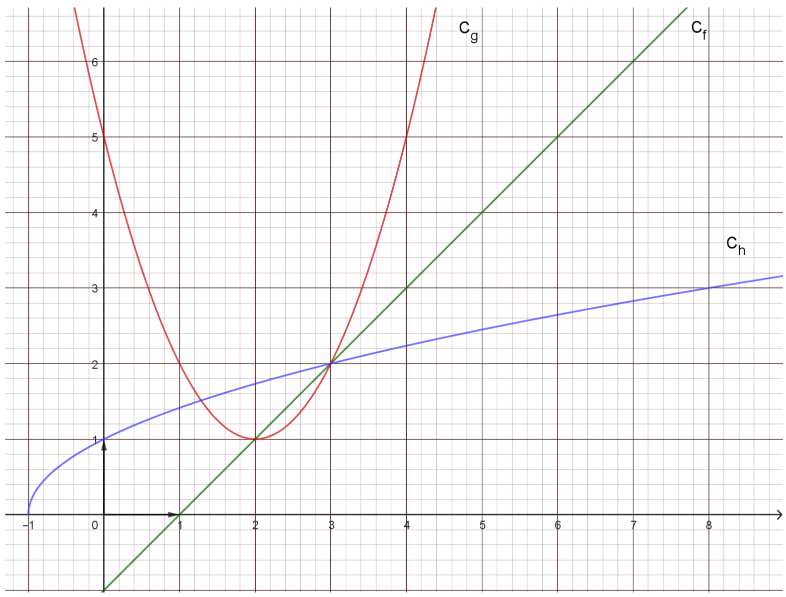
Soit f, g et h les fonctions définies sur $[-1,+\infty[$ par $f(x)=x-1$, $g(x)=x^2-4x+5$, $h(x)=\sqrt{x+1}$. On note respectivement C_f, C_g, C_h leurs courbes représentatives dans un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Tracer les trois courbes.
2. Etudier la position relative
   - **a.** des courbes C_f et C_g
   - **b.** des courbes C_f et C_h.
3. Déterminer les coordonnées du point commun aux trois courbes.

1. C_f est une droite. Il suffit de calculer les images de deux nombres pour la tracer.

C_g est une parabole de sommet A(2,1).

C_h est l'image de la courbe représentant la fonction racine carrée par la translation de vecteur $-\vec{\imath}$.



2. **a.** Pour tout $x\in[-1,+\infty[$,

$g(x)-f(x)=x^2-4x+5-x+1$

$g(x)-f(x)=x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$.

On en déduit que C_g est au-dessus de C_f sur $[-1,2]$ et sur $[3,+\infty[$ et C_g est en-dessous de C_f sur $[2,3]$.

b. Pour comparer $f(x)$ et $h(x)$, qui contient une racine carrée, on peut utiliser la propriété rappelée ci-dessus mais uniquement pour des nombres positifs.

Or, pour tout $x\in[-1,1]$, $x-1\leq 0\leq\sqrt{x+1}$ d'où $f(x)\leq h(x)$.

Et pour tout $x \in [1,+\infty[$, $x-1 \geq 0$ et $\sqrt{x+1} \geq 0$ donc les comparer revient à comparer leurs carrés.

$\left(\sqrt{x+1}\right)^2 - (x-1) = x+1-(x^2-2x+1) = x+1-x^2+2x-1 = -x^2+3x = x(3-x)$.

On en déduit que C_h est au-dessus de C_f sur $[1,3]$ et C_h est en-dessous de C_f sur $[3,+\infty[$.

3. Les abscisses des points d'intersection de C_f et C_g sont les solutions de l'équation $g(x)-f(x)=0$, à savoir 1 et 3. Comme $f(1)=0$ et $h(1)=\sqrt{2}$ donc $f(1) \neq h(1)$ tandis que $f(3)=2=h(3)$.
Les trois courbes ont donc bien un unique point commun, le point de coordonnées (3,2).

Exercice 4 – Médianes concourantes et droite d'Euler

Le calcul vectoriel est un outil fort utile pour les démonstrations en géométrie :

- caractérisation du milieu I d'un segment [AB] par l'une des égalités vectorielles suivantes :
$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$ ou $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ ou, pour un point M du plan, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.
- parallélisme de droites ou alignement de points par la colinéarité de deux vecteurs
- parallélogramme par l'égalité de deux vecteurs
- relation de Chasles…

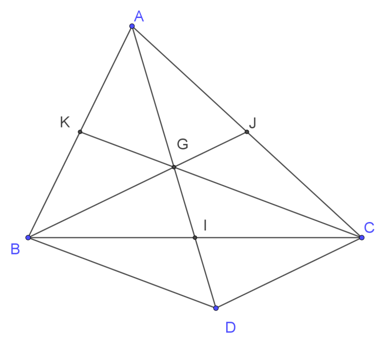
Théorème : les médianes d'un triangle sont concourantes. Leur point de concours est appelé centre de gravité du triangle et il est situé au tiers de chaque médiane, en partant de la base.

1. Démonstration du théorème : soit ABC un triangle et soit I, J, K les milieux respectifs des segments [BC], [CA], [AB]. On note G le point d'intersection des médianes (BJ) et (CK) et D le symétrique de A par rapport à G.
   a. Montrer que le quadrilatère BDCG est un parallélogramme.
   b. En déduire que G est situé sur (AI) et préciser la position de G sur chaque médiane.
   c. Montrer que pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right)$.

2. Soit respectivement O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et soit H le point du plan défini par $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.
   a. Montrer que (AH) est la hauteur issue de A dans le triangle ABC.
   b. Que représente le point H pour le triangle ABC ?

3. Montrer que les points O, H et G sont alignés.

1. a. $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}$. Or G et J sont les milieux respectifs de [DA] et [CA] d'où $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{AJ} = 2\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AJ}\right) = 2\overrightarrow{GJ}$.
On en déduit que les droites (DC) et (GJ) sont parallèles. Comme les points B, G et J sont alignés, (DC) et (BG) sont parallèles.
On démontrerait de même que les droites (BD) et (CG) sont parallèles.
Le quadrilatère BDCG est donc un parallélogramme.



b. Les diagonales du parallélogramme BDCG se coupent en leur milieu.
Le milieu I du segment [BC] est donc aussi le milieu du segment [GD]. En particulier le point I appartient à la droite (GD) qui est aussi la droite (AG), ce qui implique que les points A, G et I sont alignés.
Les trois médianes sont donc bien concourantes en G et $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IG} + \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{IG} + \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{IG} + 2\overrightarrow{IG} = 3\overrightarrow{IG}$
car I est le milieu de [GD] et G est le milieu de [AD]. On en tire la relation $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$, ce qui précise la position du point G sur la médiane [AI]. La position de G sur les autres médianes est analogue (le raisonnement fait ne fait jouer aucun rôle particulier aux deux médianes considérées).

c. Pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$
Or $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI} = -\overrightarrow{GA}$ donc $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ et donc $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

2. a. L'égalité $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ s'écrit aussi $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OI}$ car I est le milieu de [BC].
On en déduit que (AH) et (OI) sont parallèles. Or (OI) est la médiatrice de [BC] par définition du point O donc (AH) est perpendiculaire à (BC). La droite (AH) est donc la hauteur issue du point A dans le triangle ABC.

b. On démontrerait de même que (BH) et (CH) sont aussi des hauteurs. Le point H est donc l'orthocentre du triangle ABC.

3. De plus comme $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ pour tout point M, en particulier $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$, on en déduit que $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.
On peut donc affirmer que les points O, H et G sont alignés.

Exercice 5 – Alignement et parallélisme en géométrie analytique

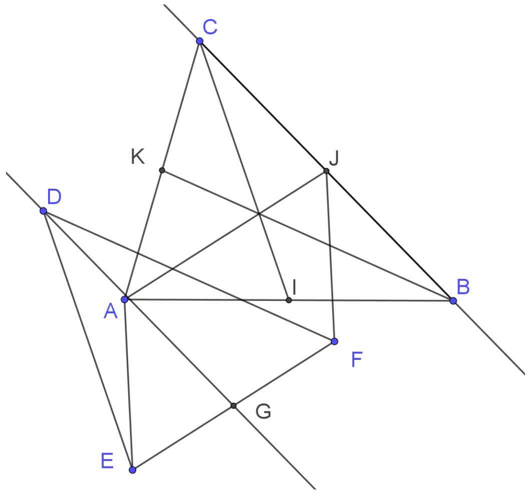
Se placer dans un repère permet de résoudre certains exercices de géométrie en :
- traduisant un alignement ou un parallélisme en termes de colinéarité de vecteurs ;
- utilisant le déterminant de deux vecteurs ;
- traduisant sur ses coordonnées l'appartenance d'un point à une droite.

Le repère peut alors être donné dès le départ ou introduit « judicieusement » pour travailler avec des coordonnées simples à déterminer.

Soit ABC un triangle non aplati. Les points I, J et K sont les milieux respectifs des segments [AB], [BC] et [CA].
On considère un point D et on note E et F les images respectives du point D par les translations de vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{CI}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{KB}}$.

1. On se place dans le repère $(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}})$.
   a. Déterminer la nature du quadrilatère EAJF.
   b. Montrer que si G est le milieu du segment [EF] alors les droites (DG) et (BC) sont parallèles.
2. Sans utiliser de repère, retrouver le résultat de la question **a.**

1. a. Dans le repère $(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}})$, on a : $\mathrm{A}(0{,}0), \mathrm{B}(1{,}0), \mathrm{C}(0{,}1)$.
Les points I, J et K sont les milieux respectifs des segments [AB], [BC] et [CA], ce qui donne $\mathrm{I}\left(\frac{1}{2}, 0\right), \mathrm{J}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et $\mathrm{K}\left(0, \frac{1}{2}\right)$ et le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AJ}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$.



On en déduit les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{CI}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{KB}}\begin{pmatrix}1\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

Comme E et F sont images respectives du point D par les translations de vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{CI}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{KB}}$, si on note (x, y) les coordonnées du point D, alors on a :
$\mathrm{E}\begin{pmatrix}x+\frac{1}{2}\\ y-1\end{pmatrix}$ et $\mathrm{F}\begin{pmatrix}x+1\\ y-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$. On en déduit le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{EF}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

On constate alors que $\overrightarrow{\mathrm{EF}} = \overrightarrow{\mathrm{AJ}}$, ce qui signifie que le quadrilatère EAJF est un parallélogramme.

b. G est le milieu de $[\mathrm{EF}]$. Ses coordonnées sont donc $\left(x+\frac{3}{2}, y-\frac{3}{2}\right)$. On obtient ainsi les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{DG}}\begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\ -\frac{3}{4}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BC}}\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$. En calculant $\det(\overrightarrow{\mathrm{DG}}, \overrightarrow{\mathrm{BC}})$ ou en remarquant que $\overrightarrow{\mathrm{DG}} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$, on constate que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{DG}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ sont colinéaires. Les droites (DG) et (BC) sont donc bien parallèles.

2. Par définition de E et F, $\overrightarrow{\mathrm{DE}} = \overrightarrow{\mathrm{CI}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{DF}} = \overrightarrow{\mathrm{KB}}$ donc $\overrightarrow{\mathrm{EF}} = \overrightarrow{\mathrm{ED}} + \overrightarrow{\mathrm{DF}} = -\overrightarrow{\mathrm{CI}} + \overrightarrow{\mathrm{KB}}$.
Or I est le milieu de [AB] donc $\overrightarrow{\mathrm{CI}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{CA}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ et K est le milieu de [CA] donc $\overrightarrow{\mathrm{BK}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BA}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$.
On en déduit $\overrightarrow{\mathrm{EF}} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{CA}} - \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{CB}} - \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BA}} - \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AJ}}$ puisque J est le milieu de [BC]. On peut ainsi conclure que le quadrilatère EAJF est un parallélogramme.

Exercice 6 – Famille de droites

En géométrie analytique, il est indispensable de savoir :
- traduire sur une équation de droite les éléments caractéristiques d'une droite (vecteur directeur, coefficient directeur, appartenance d'un point …) ;
- trouver à partir d'une équation de droite ces mêmes éléments caractéristiques.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Pour tout réel m, on considère l'ensemble D_m des points $M(x, y)$ tels que : $(m-3)x - my + 3 - 3m = 0$.

1. Vérifier que pour tout réel m, D_m est une droite.
2. Pour quelle valeur de m, la droite D_m est-elle parallèle à l'axe des abscisses ? à l'axe des ordonnées ?
3. Montrer que toutes les droites D_m passent par un même point I dont on donnera les coordonnées.

4. Pour quelle valeur de m le nombre -1 est le coefficient directeur de la droite D_m ? A-t-on pour tout réel p une droite D_m de coefficient directeur p ?

5. Soit $A(3,-1)$ et $B(6,2)$. Pour quelle valeur de m la droite D_m a-t-elle même ordonnée à l'origine que la droite (AB) ?

1. D_m est une droite si et seulement si les coefficients de x et y dans l'équation (E) ne sont pas tous les deux nuls. Or $m-3=0$ équivaut à $m=3$ mais alors $-m \neq 0$ et $-m=0$ équivaut à $m=0$ mais alors $m-3 \neq 0$.

L'ensemble D_m est donc bien toujours une droite.

2. La droite D_m est parallèle à l'axe des abscisses si et seulement si le coefficient de x dans l'équation (E) est nul soit $m-3=0$ c'est-à-dire $m=3$. Une équation de D_3 est $-3y-6=0$ ou $y=-2$.

La droite D_m est parallèle à l'axe des ordonnées si et seulement si le coefficient de y dans l'équation (E) est nul soit $-m=0$. Une équation de D_0 est $-3x+3=0$ ou $x=1$.

3. Si le point I existe, il appartient aux droites D_3 et D_0. Il suffit alors de vérifier que, pour tout réel m, le couple $(1,-2)$ est solution de (E).

Or, pour tout réel m, $(m-3)\times 1 - m\times(-2) + 3 - 3m = m - 3 + 2m + 3 - 3m = 0$.

Toutes les droites D_m passent donc bien par le point $I(1,-2)$.

4. Si $m \neq 0$, l'équation (E) s'écrit $y = \frac{m-3}{m}x + \frac{3-3m}{m}$ et le coefficient directeur de la droite D_m est $p = \frac{m-3}{m}$.

$p=-1$ équivaut à $m-3=-m$ soit $2m=3$ soit $m=\frac{3}{2}$.

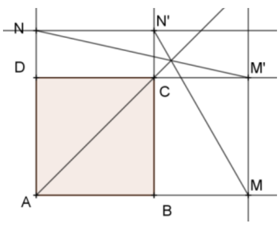
Soit p un réel, $p=\frac{m-3}{m}$ équivaut, pour $m \neq 0$, à $(p-1)m=-3$. Au réel p on pourra associer une droite D_m si et seulement si $p \neq 1$.

5. Un point $M(x,y)$ du plan appartient à (AB) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-3\\y+1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ sont colinéaires c'est-à-dire leur déterminant est nul ce qui s'écrit $3(x-3)-3(y+1)=0$ soit $x-y-4=0$.

Cette équation s'écrit aussi $y=x-4$. L'ordonnée à l'origine de la droite (AB) est donc -4.

La droite D_m a donc même ordonnée à l'origine que la droite (AB) si et seulement si $\frac{3-3m}{m} = -4$ soit $m=-3$.

Exercice 7 – Droites concourantes



Deux droites du plan sont parallèles ou sécantes. Lorsque trois droites ont un point commun, on dit qu'elles sont *concourantes* (ce terme a été utilisé dans un exercice précédent).

Soit a et b deux réels distincts de 0 et de 1. On considère un carré ABCD de côté 1, et le repère d'origine A et d'axes (AB) et (AD) (avec l'orientation nécessaire). Les points M et N ont pour couples de coordonnées $(a,0)$ et $(0,b)$ respectivement. Les points M' et N' sont les points de couples de coordonnées $(a,1)$ et $(1,b)$ respectivement.

1. À quelle condition (sur a et b) les droites (MN') et (NM') sont-elles parallèles ?

2. Montrer que, si cette condition n'est pas réalisée, les droites (MN'), (NM') et (AC) sont concourantes.

1. Le point M' a pour coordonnées $(a,1)$ et le point N a pour coordonnées $(0,b)$. La pente de la droite (M'N) est donc $\frac{1-b}{a}$. Les coordonnées de M sont $(a,0)$ et celles de N' sont $(1,b)$. La pente de la droite (MN') est donc $\frac{b}{1-a}$.

Ces pentes sont identiques si $(1-b)(1-a)=ab$, c'est-à-dire $a+b=1$.

2. Si cette condition n'est pas réalisée, on peut chercher les coordonnées du point d'intersection de ces deux droites, dont des équations sont : $y-b=\frac{1-b}{a}x$ et $y=\frac{b}{1-a}(x-a)$. Le système $\begin{cases}(1-b)x-ay+ab=0\\bx-(1-a)y-ab=0\end{cases}$ a une solution (x,y) qui vérifie $x-y=0$ (par « addition » membre à membre). Le point correspondant appartient donc à la droite (AC). Les trois droites sont concourantes.